BnF Gallica

Notes prises par les élèves du Cours de géométrie descriptive et de stéréotomie de M. Pillet,...

Source gallica.bnf.fr / Ecole nationale des ponts et chaussées

BnF Gallica

Pillet, Jules-Jean (1842-1912). Auteur du texte. Notes prises par les élèves du Cours de géométrie descriptive et de stéréotomie de M. Pillet,.... 1876.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :
- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

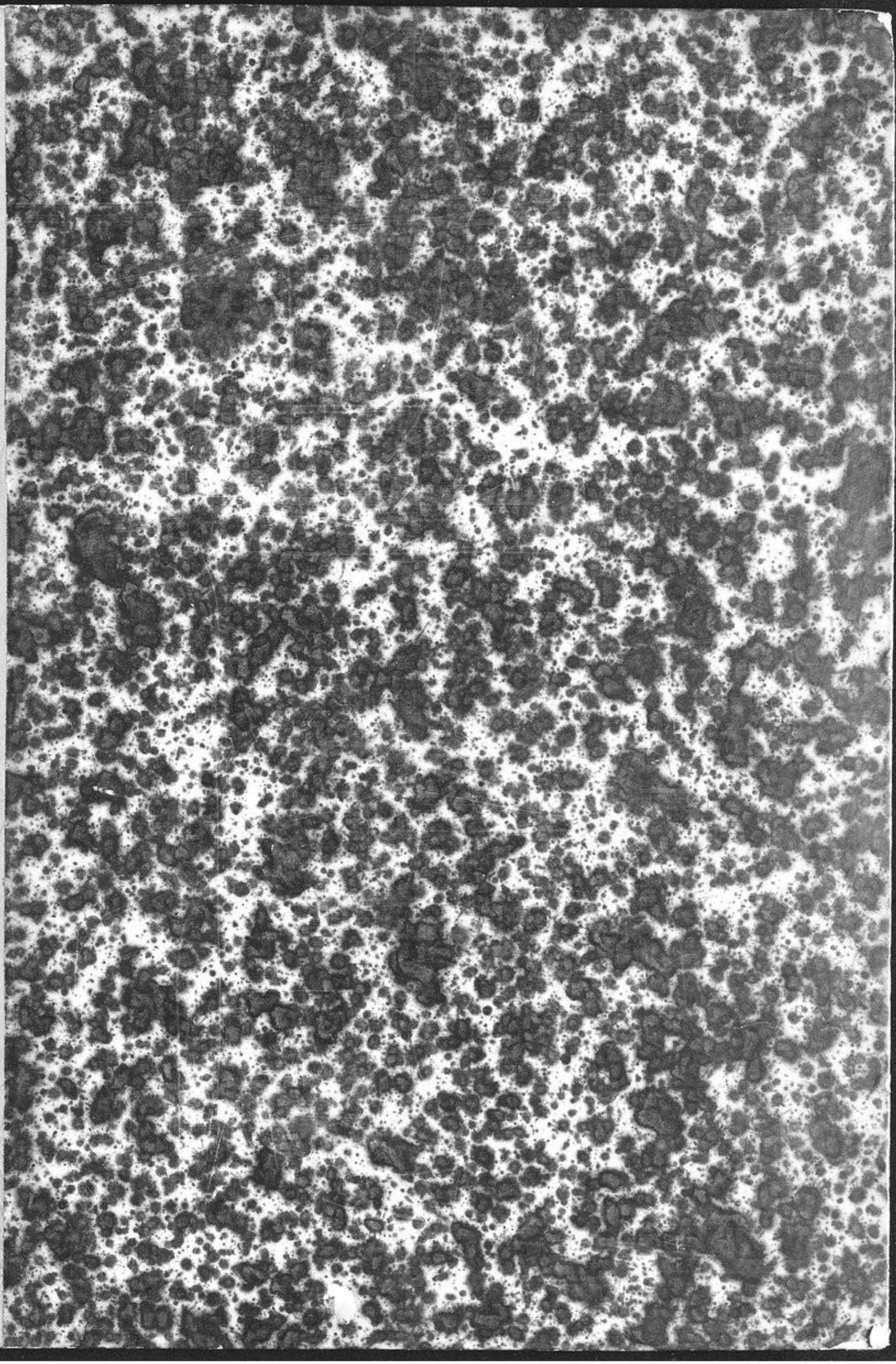
- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

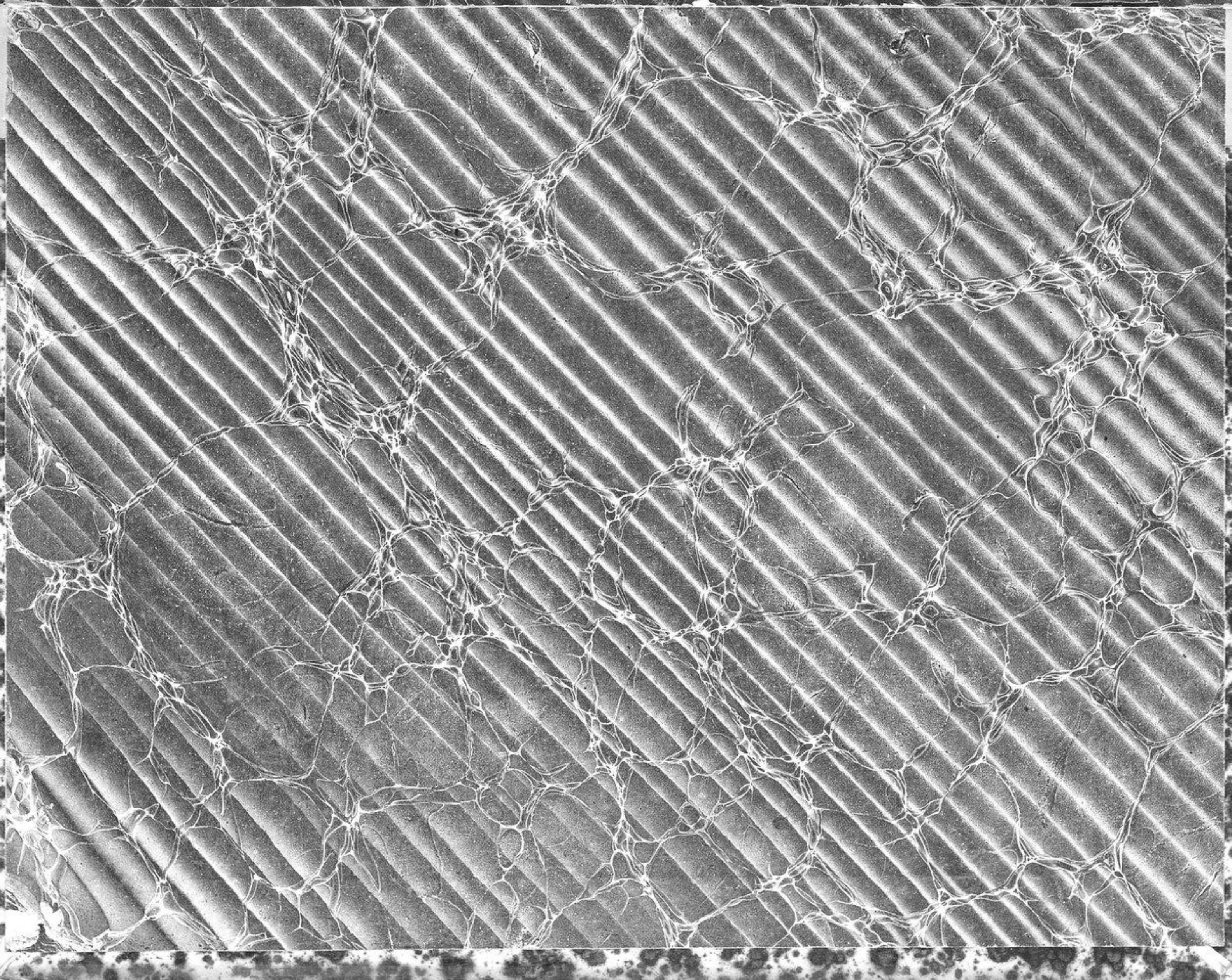
5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter **utilisation.commerciale@bnf.fr**.



Source gallica.bnf.fr / Ecole nationale des ponts et chaussées



23057

École des Ponts et Chaussées.

Cours Préparatoires.

Notes

prises par les Élèves

du

Cours de Géométrie descriptive

et de Stéréotomie

de

M.r Pillet,

Chef des Travaux Graphiques, Professeur du cours.

ENPC02-COU-4-23057-1875

1875 – 1876.

École des Ponts et Chaussées.

Cours Préparatoires.

Cours

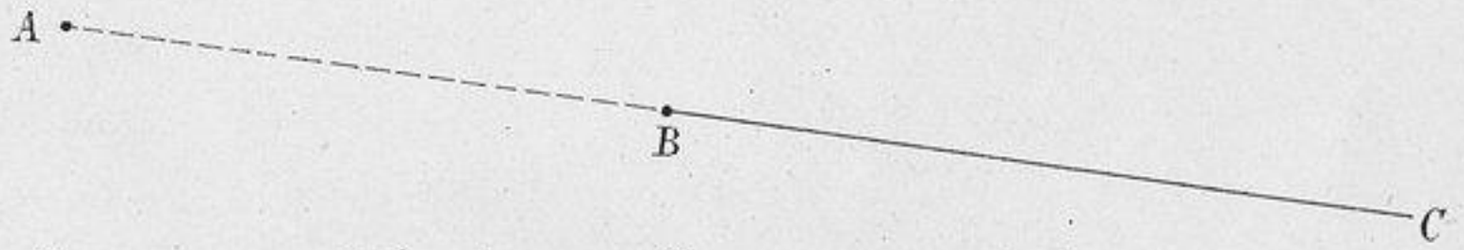
de Géométrie descriptive et de Stéréotomie,

par M. Piller

1ère Partie.

Ombres Linéaires.

La lumière se propage en ligne droite: ce qui veut dire que si A est un point lumineux, et B un point opaque, la portion de l'espace à laquelle l'écran B masquera le flambeau, sera située sur la ligne droite indéfinie AB, et de B en C sur la portion de cette ligne qui se trouve au-delà du point B



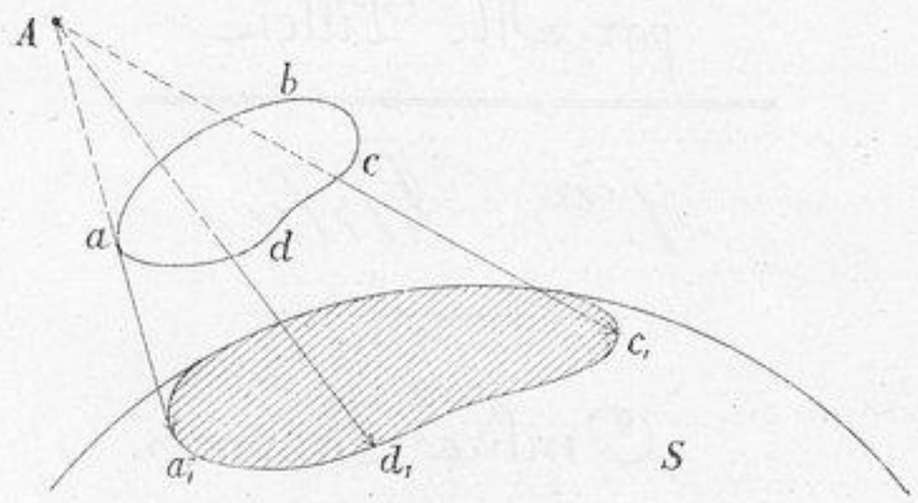
Lumière au Flambeau - Lumière au soleil. — Nous supposerons la source de lumière réduite à un point géométrique. Si ce point est à distance finie, on le nomme flambeau. Les rayons lumineux, dans ce cas, sont divergents. Si le point est à distance infinie, la lumière est dite au soleil. — Les rayons lumineux sont parallèles.

Cône et Pyramide d'ombre. — Cylindre et prisme d'ombre: Soit a.b.c.d... une portion de surface, limitée par la ligne a b c d.

Soit S une autre surface placée au delà et A le flambeau.

Menons les rayons lumineux limites Aa, Ab, Ac .... par leur ensemble ils forment le Cône d'ombre de la surface limitée a.b.c. Tout rayon lumineux situé dans l'intérieur de ce cône est arrêté par la surface, l'éclaire, et ne va pas au delà ; tout rayon lumineux situé en dehors éclaire d'autres surfaces que a.b.c ....

Si l'on prend la trace a_1 b_1 c_1 .... de ce cône d'ombre sur la surface S, on aura l'ombre portée par la surface a.b.c... sur S.

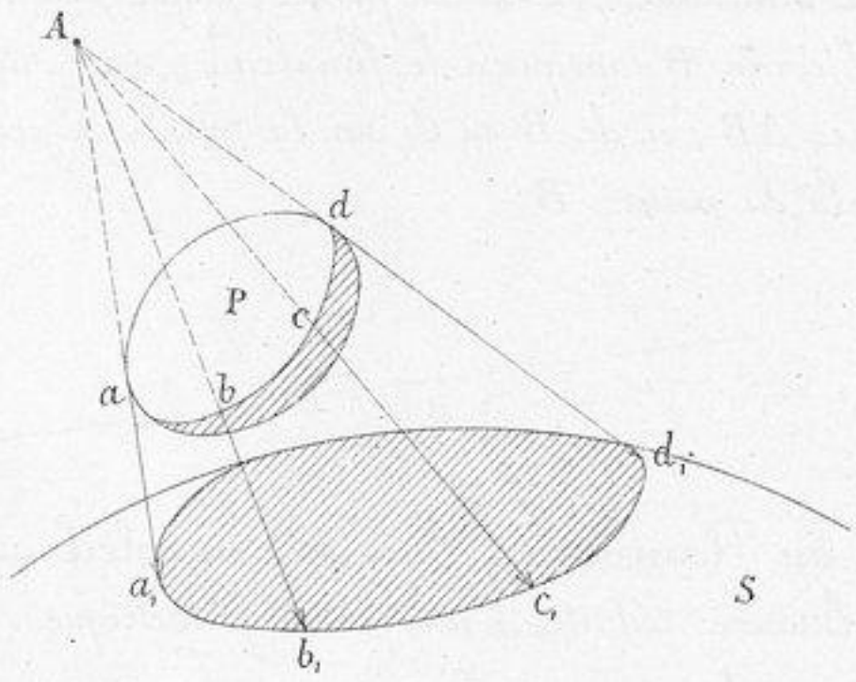


Si la figure a b c d était polygonale, le cône d'ombre deviendrait une pyramide. Si le flambeau était à l'infini, le cône et la pyramide deviendraient un cylindre et un prisme d'ombre.

Si nous avons une surface complète (une sphère, par exemple), si nous menons les rayons lumineux tangents, ils formeront un cône ou un cylindre d'ombre circonscrit à la surface.

La courbe de contact a.b.c.d. se nomme séparatrice, ou ligne d'ombre propre. Elle sépare la surface en 2 régions, l'une qui reçoit de la lumière, et l'autre qui n'en reçoit pas.

Si l'on prolonge le cône d'ombre jusqu'à la surface S, on aura en a, b, c, d, .. l'ombre portée par la surface P sur la surface S.



Remarque — L'ombre portée a_1 b_1 c_1 .... est précisément l'ombre portée par la séparatrice a. b. c....

Si la surface P est polyédrique, la ligne d'ombre propre sera une ligne brisée gauche, et le cône ou le cylindre d'ombre deviendra

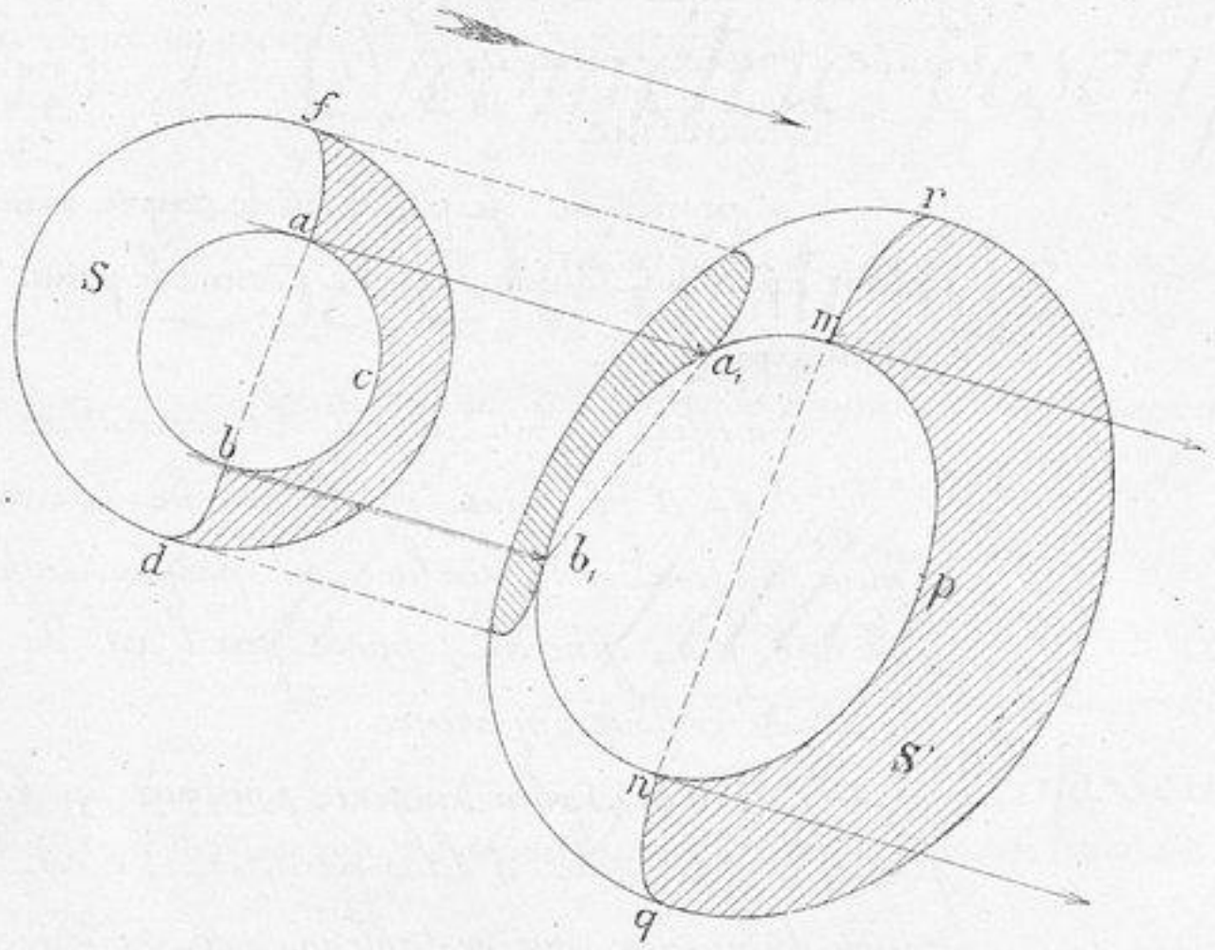
une pyramide ou un prisme d'ombre.

Méthodes générales pour la recherche des ombres.

1° Méthode des plans sécants.

Supposons les rayons parallèles. — Soient S et S' 2 surfaces. — Nous voulons trouver les ombres propres de chacune d'elles, et l'ombre portée par la 1ère sur la 2e.

Coupons les 2 surfaces par un même plan auxiliaire Q parallèle aux rayons lumineux (ou passant par le flambeau). Il détermine dans chacune d'elles une courbe de section, a, b, c, — m, n, p. — Menons à la 1ère des tangentes lumineuses. — Soient a et b ces points de tangence. Les points a et b sont des points de la séparatrice de la 1ère surface. — De même, m et n appartiennent à la séparatrice de la 2e surface. Enfin les rayons a et b prolongés jusqu'à la rencontre

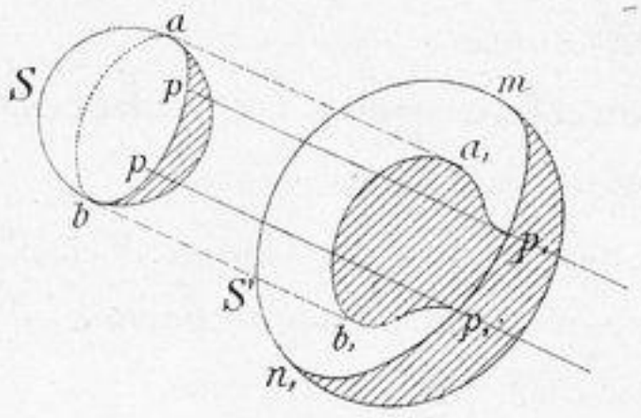


avec la courbe m, n, p, donne en a, et b, des points de l'ombre portée par S sur S'.

On coupera par d'autres plans sécants, et l'on obtiendra d'autres points des séparatrices et de la ligne d'ombre portée.

Point de perte de l'Ombre portée.

On nomme ainsi le point p, où l'ombre portée par une première surface vient se perdre dans l'ombre propre d'une 2e surface.



Théorème. — A tout point de perte, la tangente à la courbe d'ombre portée est le rayon lumineux, non seulement en projection, mais encore dans l'espace.

En effet, la courbe d'ombre portée $a_1 b_1 p_1 p_1$ est l'intersection de la surface S' et du cylindre d'ombre de la surface S.

Considérons le rayon lumineux du point P_1. Il est une des génératrices du cylindre d'ombre de S, et par suite appartient au plan tangent à ce cylindre au point p_1.

D'un autre côté, p_1 étant sur la séparatrice de S', le rayon $p\,p_1$ est tangent à S' et contenu dans le plan tangent à S' au point p_1.

. Le rayon lumineux est donc l'intersection de 2 plans tangents au cylindre d'ombre et à la surface S', et par suite c'est la tangente à la courbe d'ombre portée $a_1\, p_1\, b_1$

Théorème.

En projection, le point où le rayon lumineux projeté est tangent au contour apparent d'une surface, donne le point de la séparatrice situé sur ce contour apparent.

En effet. Soit $a\, p\, b$, la séparatrice de la surface S.

Soit a, le point où elle touche le contour apparent. — En ce point le plan tangent à la surface est perpendiculaire au plan de projection, ou, pour être plus général, passe par l'œil du spectateur, puisque c'est un point du contour apparent.

Mais ce plan tangent contient un rayon lumineux, puisque le point a appartient à la séparatrice, c'est donc le plan projetant le rayon lumineux sur ce tableau, et sa trace $a\,a$, qui est tangente au contour apparent est la projection d'un rayon lumineux. C.Q.F.D.

Remarque. — Ces deux tangentes extrêmes $a\,a$, et $b\,b$, forment le contour apparent du cylindre d'ombre de la surface S.

Théorème. — La séparatrice d'une surface S et son ombre portée sur une autre surface S' ont pour tangentes communes 2 rayons lumineux en projection.

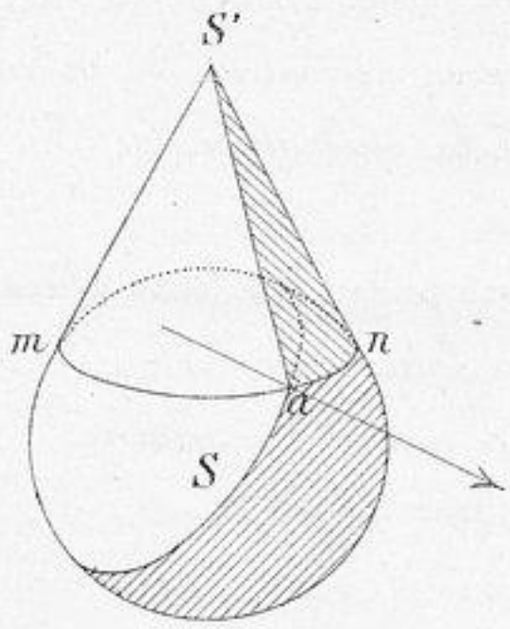
Je dis que les droites a a, , et b b, sont tangentes à la fois à la séparatrice a b p , et à l'ombre portée a, b, p, .

En effet ces 2 courbes appartiennent toutes deux au cylindre d'ombre de S . Elles doivent être tangentes à son contour apparent , et nous venons de dire que ce contour apparent était formé des 2 rayons lumineux projetés a a, b b, . C.Q. F. D.

2°. Méthode des surfaces inscrites ou circonscrites.

Deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre lorsqu'elles ont les mêmes plans tangents en tous les points d'une même courbe que l'on nomme leur courbe de contact.

Théorème. — Lorsque deux surfaces se raccordent le long d'une courbe de contact, le point où la séparatrice de la 1ère rencontre, la ligne de contact donne un point de la séparatrice de la 2ème.



Soit S et S', deux surfaces se raccordant le long de la courbe m a n .

Soit S'a , la séparatrice de la 1ère et a le point où elle rencontre la ligne de contact.

Au point a, le rayon lumineux est tangent à la surface S', puisque a est un point de la séparatrice de S'. — Mais S et S' ont même plan tangent en a . Donc le rayon lumineux en a est aussi tangent à S , et par conséquent a est un point de la séparatrice de S . C.Q. F. D.

Cette méthode n'est praticable que pour donner des points des lignes d'ombre propre.

Nous la généraliserons dans la théorie du lavis, pour trouver les lignes d'égale teinte sur une surface.

3°. Méthode des ombres portées et des enveloppes, ou Méthode des projections obliques.

Soient S et S', deux surfaces ; et soit P un plan auxiliaire d'ombres portées. On veut résoudre le problème général des ombres :

1°. Recherche de l'ombre portée par S' sur le plan P.

On tracera sur S' des courbes convenablement choisies. — Soient $1, 2, 3, \ldots$ ces courbes dans l'espace. — On cherchera les ombres portées de ces courbes sur le plan P. Soient $1', 2', 3', \ldots$ ces ombres portées.

En raisonnant comme on le fait quand on démontre que le contour apparent d'une surface est l'enveloppe des projections de toutes les courbes tracées sur cette surface, on prouvera que l'ombre portée par la surface S' sur le plan P, est l'enveloppe des courbes $1', 2', 3', \ldots$.

On tracera cette enveloppe.

2°. Recherche de l'ombre propre de S'.

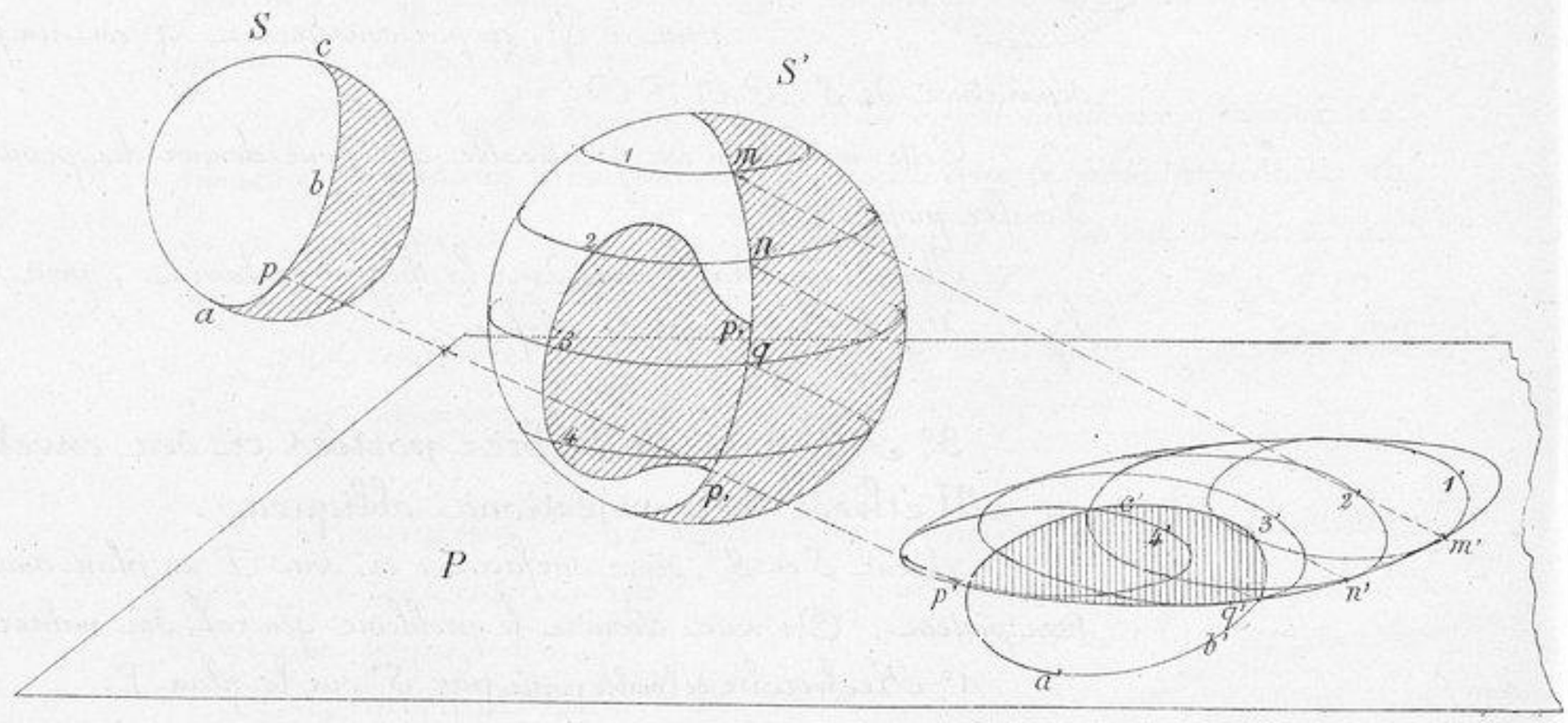
On cherchera les points $m', n', q' \ldots$ où l'enveloppe touche les enveloppées $1', 2', 3', \ldots$ — Soit m' un de ces points de contact. Le point m' étant un point de l'ombre portée de S', est aussi l'ombre portée d'un point de la séparatrice de S'

Mais m' appartient à $1'$, ombre portée par la courbe 1; si donc par un rayon lumineux inverse nous remontons de m' en m sur la courbe 1, nous aurons en m un point de la séparatrice de S'. On fera de même pour tous les autres.

3°. Ombre portée et ombre propre de la surface S.

On fera pour S comme on a fait pour S'. — Soient $a'b'c'\ldots$ son ombre portée, et $a, b, c, \ldots$ son ombre propre

4°. Ombre portée par S sur S'



L'ombre portée a' b' c' de la surface S rencontre en a' la courbe 1', ombre portée par la courbe 1 de la surface S'.

Menons le rayon inverse a' a, a . Il passera par le point a, de la courbe 1, et par le point a de la séparatrice de S .

Le point a porte donc ombre en a , sur la surface S'.

On obtiendra de la même manière les points de l'ombre portée située sur les courbes 2 . 3 . . . . de la surface S'.

5° Point de Perle.

Prenons le point p' où les deux courbes d'ombres portées totales se rencontrent.

Menons le rayon lumineux inverse p' p, p .

Il vient passer par le point p, de l'ombre propre de S' et par le point p de l'ombre propre de S , — p porte donc ombre en p, sur la surface S' et par suite le point p est le point de perle cherché .

La tangente en p, à la courbe d'ombre portée, est le rayon lumineux.

Remarque. — Le plan P , au lieu d'être choisi arbitrairement peut être donné par l'épure même. En architecture, ce sera soit un mur, soit le sol. Au lieu d'un plan, on pourra prendre toute autre surface auxiliaire : un cône, un cylindre . . . . . — Il est rare que dans les applications il n'y ait pas de surfaces sur lesquelles les ombres portées soient demandées. — Dans ce cas ces surfaces serviront d'auxiliaires, et permettront de remonter des ombres portées sur elles aux ombres propres dans l'espace et aux ombres portées des objets les uns sur les autres.

Ombre propre du Cône.

Soit o o' (fig.1) sa base sur le plan de projection, — S S' son sommet . On cherche l'ombre portée par le sommet sur le plan de base.

Soit S_1 S_1' cette ombre portée. — On mène par ce point les deux tangentes à la base — $S_1 p$ — $S_1 q$. — Ces deux droites déterminent l'ombre portée par le cône sur son plan de base

Les génératrices des points de contact $S p_1$ — $S' p'$ —— et $S q$ — $S' q'$, sont les lignes d'ombre propre.

Fig. 1

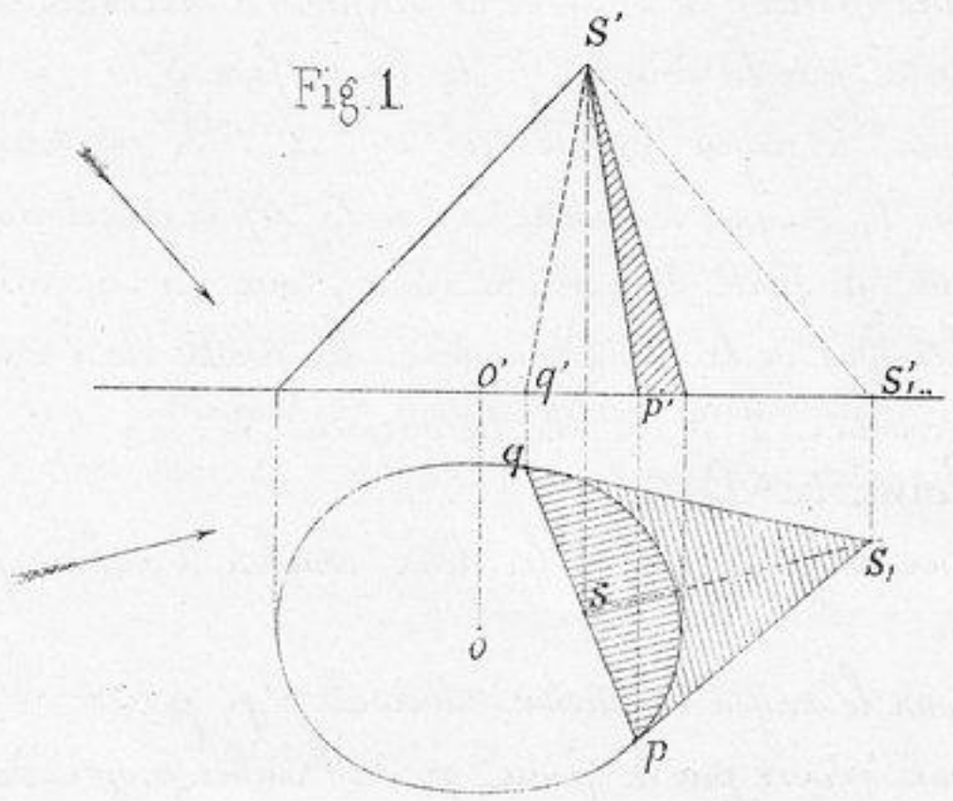
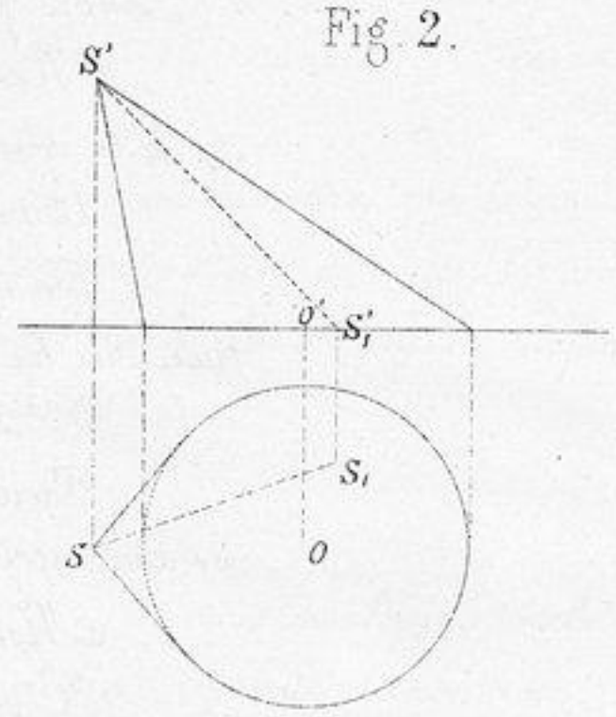


Fig. 2.



Cône sans ombre.

Si (fig. 2) l'ombre portée $S_1 S'_1$ du sommet tombe dans l'intérieur de la courbe de base il ne sera pas possible de mener du point S_1 des tangentes à cette base. — Le cône n'aura pas d'ombre propre.

Cône Limite.

Enfin, si le point S_1 tombe sur la courbe de base, c'est-à-dire si le rayon lumineux dans l'espace est parallèle à une génératrice du cône, on ne pourra plus mener par S_1 qu'une tangente à cette base, et les deux génératrices d'ombres propres se réduiront à une seule.

Ombre propre d'un cylindre.

Soit OO' (fig. 1) la base du cylindre sur le plan horizontal.

On prendra une génératrice quelconque $cd - c'd'$. On cherchera son ombre portée sur le plan de base, en $cd_1 - c'd'_1$.

On mènera, à la base, deux tangentes, — $pr - qs$, parallèles à cd_1. — Ces deux droites constitueront l'ombre portée par le cylindre sur le plan horizontal.

Les génératrices pa; $p'a'$, et $qb - q'b'$, qui passent par le point de contact sont les lignes d'ombre propre du cylindre.

Remarque. — Si le cylindre est perpendiculaire à l'un des plans de projection (fig. 2), il suffira de mener à la base sur ce plan de

projection deux tangentes parallèles à la projection correspondante R, du rayon lumineux

Fig. 1.

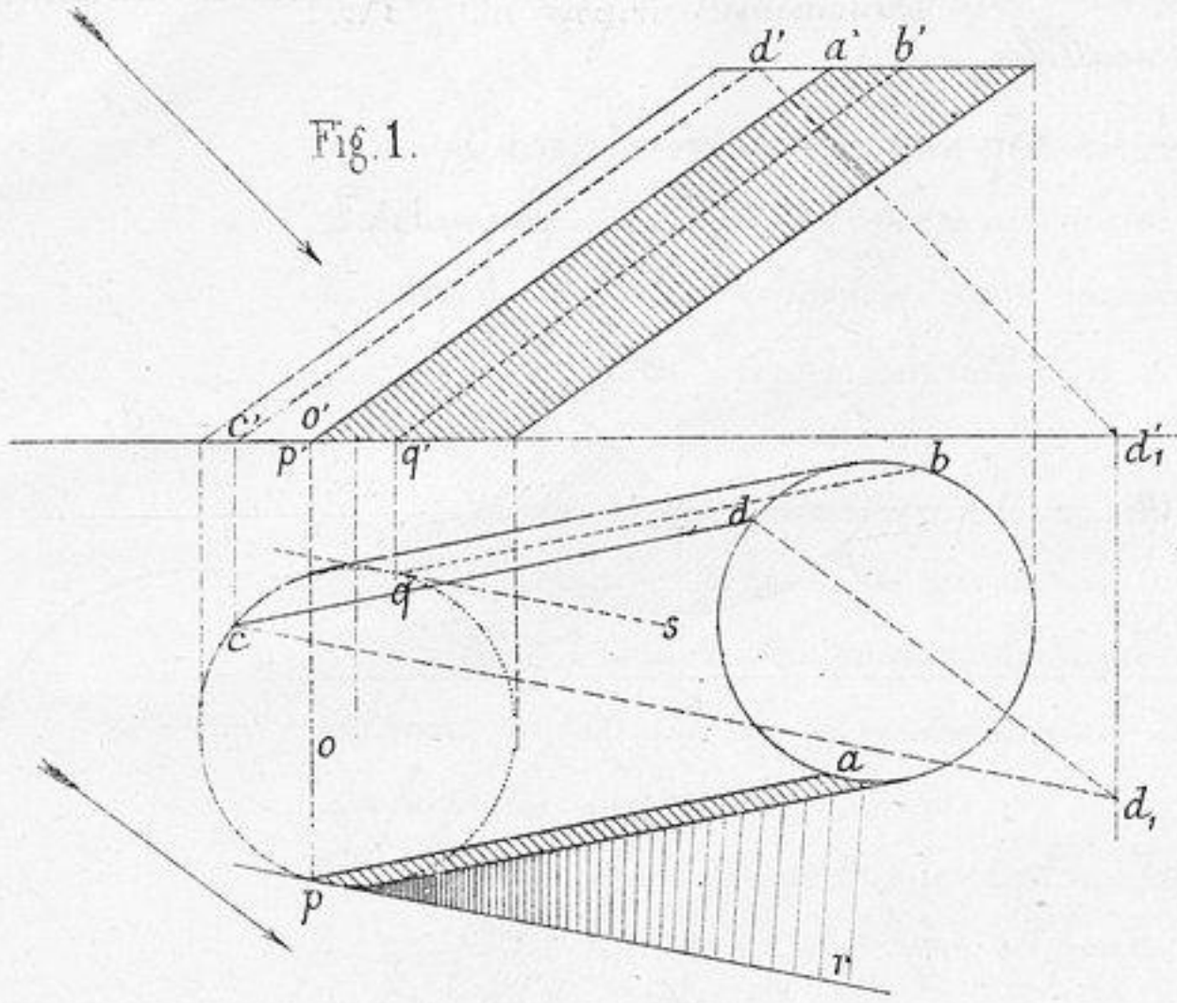
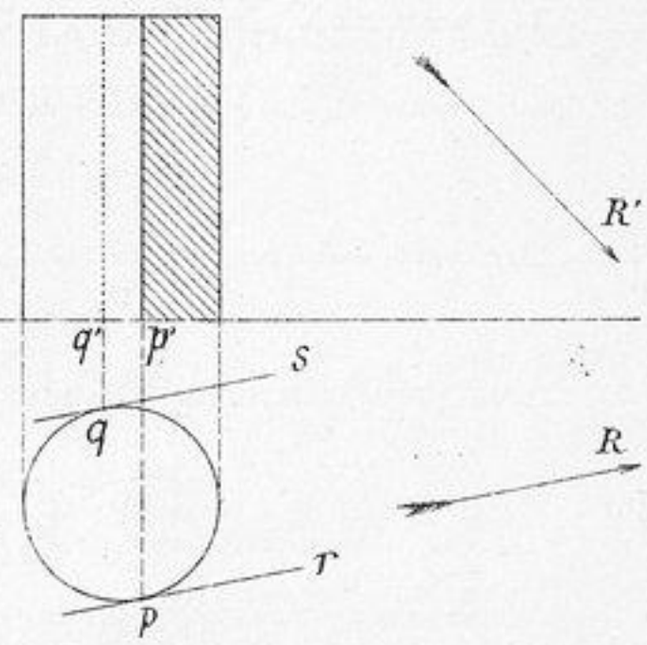


Fig. 2.



Ombre propre de la sphère.

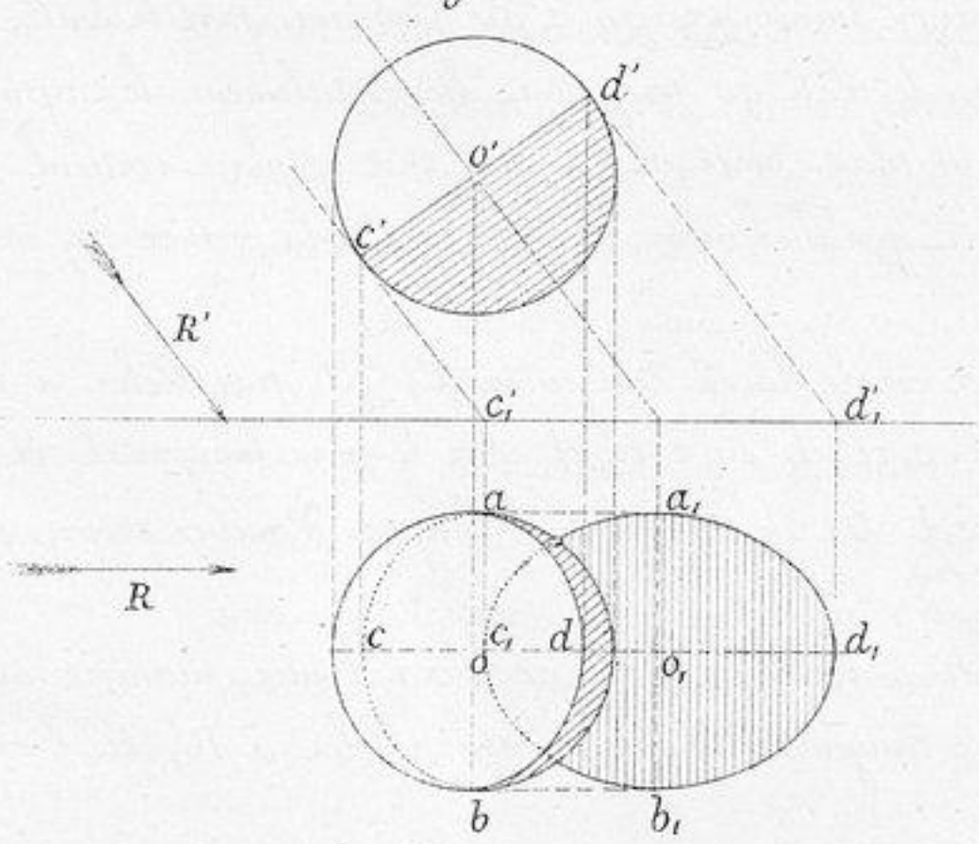
1° Considérons le cas simple où les rayons lumineux sont parallèles au plan vertical.

Soit OO', le centre de la sphère ; — RR' les projections du rayon lumineux.

On sait que la courbe de contact est un grand cercle perpendiculaire au rayon lumineux. — Ce sera donc le grand cercle dont le plan a pour trace verticale c'd'.

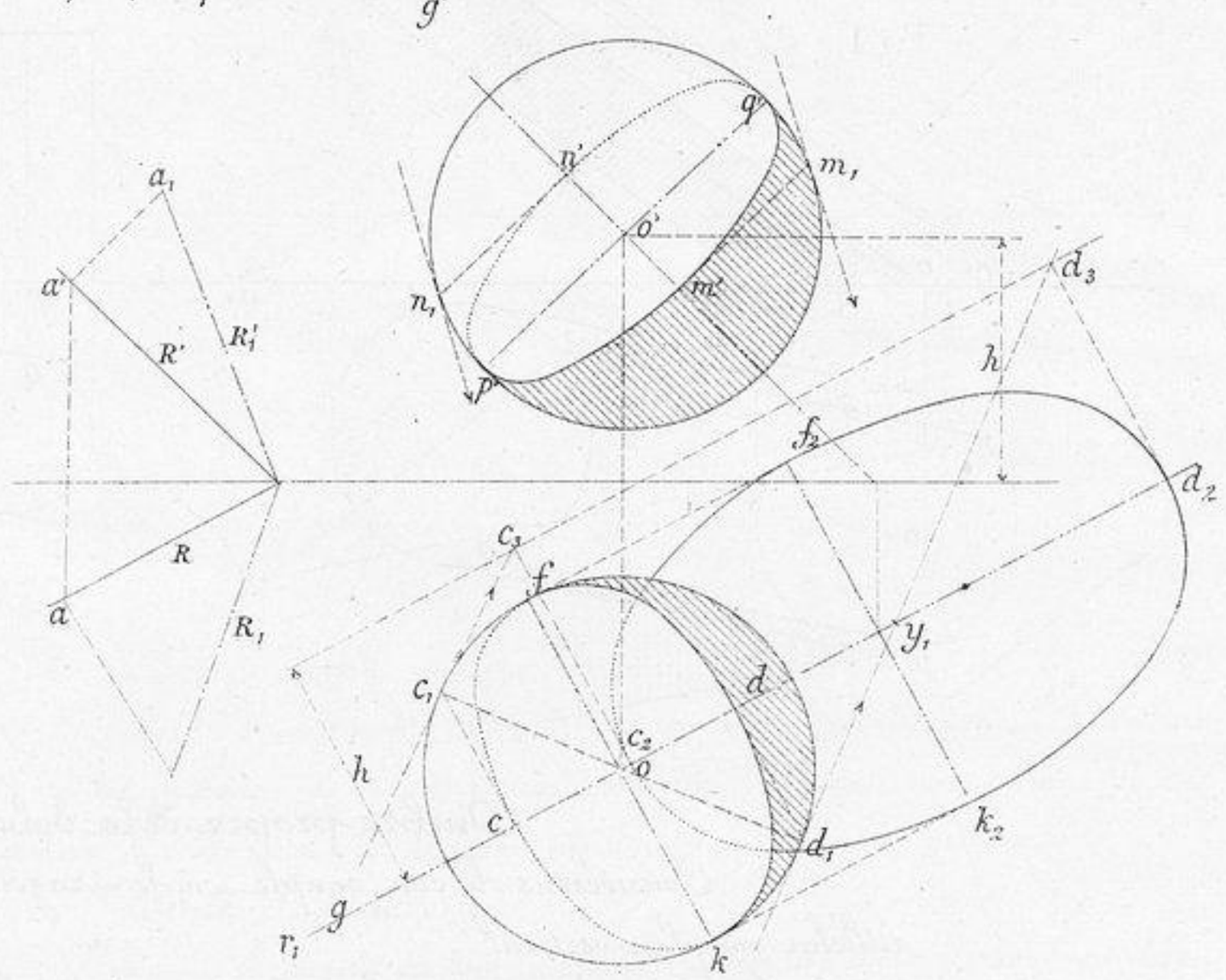
Le problème revient à déterminer la projection horizontale d'un cercle perpendiculaire au plan vertical et projeté verticalement en c'd'

On a en ab et cd les deux axes de l'ellipse projection horizontale. — Et en c_1d_1 — a_1b_1 les deux axes de l'Ellipse d'ombre portée par



la sphère sur le plan horizontal

2°. Considérons le cas général. – Les rayons lumineux étant quelconques, quoique parallèles. –



Soit o o' le centre de la sphère. – RR' un rayon lumineux rencontrant la ligne de terre. – R_1 son rabattement sur le plan horizontal – R'_1 son rabattement sur le plan vertical.

Menons le rayon lumineux go, – g'o' passant par le centre.

Si l'on prenait le plan go projetant horizontalement le rayon lumineux pour nouveau plan vertical $x_1 y_1$, sur ce plan vertical le rayon lumineux se projetterait parallèlement à R_1. – Et la sphère s'y projetterait suivant le cercle O.

Menons à ce cercle les 2 tangentes c_1, d_1 parallèles à R_1. – Ramenons les points c_1 et d_1 en c et d sur le plan horizontal et nous aurons en fK – et cd les deux axes de l'Ellipse d'ombre propre en projection horizontale.

Pour la projection verticale, on procèdera d'une manière analogue. – On mènera les deux tangentes m_1 et n_1 parallèles à R'_1 et l'on en

en m'n' — p'q' les deux axes de l'ellipse d'ombre en projection verticale. — on a en $c_2 f_2$ $d_2 K_2$, l'ombre portée sur le plan horizontal.

Application de ce qui précède à la 1ère Epure. (Voir le Programme). Un cylindre perpendiculaire au plan vertical, et reposant sur le plan horizontal est terminé par une demi-sphère c c'.

Un hyperboloïde de révolution a son axe parallèle au plan vertical et est tangent au cylindre:

Il est limité par deux plans de base perpendiculaires à l'axe et situés à égale distance du cercle de gorge.

On demande de trouver les ombres propres des surfaces, les ombres portées sur le plan horizontal et les ombres portées par les surfaces les unes sur les autres.

1° Ombres portées sur le plan horizontal par l'hyperboloïde.

On déterminera les deux ellipses, projections horizontales des cercles de base de la surface.

Par un changement de plan fait en M, on projettera l'hyperboloïde sur un plan perpendiculaire à son axe, et l'on prendra sur sa base 12 points équidistants 1. 2. 3. 4. ..... 11, 12, qui serviront de départ à 12 génératrices d'un même système.

Soit 2, 22, l'une d'elles, projetée verticalement en 2', 22', 32' et horizontalement en 2, 22, 32.

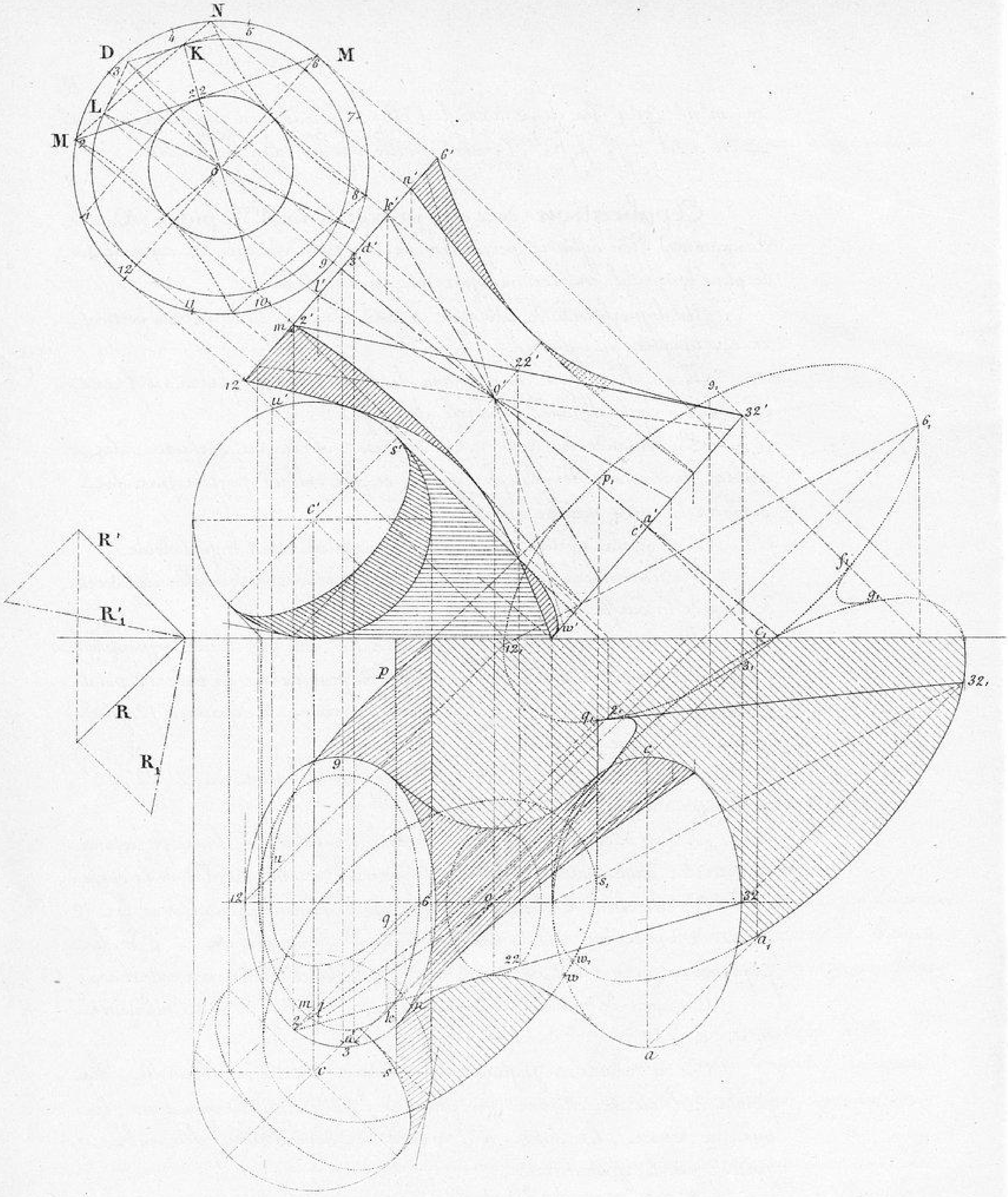
Si l'on détermine les 12 génératrices, l'enveloppe de leurs projections donnera les deux contours apparents (vertical et horizontal) de la surface.

On cherchera les ombres portées sur le plan horizontal par les 12 points de départ pris sur la base supérieure de l'hyperboloïde. — En les joignant on aura l'Ellipse $3_1, 6_1, 9_1, 12_1$ d'ombre portée par cette base.

On aura de même l'Ellipse d'ombre portée par la base inférieure en $a_1, c_1, 32_1$.

On en déduira en joignant deux à deux, et convenablement, les points de l'une des ellipses aux points de l'autre, qui correspondent, les uns au départ, les autres à l'arrivée des génératrices, les ombres portées par les génératrices.

Soit $2_1 . 32_1$ l'ombre de la génératrice 2.32.


N
D
K
M
L
M
R'
R'$_1$
R
R$_1$

L'ombre portée par l'hyperboloïde sera l'enveloppe de ces ombres portées par l'hyperboloïde. — Ce sera une hyperbole (f_1 g_1). — (Cela aurait pu être une Ellipse.)

2° Ombre propre.

On prendra, par terre, le point de tangence (2,) de l'hyperbole enveloppe et d'une génératrice d'ombre portée. On remontera de ce point, au point de l'espace sur la génératrice correspondante par un rayon lumineux inverse, et l'on aura en 2, 2' un point de l'ombre propre de l'hyperboloïde.

(Sur le croquis c'est par hasard que le point d'ombre propre situé sur la génératrice 2 - 32, se trouve au départ de cette génératrice sur la base supérieure).

Nature géométrique de la courbe d'ombre propre.

On sait que sur une surface du 2° la courbe de contact d'un cylindre circonscrit est la section diamétrale conjuguée de la direction des génératrices du cylindre.

On sait de plus qu'un hyperboloïde et son cône asymptote ont pour une même direction les mêmes plans diamétraux conjugués.

Par conséquent, si l'on détermine les deux génératrices d'ombre propre du cône asymptote, et si l'on prolonge le plan de ces deux génératrices, jusqu'à ce qu'il coupe l'hyperboloïde, il donnera comme section la ligne d'ombre propre de cette surface.

Si le cône a une ombre propre, l'ombre propre de l'hyperboloïde sera une hyperbole ayant pour asymptotes les deux génératrices d'ombre propre du cône.

Si le cône n'a pas d'ombre propre, la séparatrice de l'hyperboloïde sera une ellipse.

Pour distinguer ces deux cas, par le sommet O O' du cône asymptote, c'est-à-dire par le centre de la surface, menons un rayon lumineux.

Il perce en d d' le plan de la base supérieure de l'hyperboloïde. — Ce point d est ramené en D sur la projection M. De ce point on peut mener deux tangentes DK, DM à la base du cône asymptote. ——

Ce cône a donc une ombre propre. Les génératrices d'ombre propre du cône sont, sur la projection M, — OK et OL, ramenées en O'K' et O'L' en projection verticale, et en OK, Ol en projection horizontale.

Ces droites sont les asymptotes de l'hyperbole d'ombre propre de l'hyperboloïde.

Puisque le plan de ces lignes d'ombre du cône, prolongé, donnera comme section la séparatrice de la surface, si l'on mène la ligne IK jusqu'à sa rencontre en M et N avec la base de l'hyperboloïde, on aura en M et N, ramenées en m m' et n n', les points de la séparatrice situés sur la base supérieure.

On aura de même les points situés sur la base inférieure. D'ailleurs l'hyperbole est déterminée par ses asymptotes et un point, ce qui suffit.

L'ombre portée de la surface sur le plan horizontal sera l'ombre portée par l'hyperbole précédente. Les asymptotes de l'ombre portée seront les ombres portées par les asymptotes de l'espace, — ce seront par suite les deux lignes droites d'ombre portées sur le plan horizontal par le cône asymptote.

Remarque. — Si le point D (projection M) était tombé dans l'intérieur du cercle de base du cône asymptote, ce dernier n'aurait pas d'ombre propre et la séparatrice de l'hyperboloïde eût été une Ellipse. — On reconnaîtra facilement, dans ce cas, que cette séparatrice elliptique répondrait à des rayons lumineux qui éclaireraient l'intérieur de la surface et non pas son extérieur comme dans le cas du croquis ci-joint.

4°. Ombre propre du Cylindre.

On mènera à sa base sur le plan vertical des tangentes parallèles à la projection verticale R' du rayon lumineux. — On en déduira la ligne d'ombre propre pq', et la ligne d'ombre portée par terre, $p_1 q_1$.

5°. Ombre propre de la Sphère.

On la déterminera comme l'on sait en menant aux cercles qui en sont les projections, des tangentes parallèles aux rayons lumineux rabattus sur les plans de projection R_1 et R'_1, ce qui donnera directement les

axes des ellipses d'ombre propre.

On en déduira l'ellipse d'ombre portée par la sphère sur le plan horizontal. — Cette ellipse doit se raccorder en S_1 avec la ligne $p_1 q_1$ d'ombre portée du cylindre.

6°. Ombre portée par l'hyperboloïde sur le cylindre, et par le cylindre sur l'hyperboloïde.

On reconnaît à l'inspection des ombres portées par terre que l'ombre du cylindre vient empiéter sur l'ombre de l'hyperboloïde. —

On voit même que dans le cas actuel, c'est seulement l'ellipse d'ombre portée par la base supérieure de l'hyperboloïde qui empiète sur l'ombre du cylindre.

Ce sera donc le cercle de base supérieur qui portera ombre sur le cylindre.

On déterminera par points cette ombre : — par exemple le point 12 – 12' porte ombre en 11 , $11'$, obtenu en remontant de l'ombre par terre à l'ombre dans l'espace.

Les points de perte se trouvent, par terre en p_1 et q_1 aux rencontres des limites des deux ombres. — On les relève par un rayon lumineux inverse en p et q.

La tangente en ces points est le rayon lumineux.

Enfin, le cylindre ou bien la sphère portent ombre sur l'hyperboloïde.

On obtient en W , W' un point de cette ombre. — Il serait facile d'en avoir d'autres en prenant, par terre, les intersections des ombres portées par les génératrices de l'hyperboloïde, avec la ligne d'ombre portée W, S, q_1 du cylindre ou de la sphère et remontant des points par terre aux points de l'espace, à l'aide de rayons lumineux inverses.

Ombres portées qui se rencontrent le plus souvent dans le Dessin de Machines ou d'Architecture.

(Rayon lumineux à 45°)

Nous désignerons par la lettre φ l'angle formé par le rayon lumineux rabattu sur le plan vertical et par la ligne de terre. (fig. 1)

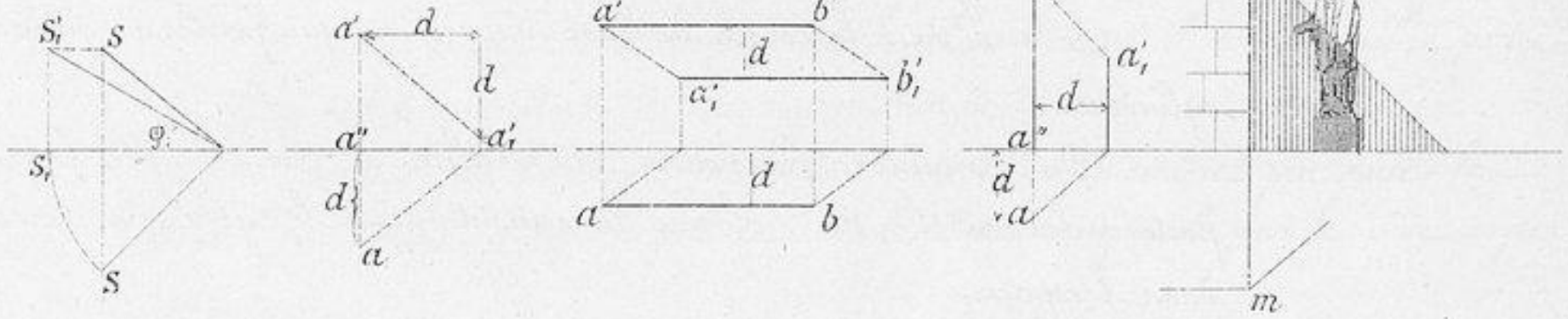
18. **Ombres portées sur le plan vertical ou sur des plans parallèles.**

1° **Ombre d'un point a a'.** — L'ombre est en a'_1, et l'on remarque que ce point est au-dessous et à droite du point a', d'une quantité égale à la saillie du point qui porte ombre.

2° **Une droite ab a'b' parallèle à la ligne de terre.** — Son ombre est $a'_1 b'_1$, égale, parallèle à la droite, et située au-dessous, à une distance d égale à la saillie.

3° **Une droite verticale a a'' a'.** — Son ombre se trouve à droite, et à une distance d égale à la saillie, d.

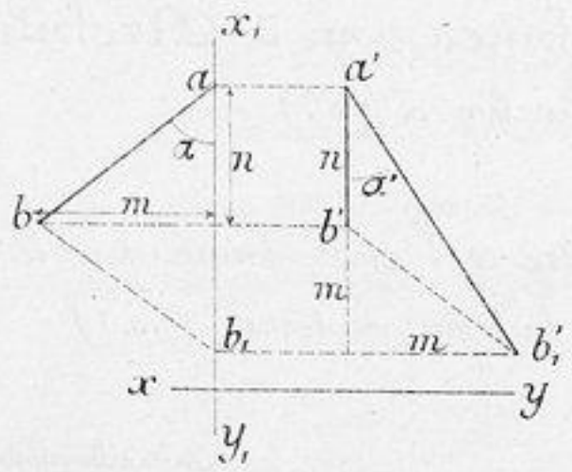
Fig. 1

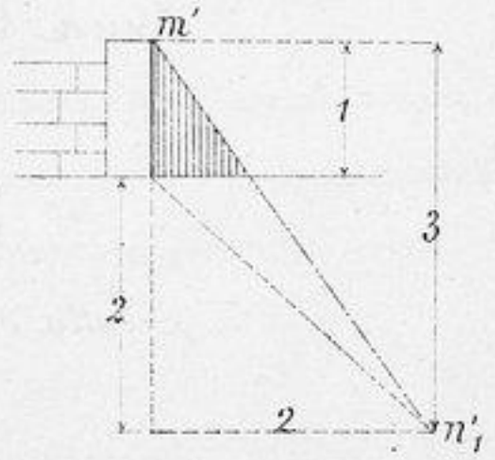


4° **Une droite m m'**, perpendiculaire au plan vertical (ou debout) — Son ombre est une ligne à 45°, non seulement si l'ombre est portée sur le plan vertical, mais si elle l'est sur un objet quelconque.

5° **Une droite située dans un plan de profil.** — Soit ab, a'b' la droite ; a' sa trace verticale ; — b' porte ombre en b'_1 — l'ombre portée est la droite $a' b'_1$.

On voit que si l'angle α que la droite fait avec le plan vertical a pour tangente $\frac{m}{n}$, l'ombre $a' b'_1$ fait avec a'b' un angle α' dont la tangente est $\frac{m}{m+n}$.





Une ligne à 45°, inclinée à $\frac{1}{1}$ aura son ombre inclinée à 2 de hauteur pour 1 de base.

En architecture, les escaliers sont ordinairement inclinés à 2 de base pour un de hauteur. L'ombre portée par une rampe m' n' située dans un plan de profil sera une droite m' n'_1, inclinée à 2 de base pour 3 de hauteur.

Ombre portée par un cercle sur le plan vertical.

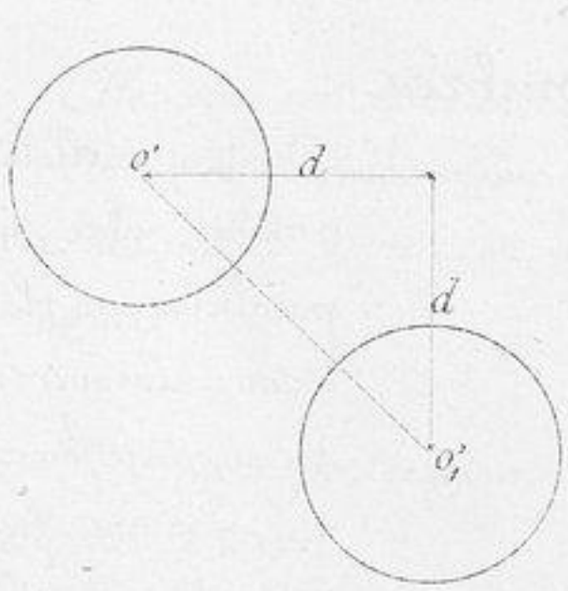
1° Cercle de front. — Il porte ombre en vraie grandeur. — La saillie de son centre fait connaître en o'_1 l'ombre de ce centre. — On trace de o'_1 comme centre, le cercle d'ombre égal au cercle donné.

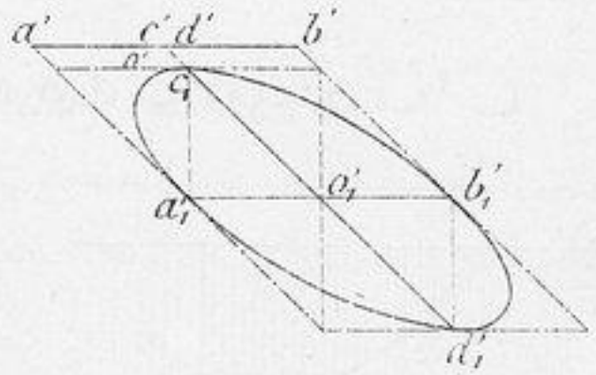
2° Cercle de niveau. — L'ombre est une ellipse. — 2 diamètres à angle droit du cercle donneront, comme ombre, 2 diamètres conjugués de l'ellipse.

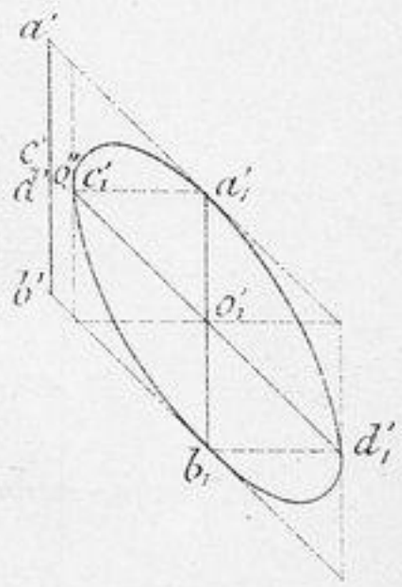
Le centre o' porte ombre en o'_1, point connu si l'on donne la saillie du centre. — Le diamètre de front a'b', porte ombre en vraie grandeur, suivant a'_1 b'_1. — Le diamètre debout, c'd' portera ombre à 45° en c'_1 d'_1. — On obtiendra c'_1 en remontant et reportant à gauche le point b'_1 d'une quantité égale à un rayon. — Le point d_1 s'obtiendra en descendant de même le point a'_1.

On remarquera la forme du parallélogramme circonscrit; un de ses côtés est horizontal et égal au diamètre; l'une de ses diagonales est verticale et égale en longueur à ce côté.

3° Cercle de Profil. — Construction analogue. — Le parallélogramme circonscrit est le même que tout à l'heure, mais autrement orienté.







Architecture. — Ombre portée par une arcade de profil et par la même arcade en coupe. (fig. 1 & 2).

On tracera deux fois l'ombre précédente. — L'épure se comprend facilement. Remarquer le point de brisure h, intersection des 2 ellipses.

Si l'arcade est coupée par un plan de front mené par son axe, l'ombre (fig. 2) se composera des moitiés des 2 ellipses, réunies par l'horizontale c'_1 c''_1, ombre portée par la ligne de coupe c' c'' faite sur la clef de l'arcade. — De plus, dans l'intrados, nous aurons un fragment d'ellipse, ombre portée par un des cercles de base de l'arcade sur cet intrados (Voir plus loin, Ombre du Pont.)

Fig. 1

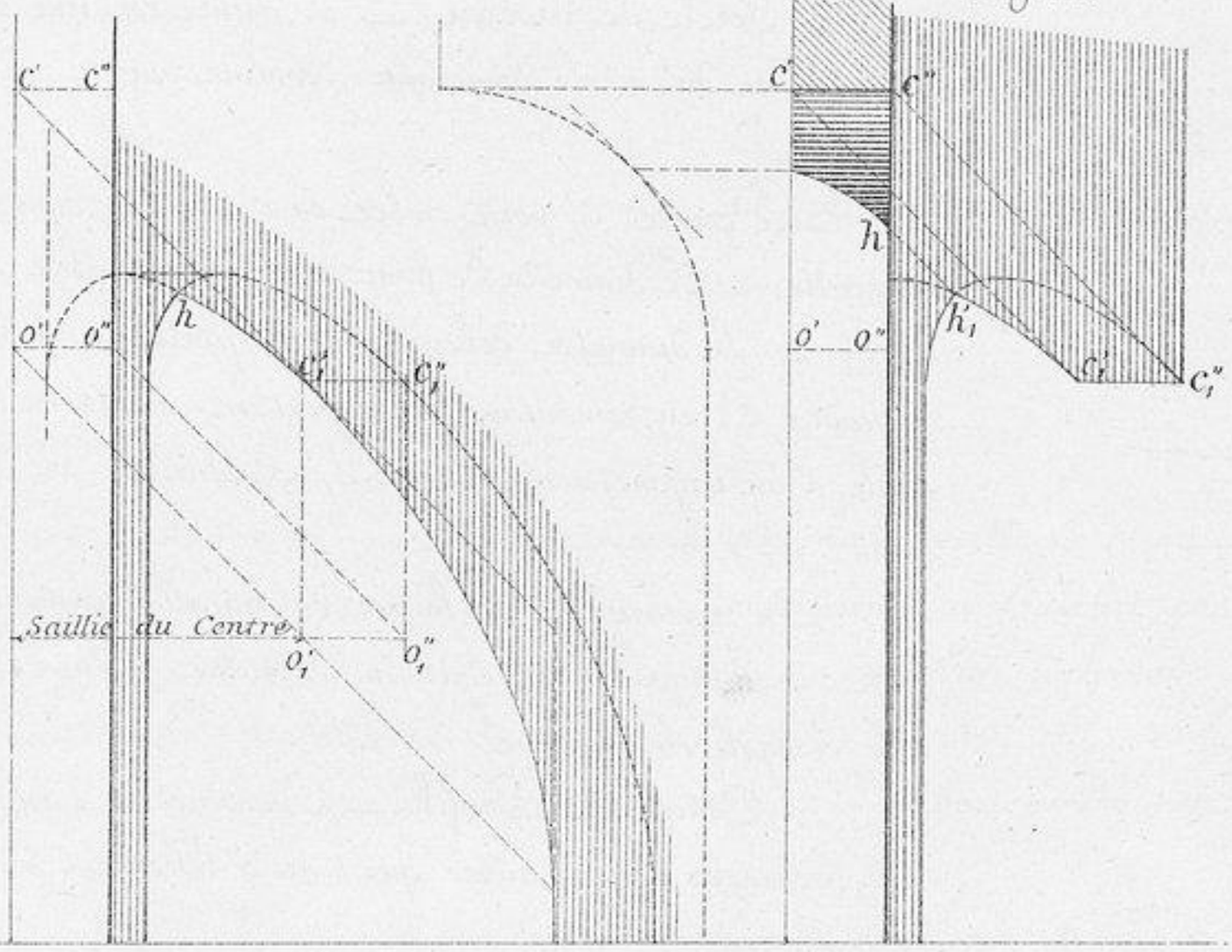
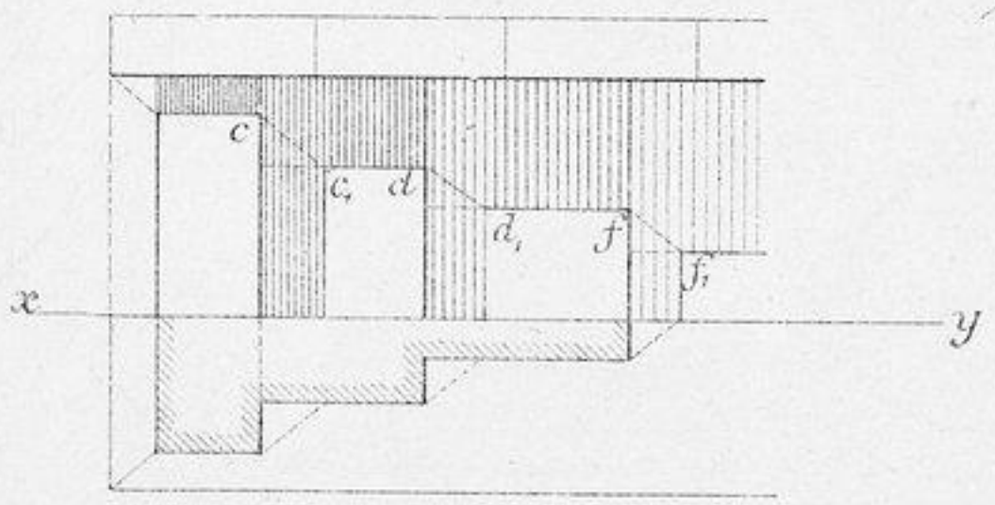


Fig. 2.

Ressaux des ombres :



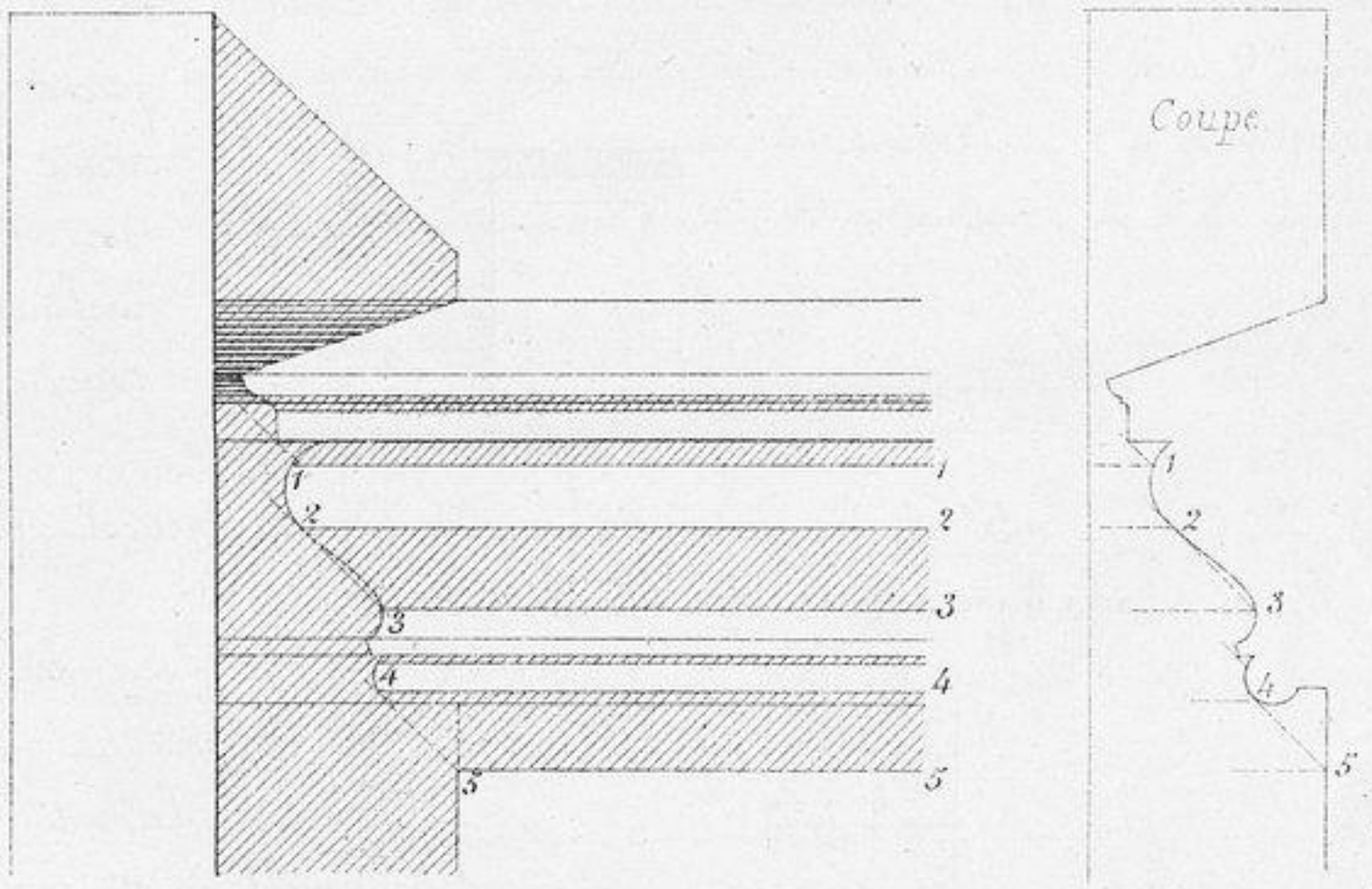
1° Droite parallèle à la ligne de terre, portant ombre sur une série de plans parallèles au plan vertical — (Architecture — Larmier portant ombre sur des murs de front).

On voit facilement que l'ombre ressaute ou se décroche, en

reproduisant les saillies successives des murs, c'est-à-dire le profil de ces murs pris en projection horizontale.

2°. **Architecture.** — Ombre d'un larmier de front, sur des moulures à génératrices verticales, ou bien: Ombre portée par l'arête verticale d'un mur ou d'un bandeau, sur des moulures parallèles à la ligne de terre.

La ligne d'ombre reproduit, en sens inverse, le profil même de la moulure. — On peut donc, sans se servir d'un plan ni d'une coupe, et si l'on connaît non-seulement le profil de la moulure, mais encore, comme point de départ, le reculement d'une seule génératrice, tracer la ligne d'ombre.

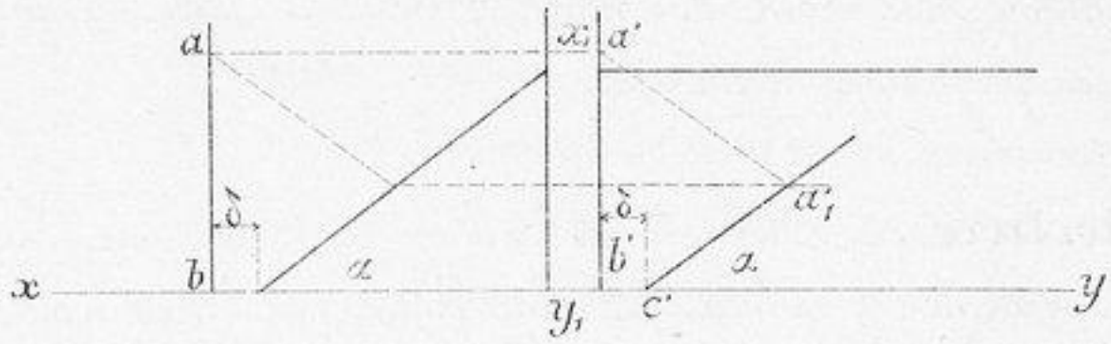


Elle sera virtuelle en certains points.

On s'en servira même, comme on aurait fait de la coupe, pour trouver les ombres propres et les ombres portées par la moulure sur elle-même.

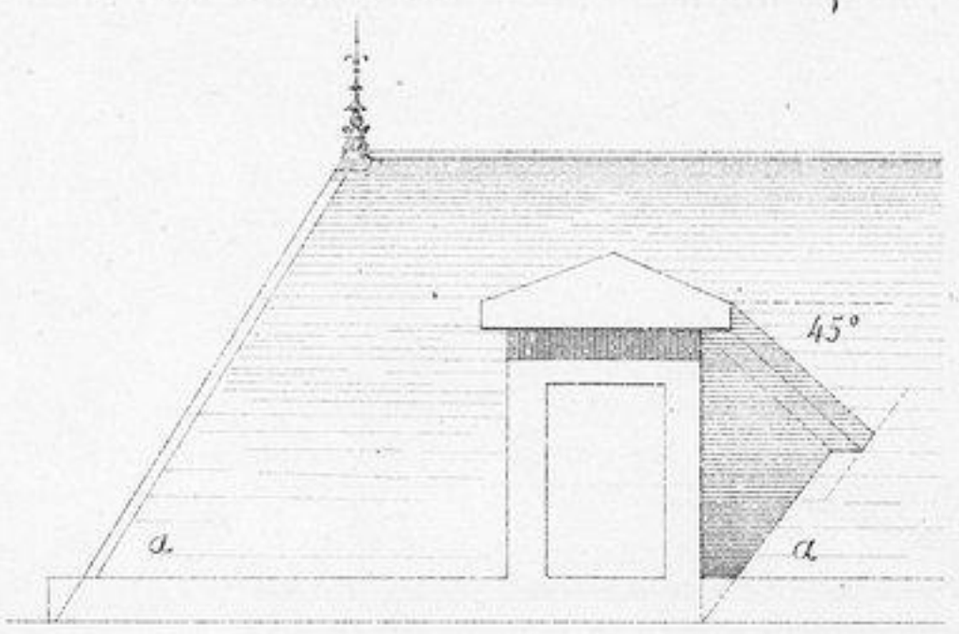
3°. Ombre portée par une droite verticale sur un plan parallèle à la ligne de terre.

C'est un cas particulier du problème précédent.



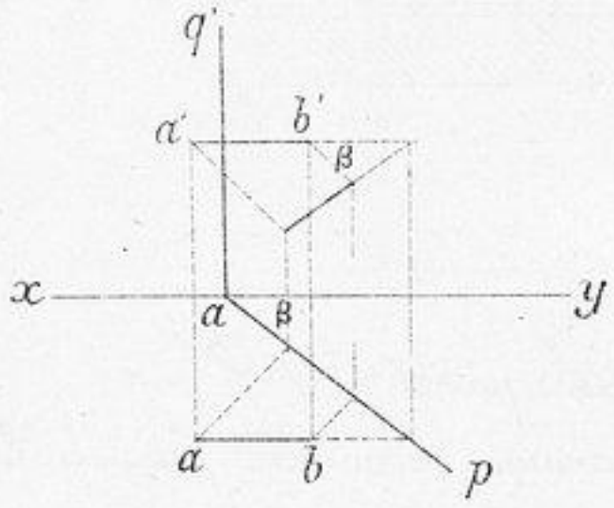
L'ombre est une droite c'a', inclinée sur l'horizontale du même angle que le plan fait avec le plan horizontal, et commençant en c' à une distance b'c' du pied de la droite, égale à la saillie de ce pied en avant de la trace horizontale du plan.

4°. Architecture. — Ombre portée sur un toit parallèle à la ligne de terre, par une lucarne ou une cheminée. —



On utilisera la remarque précédente. — Toutes les arêtes verticales donneront des ombres qui seront inclinées à la pente du toit

5°. Ombre portée sur un plan fuyant, vertical, par une droite parallèle à la ligne de terre.



Soient p α, α q' les traces du plan, — ab, a'b' la droite. —

L'ombre sera la droite a', b', inclinée sur l'horizontale, de l'angle β que le plan fait avec le plan vertical.

Si le plan est incliné à 45° sur le plan vertical, l'ombre sera inclinée à 45° sur la ligne de terre.

Plan fuyant à 45°.

Cas particulier remarquable de l'ombre portée par un cercle de niveau sur un plan fuyant vertical, incliné à 45°.

Soit a b c d — a' b' c' d' , le cercle de niveau. — Soit p & q' les traces du plan fuyant à 45°. — Le centre o porte ombre en o, o'_1, et les 2 diamètres ab — cd, à angle droit dans le cercle, portent ombre suivant les 2 lignes à 45° $a'_1 b'_1$ — $c'_1 d'_1$. — On voit que ces deux dernières lignes sont, non seulement à angle droit, mais égales ; l'ellipse d'ombre est donc projetée verticalement suivant un cercle. (fig. 1).

Si le plan fuyant passe par le centre (fig. 2), l'ombre portée se trace très-facilement en projection verticale. — On mène les lignes à 45° dans les deux sens, $a' a'_1$ et $o' a'_1$. — On a en $o' a'_1$ le rayon du cercle d'ombre.

La portion de l'ombre marquée en trait plein correspond à la moitié du cercle située en avant du plan fuyant.

Ce plan fuyant sera d'un usage fréquent, — on s'en servira toutes les fois que l'on désirera sur une élévation, connaître les lignes d'ombre, sans avoir à se servir de la projection horizontale. — En architecture, où les plans et les élévations ne sont faits, ordinairement, ni à la même

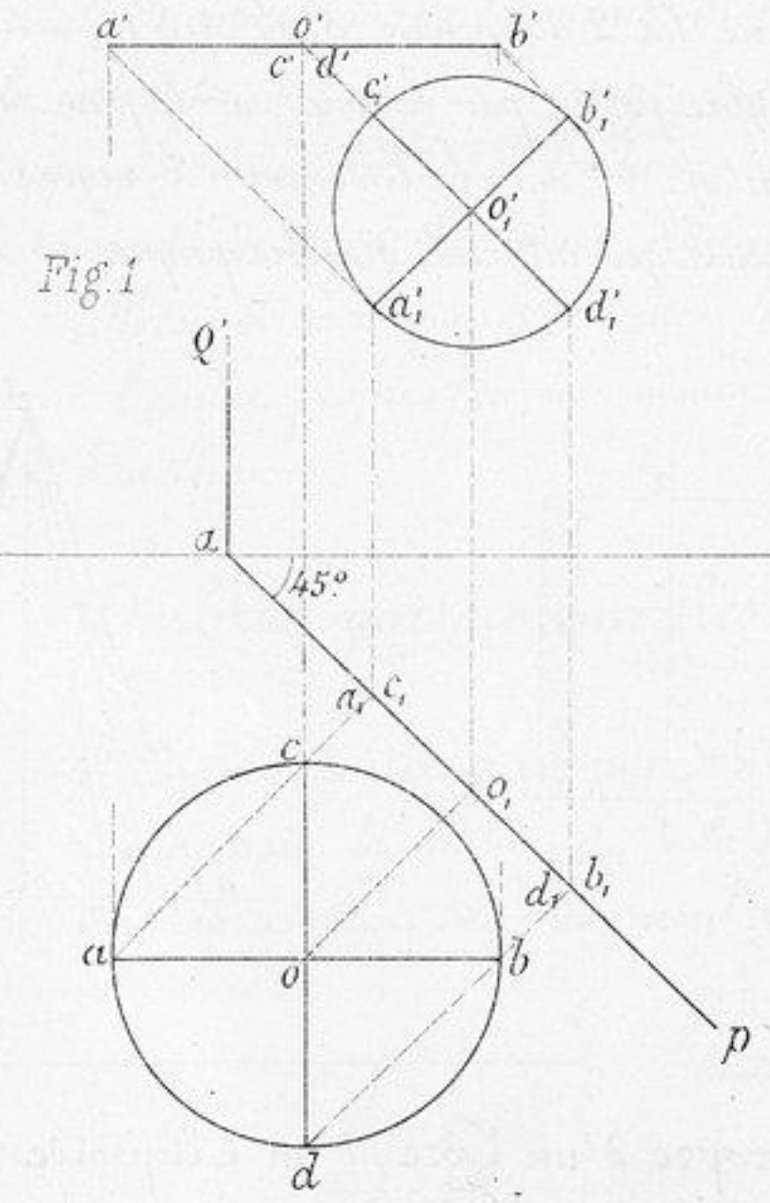


Fig. 1

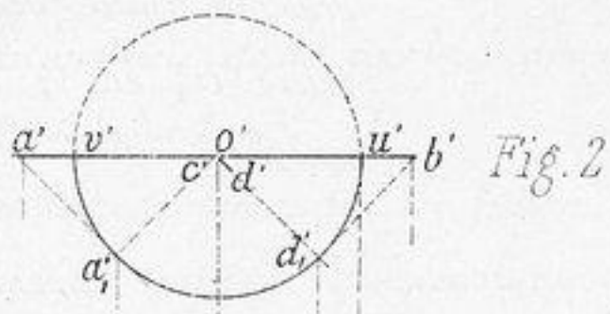
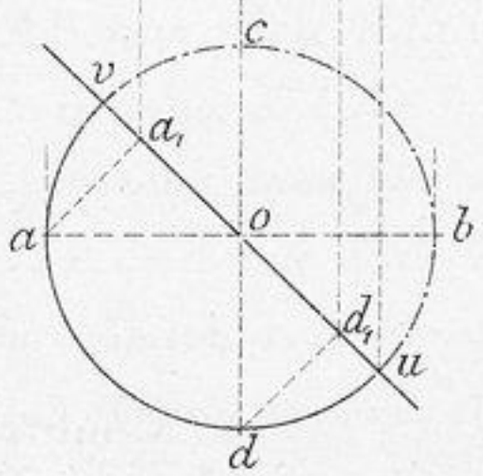


Fig. 2



échelle, ni sur la même feuille, il est avantageux de savoir faire le tracé

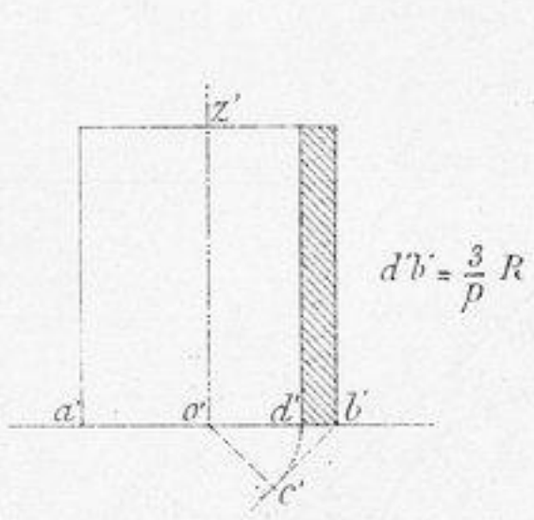
des ombres directement sur l'élévation. — On a pu voir, d'ailleurs, que jusqu'à présent, tous les tracés indiqués permettent de se passer de la projection horizontale.

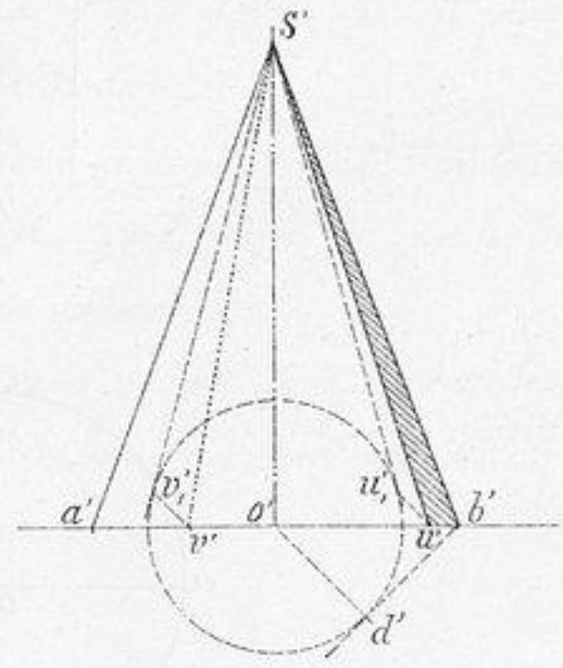
Ombres propres des surfaces de révolution.

1° **Cylindres.** — On le déterminera soit, en se servant de l'Echelle n°1,(+) soit en remarquant que $od' = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, menant les deux lignes à 45°, $o'c'$ et $b'c'$ et rabattant le point c' en d'. — L'emploi d'un plan fuyant à 45° aurait conduit au même tracé.

Enfin, on peut approximativement prendre $d'b' = \frac{3}{10} R$.

2° **Cônes.** — Soit le cône $s'a'b'$ à angle quelconque. — On se servira du plan fuyant à 45°; passant par l'axe du cône. — On cherchera, sur ce plan, l'ombre portée par le cône. — Le sommet S' est à lui-même son ombre portée. — La base $a'b'$ porte ombre suivant le cercle $o'd'$, obtenu comme ci-dessus. — On mène les 2 tangentes $S'u'_1$ — $S'V'_1$. Elles forment, à elles deux la limite de l'ombre portée par le cône sur le plan auxiliaire. — On relève u'_1 et V'_1 en u' et V' sur la base, par 2 rayons à 45°, et l'on obtient en $S'u'$, $S'V'$ les deux génératrices d'ombre propre.





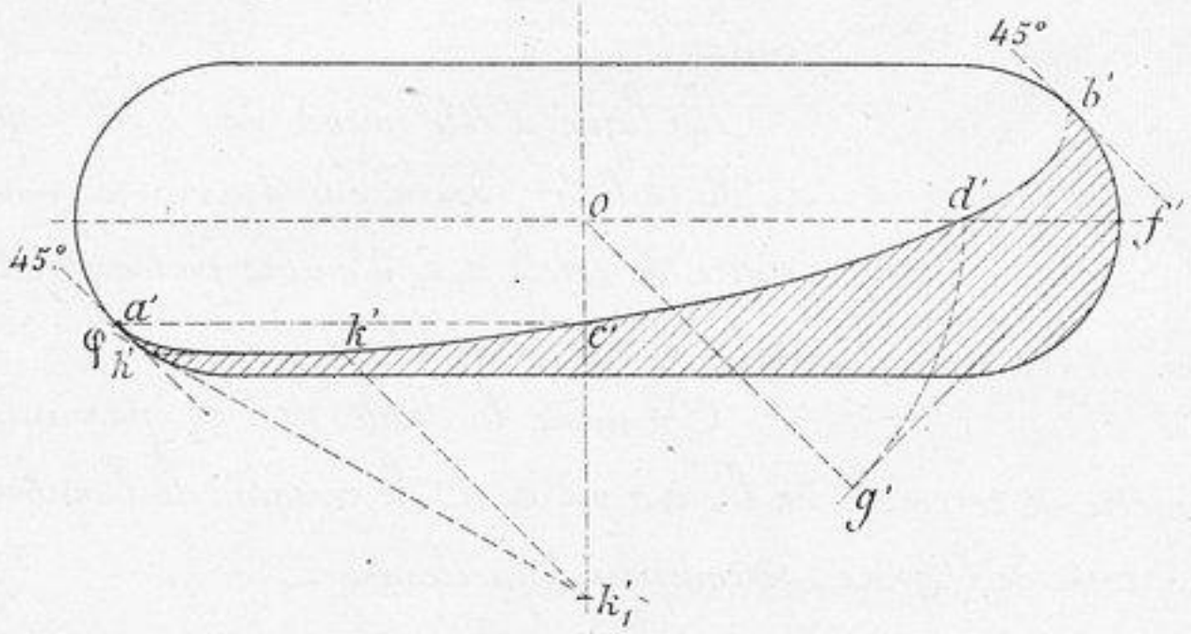
3° **Ombre propre d'un Tore, d'un Ellipsoïde, d'une Sphère, etc.**

Les points sur le contour apparent s'obtiennent en a' et b', par les tangentes à 45°. — Par raison de symétrie, le point c' projeté sur l'axe

(+) Voir plus loin les échelles de teintes — Théorie du lavis.

s'obtiendra en menant l'horizontale a'c'. — Le point d' sur l'équateur s'obtiendra, soit à l'aide de l'échelle N°1', soit à l'aide du cercle o'g'd', construit comme on vient de le voir pour les cylindres.

Le point le plus bas K' se trouvera en menant au méridien principal la tangente h'K'$_1$, à l'angle φ, puis faisant tourner le point h' d'un angle de 45° autour de l'axe de la surface. — Dans ce mouvement le point K'$_1$ situé sur l'axe, ne changera pas. — Le point h' se déplacera horizontalement. —



Le rayon φ redeviendra rayon à 45°, ce qui donnera le point le plus bas K'.

On a de cette manière 5 points rapidement obtenus et les tangentes en 3 de ces points, ce qui suffit largement dans la pratique.

L'ombre du même tore vu en coupe s'obtiendrait de la même manière, seulement elle se compliquerait de la recherche du point de passage. Dans la pratique on n'obtient ce point qu'approximativement en se fondant sur la propriété de la courbe d'ombre, d'y être tangente au rayon lumineux. (Sera expliqué plus loin).

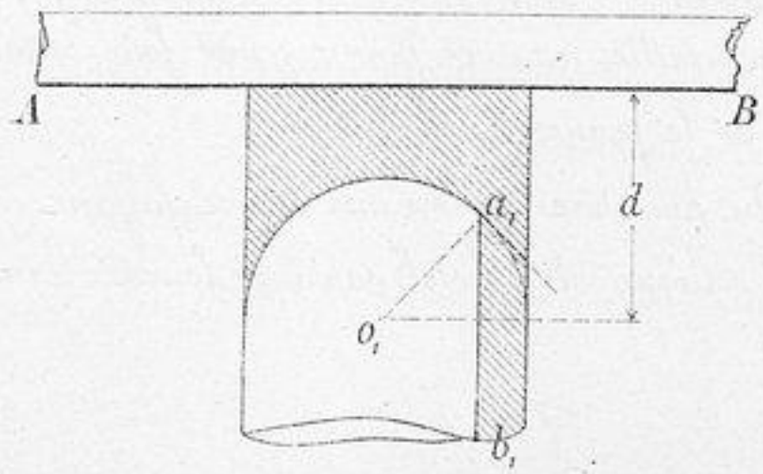
Il est évident que sur toutes les autres surfaces de révolution, on tracera l'ombre propre par les mêmes procédés rapides que ceux que l'on vient d'indiquer.

Ombres portées sur les Cylindres en relief.

1° Ombre portée par une droite AB parallèle à la ligne de terre.

On connaît la saillie, d, de la droite en avant de l'axe du cylindre.

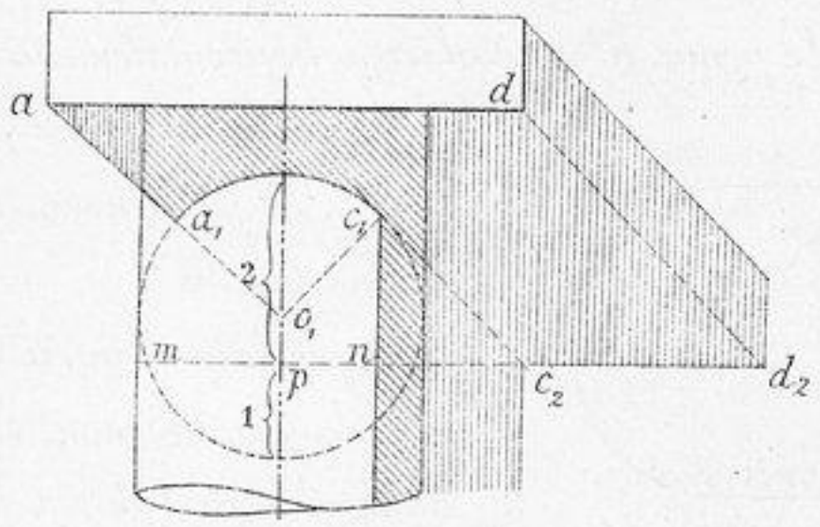
Le ressaut des ombres sur les moulures verticales nous fait voir que l'ombre portée est un cercle égal au cercle de base du cylindre, et décrit d'un point o_1 comme centre; ce point o_1 étant situé sur l'axe du cylindre et à une distance au-dessous de la droite qui porte ombre,



égale à la saillie connue.

Cette ombre n'est utile que jusqu'au point a, de tangence à 45°.

2° Architecture. — Ombre du Tailloir d'une colonne engagée au tiers de son diamètre.



Le Tailloir étant carré, déborde la colonne autant à droite et à gauche qu'en avant.

La ligne à 45° menée de l'arête de gauche, a, du tailloir, donne sur l'axe, le point o_1 centre du cercle a_1 c_1 d'ombre portée par l'arête a d, supposée indéfinie.

On mène la droite m n c_2 passant en p, au tiers du diamètre de ce cercle et l'on a en c_2 d_2 le ressaut de l'ombre sur le mur. — Le reste de l'épure se comprend facilement.

3° Ombre du Listel (Colonne engagée à moitié de son diamètre).

Un listel est un cylindre de petite hauteur couronnant un autre cylindre ayant même axe que lui. — On les supposera tous deux engagés dans un mur et à moitié de leur diamètre.

Cette ombre se présente souvent dans le dessin de Machines et d'Architecture. On se contentera de trouver le point le plus haut et le point de perte dans l'ombre propre du cylindre.

Le point le plus haut b_1 est, par raison de symétrie, dans le méridien à 45° parallèle au rayon lumineux. — On ramène, par rotation, la section faite par ce plan méridien, à être parallèle au plan vertical.

Le rayon lumineux se projette alors, à l'angle φ. — On mène le rayon φ passant par a; il perce le cylindre en a_1 qu'il faut ramener en place par une rotation inverse. — a_1 ne quitte par l'horizontale a_1 b_1; le rayon φ passe par l'axe du cylindre en g et ne quitte pas ce point; une fois ramené, il redevient à 45°, ce qui donne en b_1 le point le plus haut.

Point de perte f_1'. — On considère le plan auxiliaire suivant à 45°, et passant par l'axe. — Il coupe la colonne et le listel suivant leurs lignes d'ombre propres. — Facile à déterminer.

Fig. 1.

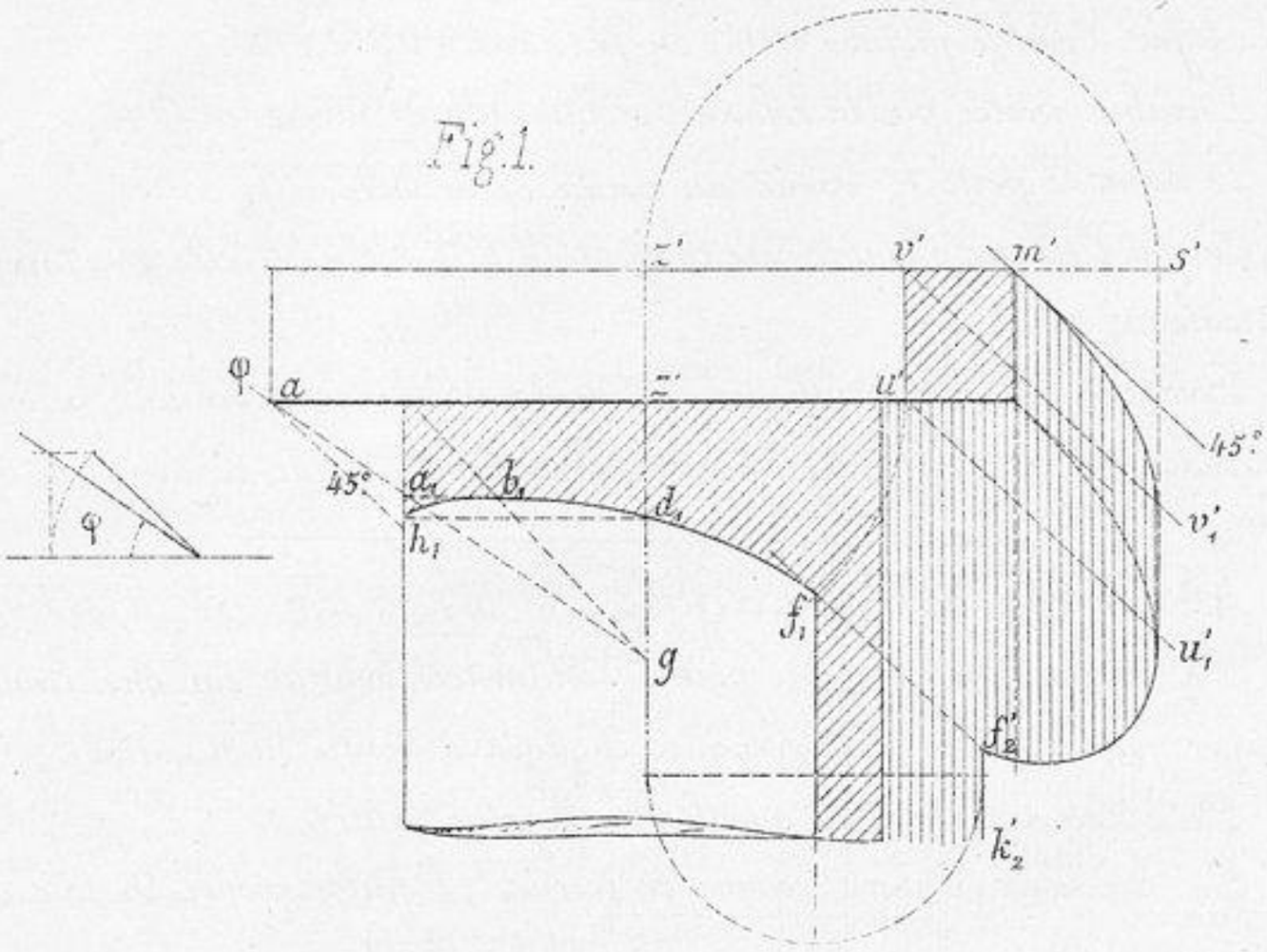
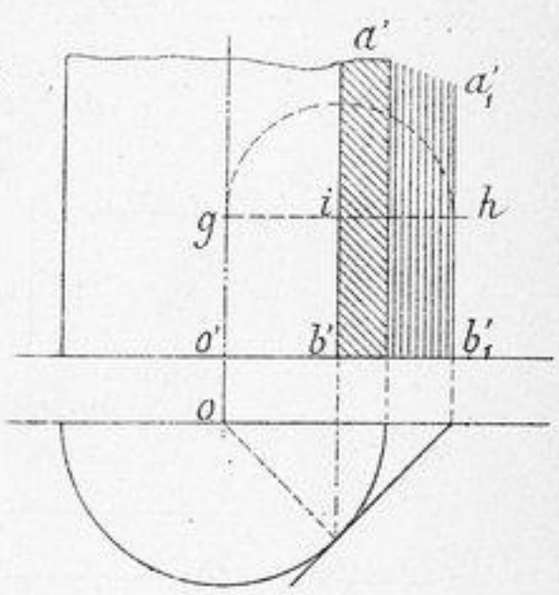


Fig. 2



Sur ce plan fuyant le cercle de base du Listel porte ombre suivant le cercle z'u', passant par le point u' d'ombre propre du Listel.

Ce cercle coupe en f'_1 l'ombre propre de la colonne et donne le point de perte.

On sait qu'en ce point de perte f'_1, la tangente à la courbe d'ombre portée, est le rayon lumineux.

Ayant le point de perte f'_1 et le point le plus haut, ainsi que les tangentes en ces points, on pourra tracer la courbe de b_1 en f'_1. — On prendra le point d_1 où elle coupe l'axe. — Par raison de symétrie le point h_1 situé sur le contour apparent est au même niveau que le point d_1 projeté sur l'axe. — La Tangente en h_1 est le contour apparent. — Le point h_1 doit tomber entre le pied du rayon φ et celui du rayon à 45° mené par a.

Ombre portée sur le mur. — On remarquera que lorsqu'un cylindre est engagé dans un mur, à moitié de son diamètre, l'ombre portée a', b'_1 (fig. 2) est à la même distance de la ligne d'ombre propre, que l'axe du cylindre. —

La distance ig portée en ih donnera donc rapidement la ligne d'ombre portée.

Cela posé, si l'on revient au listel, on obtiendra en u'_1 v'_1 l'ombre portée

par la ligne d'ombre propre $v'u'$, en prenant $v's' = v'z'$.

L'ombre portée par la colonne s'obtiendra de même en f'_2 k'_2.

Le point de perte f'_1 donne un point de brisure en f'_2.

En m' l'ellipse d'ombre est tangente à 45°. — En v'_1 elle est tangente à la verticale $v'_1 u'_1$.

Toutes ces données suffisent, dans la pratique du dessin, pour déterminer rapidement les ombres que nous cherchons.

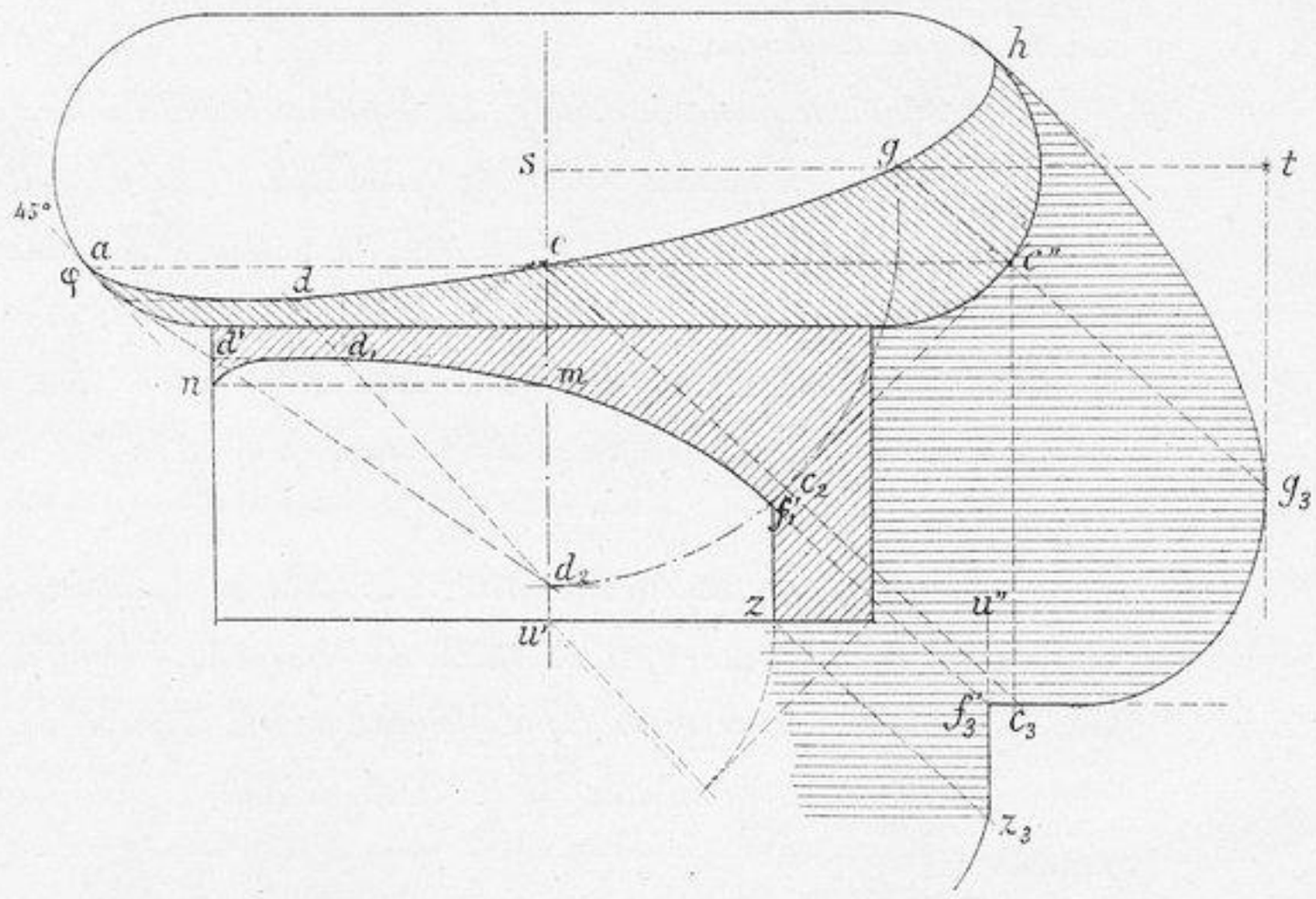
4°. Ombre de l'astragale.

On désigne ainsi l'ombre portée par un tore sur un cylindre vertical ayant même axe que lui. On les suppose, ici, engagés à moitié du diamètre.

On se servira du plan auxiliaire fuyant à 45°.

On cherchera, d'abord, comme ci-dessus, l'ombre propre du tore et celle du cylindre.

Le point le plus haut, d, sera dans le méridien de symétrie parallèle au rayon lumineux. — Par une rotation on l'amènera à se confondre avec le méridien principal. — On lui mènera la tangente à l'angle φ, $d'' d_2$. — On ramènera le point d'' en d, comme on a fait pour le listel.



Point de perte f'. — Pour l'obtenir, on cherchera en $d_2 f_1' c_2 g$ l'ombre portée par le tore, ou, ce qui revient au même, par la ligne d'ombre propre du tore sur le plan fuyant à 45°. — On l'obtiendra facilement ainsi. — Le point g, situé sur l'équateur, étant dans le plan fuyant, est à lui-même son ombre portée. (Tangente verticale).

Le point c, projeté sur l'axe, porte ombre en c_2 (Tangente à 45°.)

Le point le plus bas, d, porte ombre en d_2, sur l'axe. (Tangente horizontale)

Cette courbe auxiliaire se tracera donc facilement.

On prendra son intersection f', avec l'ombre propre du cylindre, et on aura le point de perte. (Tangente à 45°.)

Ayant d_1' et f_1', l'ombre s'achève comme pour le listel.

Ombre portée sur le mur. —

L'ombre portée commence au point h. La tangente est à 45°, car cette tangente serait le contour apparent du cylindre d'ombre de la ligne a.c.d.g.

Le point sur l'équateur, g, porte ombre en g_3, obtenu en prenant $sg = gt$. — La tangente est verticale, car au point g, le plan tangent au tore est un plan vertical.

Le point C situé sur l'axe, en projection, porte ombre en c_3 — Comme la saillie du point C est égale à cc", le point c_3 est sur la verticale $c'' e_3$.

En ce point c_3, la tangente est horizontale, car le plan tangent au tore, en c, est parallèle à la ligne de terre.

$f' z'$, ombre propre du cylindre, porte ombre en $f_3' z_3$, obtenu comme ci-dessus, en prenant $z u' = z u''$. — Enfin le point de perte f_1' porte ombre au point de brisure f_3'.

Ombres portées sur les Cylindres en creux.

Ombre du Pont. — On désigne ainsi l'ombre portée dans un cylindre creux, par son cercle de base. — On sait que cette courbe est plane et par suite, elliptique. Deux diamètres à angle droit du cercle de base, donneront 2 diamètres conjugués de l'ellipse d'ombre.

Le point a' porte ombre en a_1', projeté sur l'axe. (Tangente à 45°.)

Le point c', projeté sur l'axe, porte ombre en c_1', sur le contour apparent (Tangente verticale).

Fig. 1.

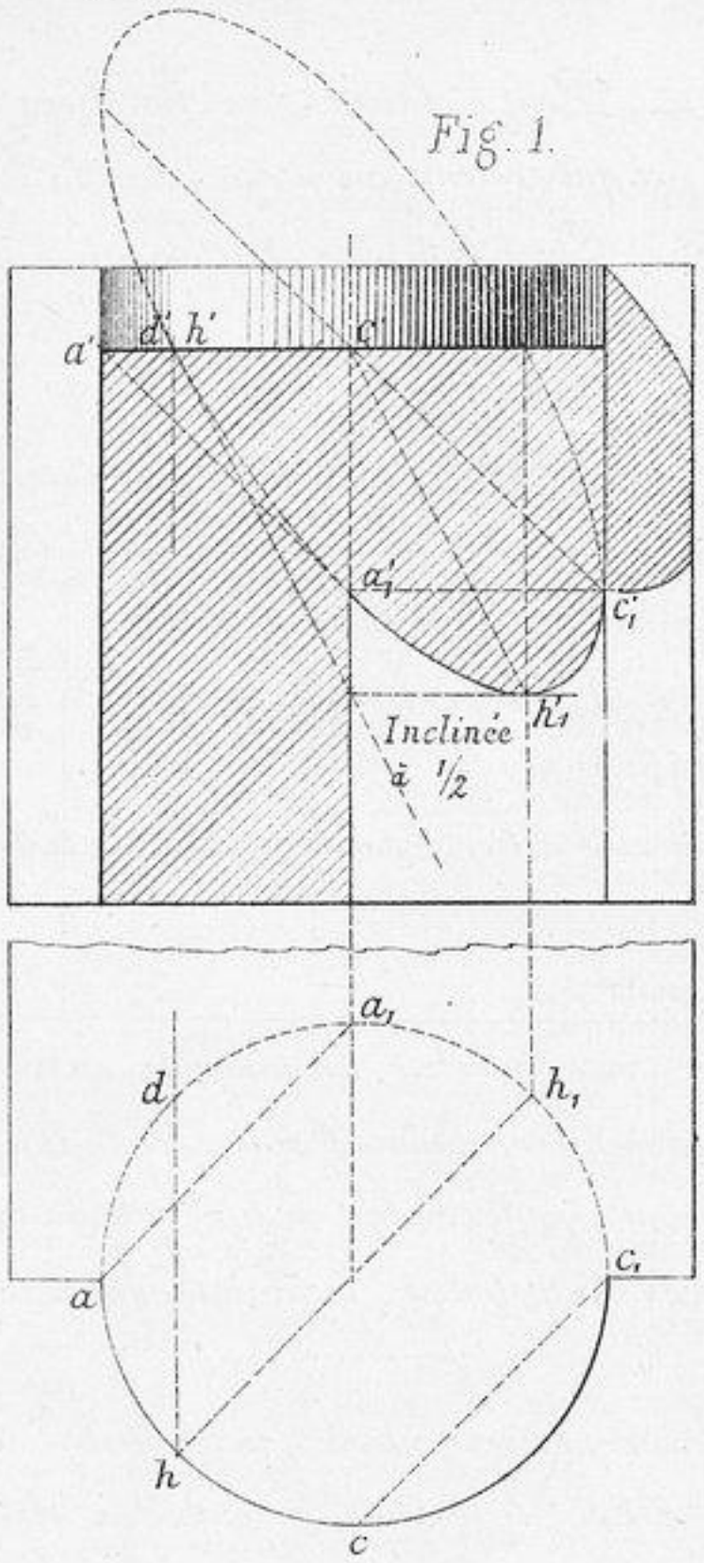


Fig. 2.

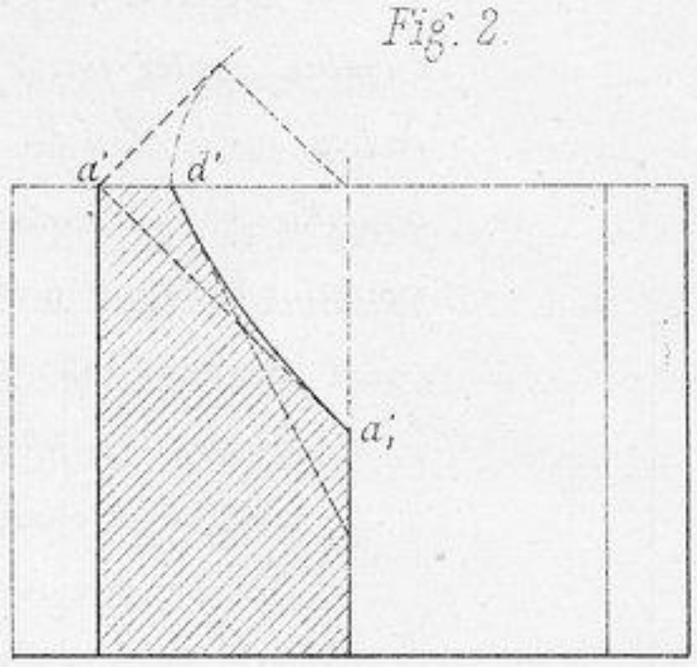


Fig. 3

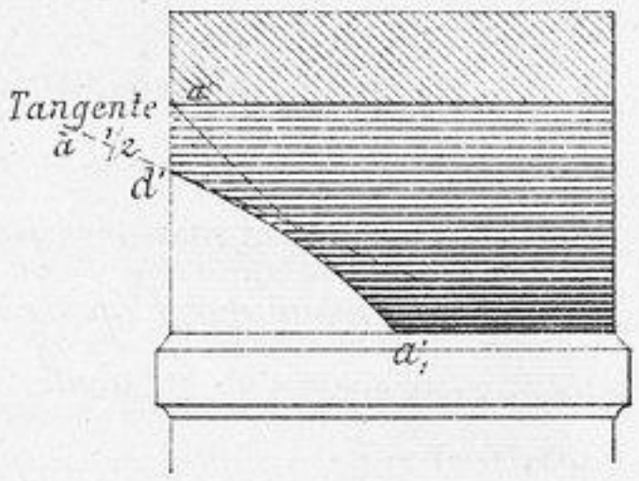
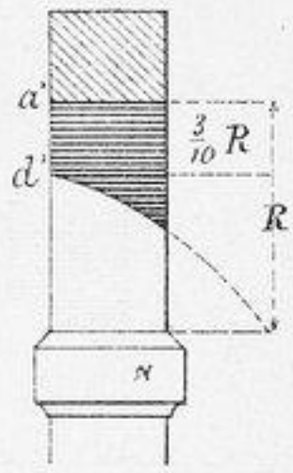


Fig. 4.



Le point de départ d'1 est le point où la tangente à la base du cylindre serait à 45°. — Les échelles de teintes donneront ce point.

Le point hh', projeté au même point que le point de départ, porte ombre en h, h'1, point le plus bas de l'ombre portée. La tangente au départ, en d' est parallèle au diamètre c'h', et il est facile de voir que ce diamètre est incliné à 2 de hauteur pour 1 de base. Il en est donc de même de la tangente en d'.

Dans la pratique, (fig. 1.2.3.4.) lorsque le cylindre est ouvert, ce qui est le cas pour un pont ou une arcade en coupe, on prend le point de départ d'1, comme si on cherchait l'ombre propre d'un cylindre, et l'on mène la tangente inclinée à $\frac{2}{1}$. Par le point le plus haut, a', de l'intrados, on mène le rayon à 45°, a'a'1 jusqu'à la ligne des naissances (si la voûte est plein cintre) et l'on trace le petit arc d'Ellipse, d'a'1 dont on connaît 2 tangentes.

Ombres portées sur les Cônes. — Ces ombres sont rares dans la pratique. — On nomme Ombre du Trou de Loup, l'ombre portée dans un cône creux, par son cercle de base. — Cette épure se fait facilement en élévation, en faisant usage du plan auxiliaire fuyant à 45°.

Ombres portées sur les Sphères.

1° Ombre de l'Ecuelle (En plan) — On nomme ainsi l'ombre portée dans une demi-sphère creuse par le cercle de son équateur. — Nous étudierons cette ombre en projection horizontale.

On sait que la courbe est plane, c'est donc un cercle dans l'espace, et une Ellipse en projection.

Le point le plus bas, K_1 est situé dans le méridien vertical KK_1 parallèle au rayon lumineux. — On fera une section par ce plan. On la rabattra et l'on pourra prendre comme section rabattue le cercle Kug. — Par le point K on mènera le rayon φ qui coupera la sphère en K" relevé en K_1.

Les points de départ t et u, sont les points de tangence à 45° pris sur l'équateur. — L'Ellipse est, dès lors, déterminée par ses axes.

Fig. 2

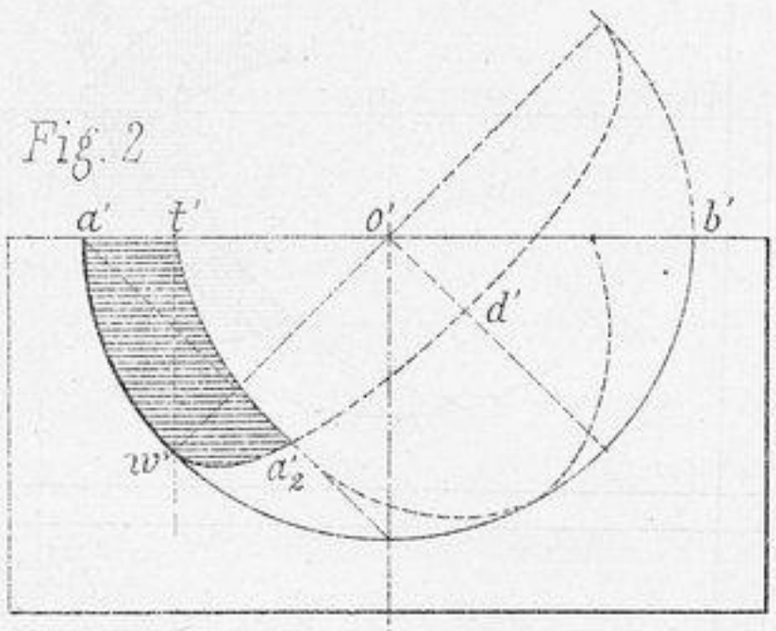
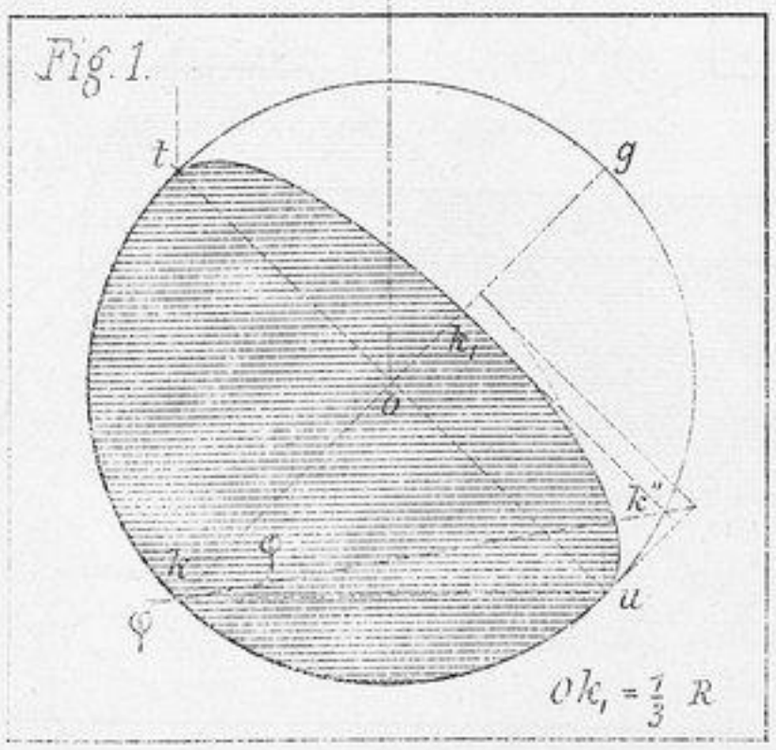


Fig. 1.



Remarque. — On a très-sensiblement ok_1 (petit axe) $= \frac{1}{3}$ ot (grand axe).

2° Ombre de l'Ecuelle (En Coupe) (fig. 2) — L'ombre est portée, en partie par le Cercle d'Equateur a'o'b', et en partie par le cercle de coupe, a'w'b'.

Commençons par ce dernier. Il donne en $w'a'_2$, une portion de l'ellipse étudiée ci-dessus. — On prend $o'd' = \frac{1}{3}$ de o'w' et l'on trace le quart d'Ellipse $w'a'_2 d'$. — Le point a' porte ombre en a'_2 sur cette ellipse.

L'ombre portée par l'équateur a son point de départ en t' (point de tangence à 45° de l'Equateur.) Elle passe

par a'_2 et y est tangente à 45°.

Dans la pratique, ces deux points et la tangence en a'_2 suffisent pour tracer cette ombre.

3° Architecture. – Ombre de la niche en élévation (fig. 1)

On a pris $od = \frac{1}{3}\, og$. – On a tracé l'Ellipse gd, bonne jusqu'en f. — a porte ombre en a_1, projeté sur l'axe. – On a joint a_1 et f par une courbe tangente en a_1, à la verticale, et tangente en f_1 à l'Ellipse.

4° Ombre de la niche en coupe (fig. 2) – On a pris $od = \frac{1}{3}\, og$. – On a tracé l'Ellipse $g\, a_1 d_1$ bonne jusqu'en a_1, point de rencontre de la ligne à 45° menée par a. – On a ramené g en h par une horizontale, et l'on a eu en h le point de départ. – On a tracé l'arc d'ellipse joignant h et a_1 et tangent à 45° en a_1

5° Ombre d'un berceau terminé par une niche sphérique (fig. 3).

En $a\,h\,h_1$ on a l'ombre du pont. – On a pris $od = \frac{1}{3}\, og$; on a tracé l'ellipse $g\, m_1 d_1$ bonne jusqu'en m_1 ombre du point m, où commence le berceau. – De o en m_1, arc d'ellipse, tangent en o, à la ligne de naissance, et en m_1, tangent à l'ellipse précédente.

Fig. 1

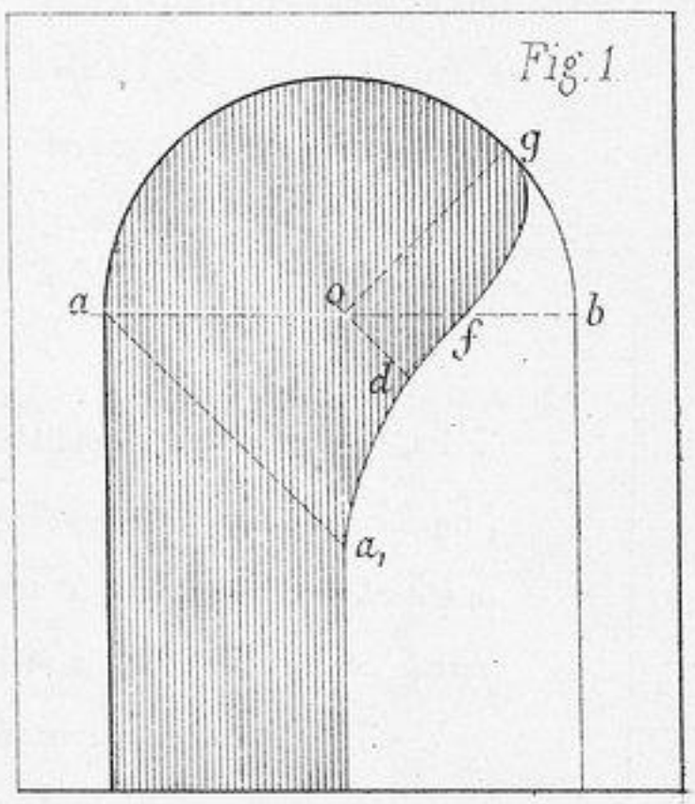


Fig. 2.

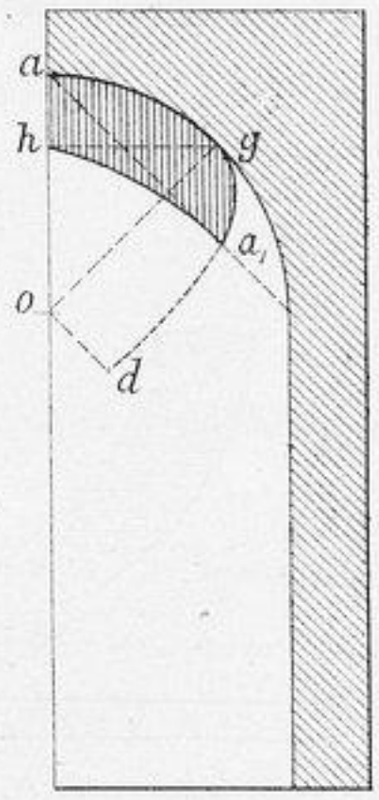
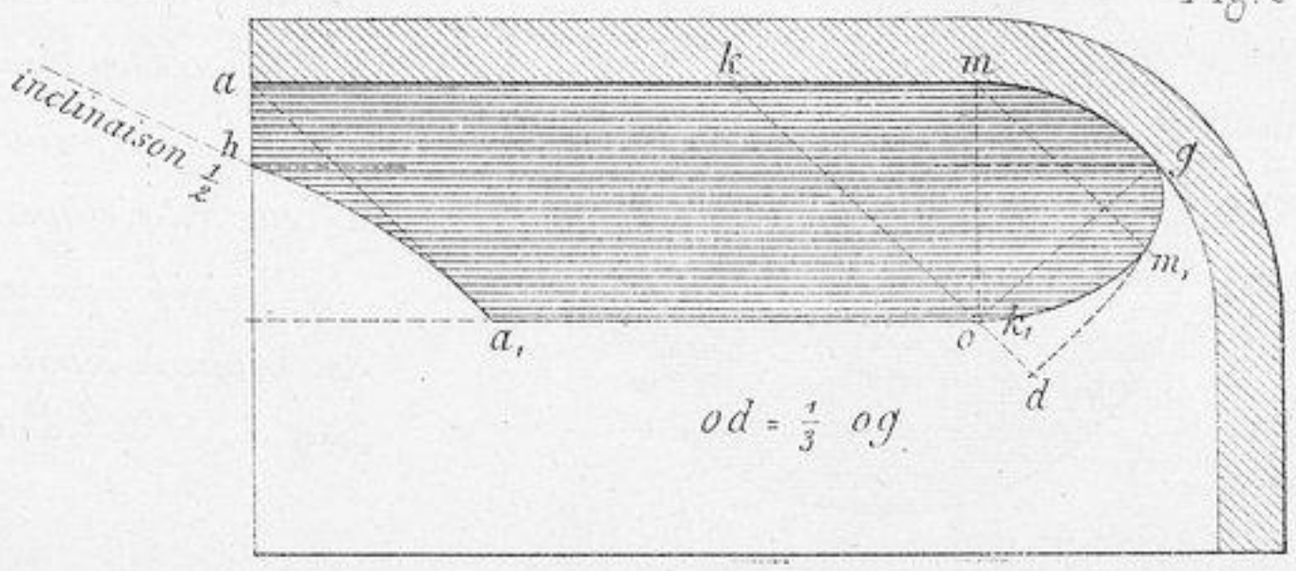


Fig. 3.



Projections cotées.

Dans ce système, on ne donne que la projection horizontale des objets, et l'on supprime la projection verticale. Mais on écrit à côté des points principaux de l'épure la cote de ces points, c'est-à-dire leur hauteur au-dessus d'un plan horizontal de comparaison convenu à l'avance.

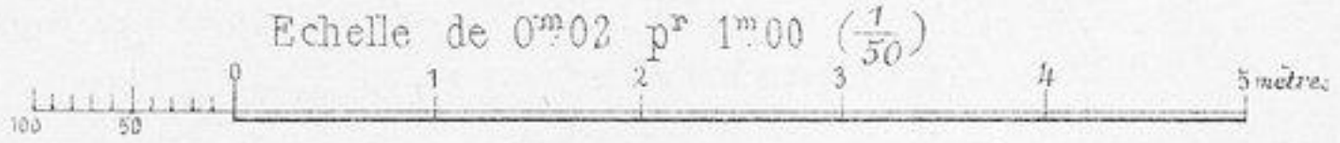
Ce plan est ordinairement le plan du niveau des mers.

Les cotes des points au dessus de ce plan de comparaison sont dites positives, et se nomment : altitudes ; les cotes des points au dessous sont négatives et se nomment profondeurs.

Les cotes sont écrites en mètres, et fractions décimales du mètre : 1, 25 — 14.55 ….

Pour être utilisable, un plan coté doit être fait à une échelle donnée, et cette échelle doit, tout d'abord, être tracée soigneusement sur l'épure.

On la fera comme ci-dessous, en y plaçant une échelle et une contre-échelle.



Dans les épures de projections cotées, on a de très-nombreuses multiplications à effectuer. — En général, les facteurs de ces opérations sont de petits nombres dépassant rarement 3 chiffres. — On se servira utilement pour cela de tables de multiplication toutes faites, ou bien encore de la règle à calcul.

Ligne droite.

On donne la projection horizontale et les cotes des points principaux.

Si le plan est à une faible échelle, on gradue la droite de 10^m en 10^m, ou de 5^m en 5^m. — Si l'échelle est plus grande, on la gradue de mètre en mètre, ou bien de 50 centimètres en 50 centimètres.

D'ailleurs il est de convention, dans les dessins servant aux travaux publics ou aux travaux militaires de déterminer la graduation d'après l'échelle.

On nomme **équidistance** la hauteur constante qui sépare sur une même carte les plans de niveau des différents points pour lesquels on écrit les cotes.

On convient ordinairement de prendre l'équidistance égale au $\frac{1}{2000}$ du dénominateur de l'Echelle.

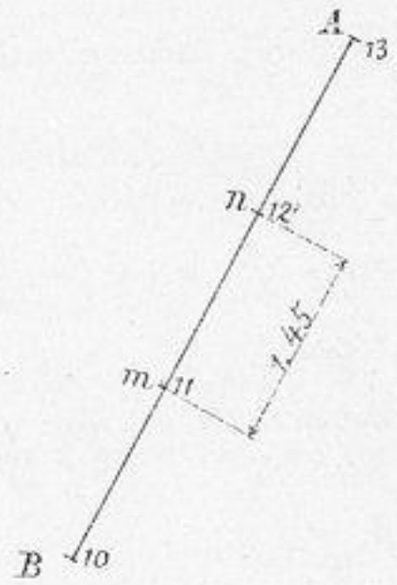
D'après cela, pour les échelles de $\frac{1}{5000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{20000}$, les équidistances

sont 2^{m}.50 , 5^{m}.00 , 10^{m}.00, etc. . . .

Ces règles ne sont pas absolues.

Supposons l'équidistance égale à 1^{m}., c'est-à-dire la droite graduée de mètre en mètre.

On nomme intervalle la distance qui sépare horizontalement 2 points qui se suivent, et pente, la tangente de l'angle formé par la droite avec le plan horizontal.



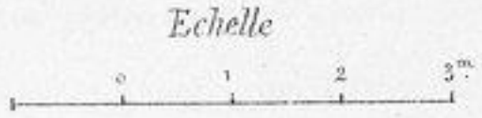
Pour la droite AB, l'intervalle mesuré à l'échelle est, je suppose, de 1^{m}.45.

Soit p la pente,
i l'intervalle ;

Considérons le triangle rectangle qui aurait pour hypothénuse la droite MN de l'espace, pour base horizontale l'intervalle mn, et pour hauteur la différence de niveau des points M et N, c'est-à-dire 1 mètre: ce triangle donne:

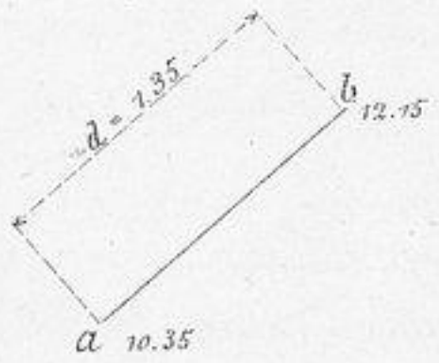
$$tg\,\alpha = p = \frac{1}{i} \ ,$$

d'où $i = \frac{1}{p}$



La pente et l'intervalle sont inverses l'un de l'autre.

Problème 1. — Connaissant la distance projetée (d) de 2 points cotés A et B, et les cotes c et c' de ces 2 points ; calculer l'intervalle i et la pente p de la droite qui les joindrait.



Soit d (distance de a et de b) = 1,35, mesurée à l'échelle.

Soit c (coté du point b) = 12,15
c' (coté du point a) = 10.35
} Ces cotes sont écrites sur le plan

Le triangle rectangle qui aurait pour hypothénuse AB de l'espace est semblable à celui qui aurait pour hypothénuse deux points équidistants de 1^{m}. en hauteur.

Nous aurons donc le rapport

$$\frac{i \text{ (intervalle)}}{1 \text{ (équidistance)}} = \frac{d}{c-c'} \ , \text{ d'où } i = \frac{d}{c-c'}, \text{ (formule importante)}$$

$$i = \frac{d}{c-c'} = \frac{1.35}{12.15 - 10.35} = \frac{1.35}{1.80} = 0.75$$

$$p = \frac{1}{i} = \frac{1.80}{1.35} = 1.33$$

Problème 2.

Une droite étant graduée, donner la cote d'un point pris sur cette droite. — Sur l'échelle, on mesurera l'intervalle de la droite.

Soit $i = 0.85$,

On en déduira $p = \frac{1}{0.85} = 1.17$.

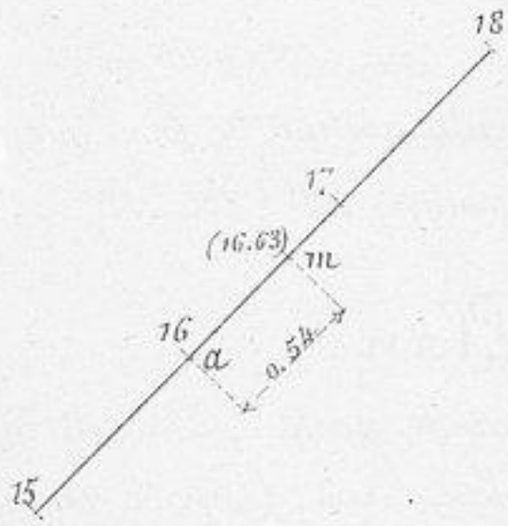
On mesurera la distance x , du point donné m au point a de cote immédiatement précédente. — Supposons que a soit à la cote 16.

Soit $x = 0.54$ (mesuré à l'échelle).

Pour calculer l'altitude y du point M au-dessus du point A, on aura :

$$\frac{y}{x} = \frac{1 \text{ (Équidistance)}}{i \text{ (Intervalle)}} \text{ ; d'où}$$

$$y = \frac{x}{i} = \frac{0.54}{0.85} = 0.63 ;$$



On aurait eu encore :

$$y = px = 0.54 \times 1.17 = 0.63 .$$

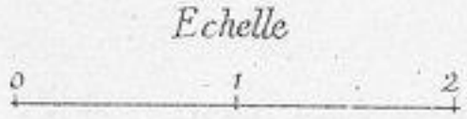
Le point M est à la cote 16.63.

Problème 3.

Placer sur une droite graduée un point de cote donnée. (même figure)

Soit la droite donnée, 15, 16, 17, 18 . . . . ; on veut y placer le point M, dont la cote est 16.63.

M se placera entre 16 et 17, à une distance x du point 16, que l'on va calculer.



On aura, en considérant toujours dans l'espace le triangle rectangle qui aurait 16–M pour hypothénuse, et le comparant au triangle rectangle qui aurait pour base l'intervalle et pour hauteur l'équidistance :

$$\frac{x}{0.63} = \frac{i}{1} \text{ , d'où}$$

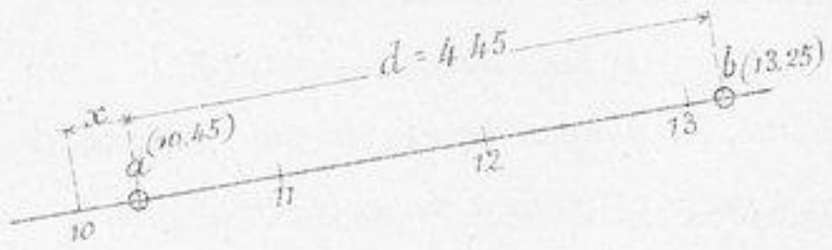
$$x = 1 \times 0.63 = 0.85 \times 0.63$$

$$x = 0.54$$ (que l'on mesure sur l'échelle et que l'on porte sur l'Epure.

Problème 4.

Graduer la droite passant par deux points cotés a (10.45) et b (13.25). — On calculera d'abord l'intervalle comme au problème 1.

On mesurera la distance projetée des 2 points. — Soit $d = 4.45$ cette distance, et l'on aura : $i = \frac{d}{c - c'} = \frac{4.45}{13.25 - 10.45} = \frac{4.45}{2.80} = 1.58$



Cela fait, on calculera la distance x d'un point de cote exacte, 10 par exemple. Il est à 0.45 au-dessous du point a.

On aura donc

$$\frac{x}{0.45} = \frac{i}{1}$$

$$x = i \times 0.45$$

$$= 1.58 \times 0.45 =$$

Echelle

Le point 10 étant placé, en portant à la suite autant de fois que l'on voudra l'intervalle calculé $i = 1.58$, on aura les points 11, 12, 13 .....

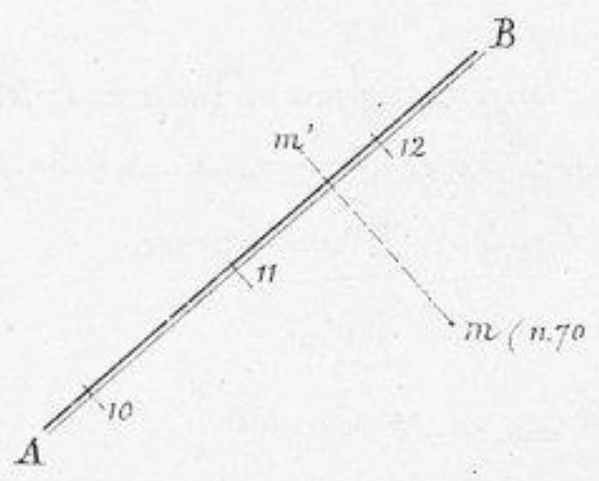
Représentation du Plan.

On définit un plan par sa ligne de plus grande pente. — On sait que cette droite est perpendiculaire aux horizontales du plan, dans l'espace et en projection.

Cette droite, que l'on représente par un double trait, se nomme l'Echelle de pente du plan.

Problème 5.

Trouver la cote d'un point donné du plan. — Soit A B l'Echelle de pente du plan, graduée 10, 11, 12 ...; m, un point.



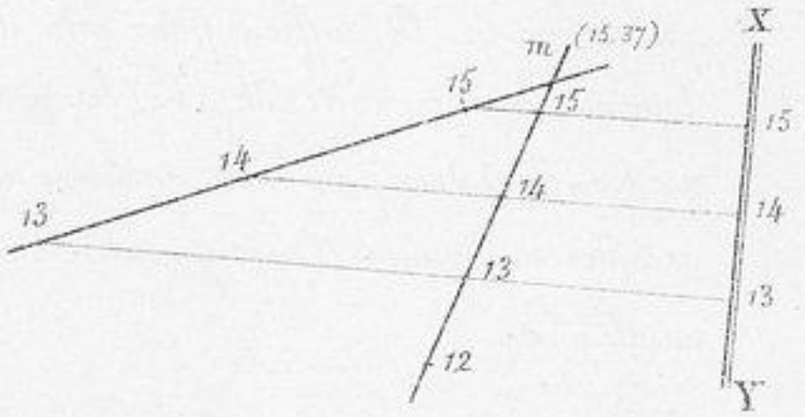
On mène l'horizontale m m'. — On prend sa rencontre m' avec l'échelle de pente, et l'on calcule, comme on l'a fait pour une droite, la cote du point m'. — Ce sera aussi celle du point m.

Problème 6.

Reconnaître si deux droites se coupent, et dans ce cas, graduer leur plan.

1ère Méthode. — On prolongera les deux droites, en projection, jusqu'à leur point de rencontre m. — On calculera la cote du point m, considéré comme appartenant à chacune des droites. — Et si l'on trouve la même cote, on

on concluera que les droites se coupent.



2ème Méthode.

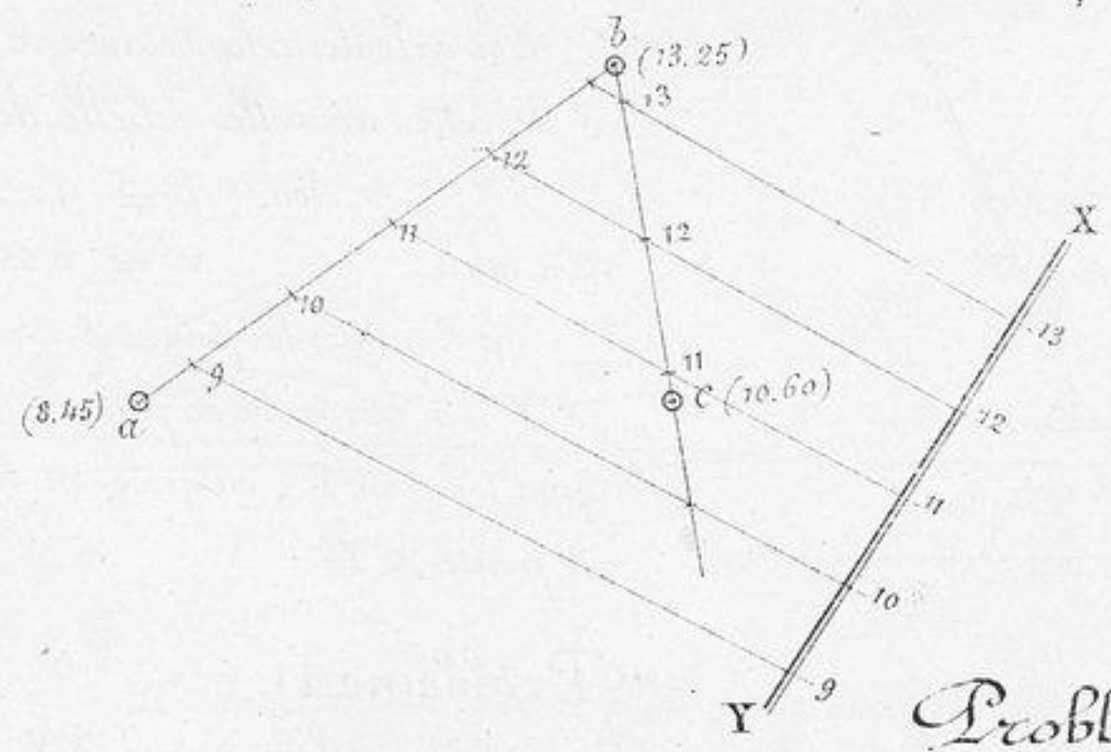
On joindra les points de même cote, 15-15 .... 14-14 .... — Si les lignes ainsi tracées sont parallèles, c'est que le lieu géométrique de ces droites dans l'espace est un plan, et les 2 lignes se coupent.

Ces parallèles sont des horizontales du plan des 2 droites. — En leur menant une perpendiculaire XY, on aura l'échelle de pente, graduée aux points de rencontre avec les horizontales.

Problème 7.

Construire et graduer le plan passant par 3 points a (8.45) b (13.25) c (10.80).

On graduera la droite ab, et la droite cd, — (Voir le Problème 4). — On joindra les points de même cote; — cela donnera les horizontales du plan; — En leur menant une perpendiculaire XY, on aura l'échelle de pente graduée.

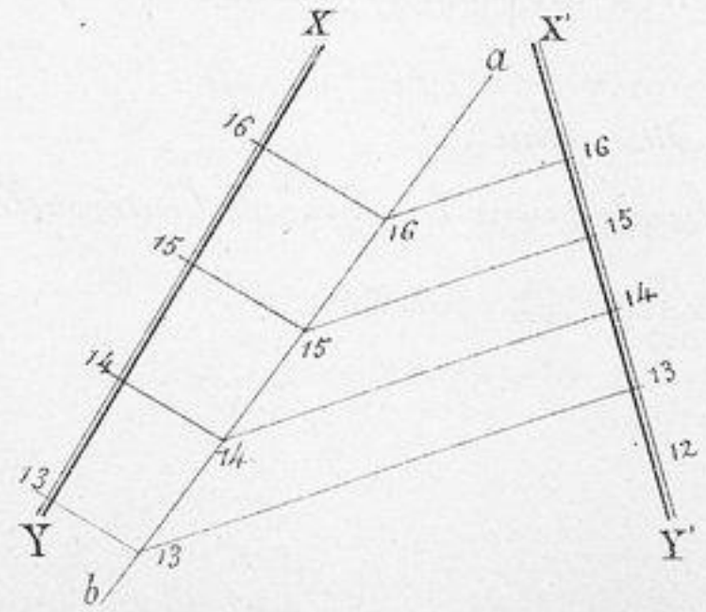


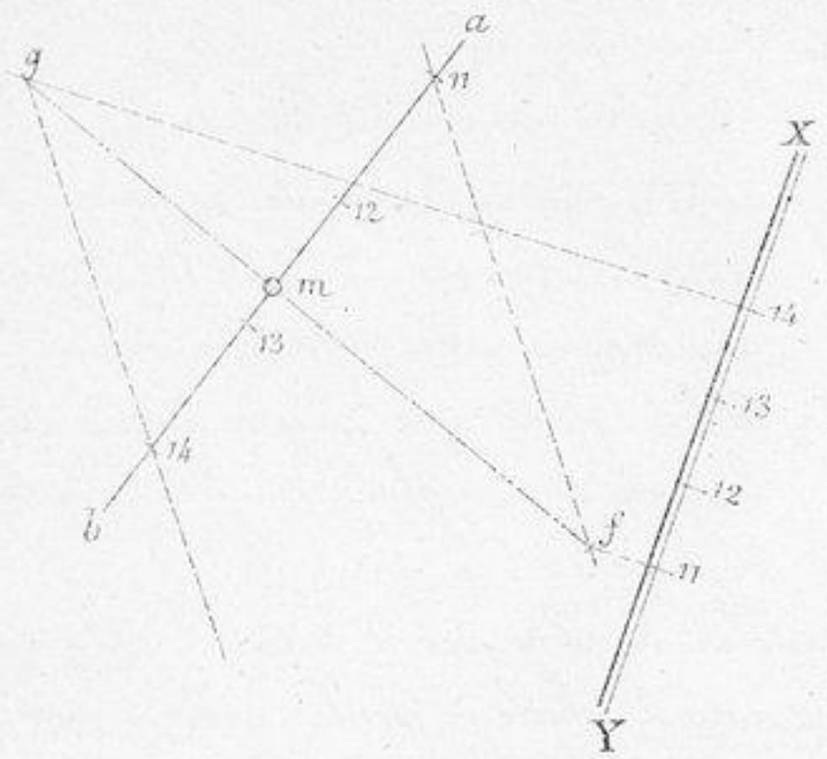
Problème 8.

Intersection de 2 Plans.

Soient XY et X'Y' les échelles de pente des 2 plans.

Menons les horizontales de même cote. — Les points d'intersection de ces horizontales donneront la ligne droite d'intersection, ab, graduée





Problème 9.

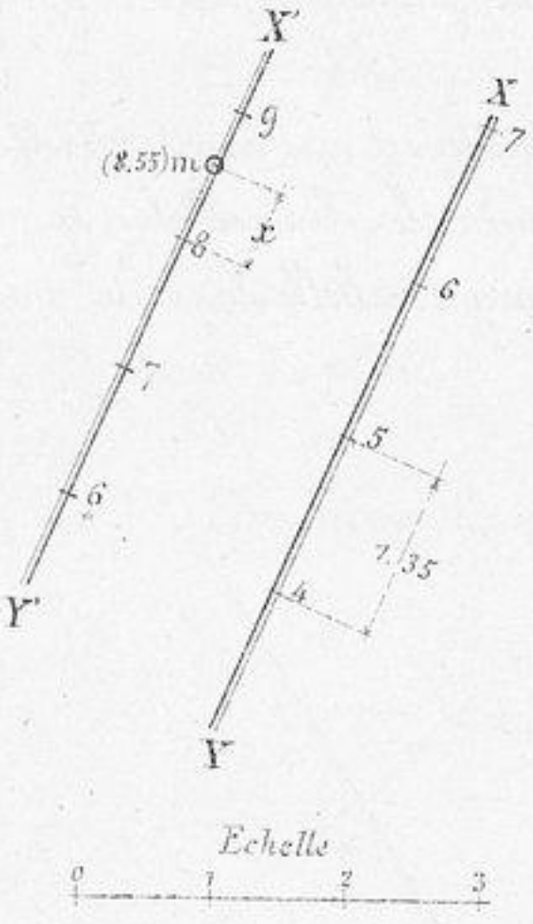
Intersection d'une droite et d'un plan.

Par la droite ab on menera un plan auxiliaire quelconque. — Il suffira pour cela de mener par 2 points de cote exacte de ab, (les points 11 et 14 par exemple) deux parallèles quelconques que l'on considèrera comme 2 horizontales de ce plan auxiliaire.

On prendra l'intersection fg du plan auxiliaire et du plan donné XY.

La droite auxiliaire fg rencontrera la droite donnée au point d'intersection cherché m.

On en calculera la cote.



Problème 10.

Par un point donné m (8.55), mener un plan parallèle à un plan donné XY.

Par le point m, on mènera une parallèle à la ligne de pente XY.

On calculera la distance x du point de cote 8 de cette nouvelle échelle de pente.

Soit $i = 1.35$.

On aura $x = 0.55 \times 1.35 = 0.74$.

Ayant le point 8, en reportant sur X'Y', à partir de ce point, l'intervalle $i = 1.35$ pris sur XY, on graduera la nouvelle échelle de pente X'Y'.

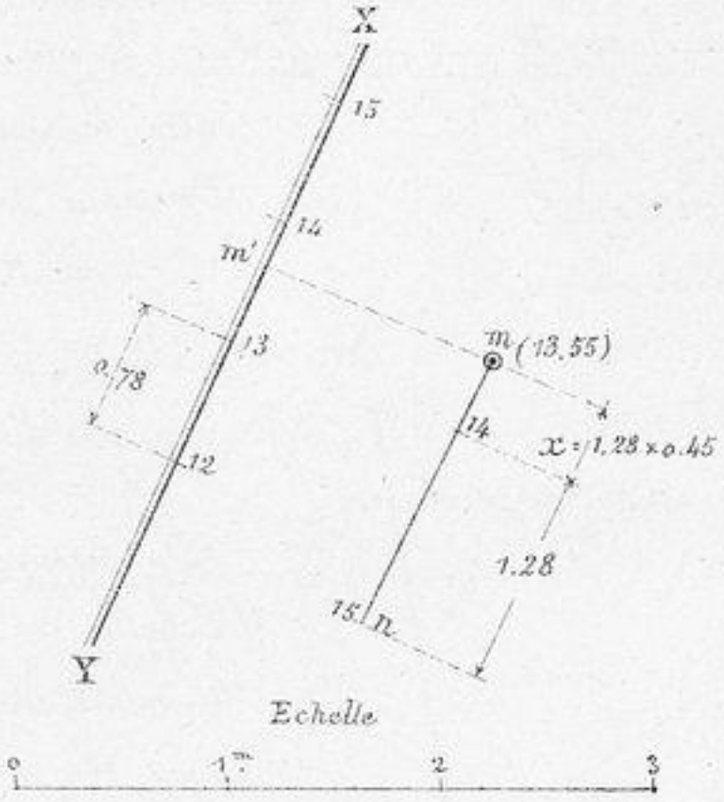
Problème 11.

Mener par un point m d'un plan donné XY une Droite perpendiculaire sur ce plan.

Soit $i = 0.78$, l'intervalle du plan,

L'intervalle de la droite cherchée sera l'inverse de l'intervalle du plan.

$$i' = \frac{1}{i} = \frac{1}{0.78} = 1.28$$



La projection de la droite sera m n, parallèle à X Y.

On calculera comme ci-dessus la cote du point m.

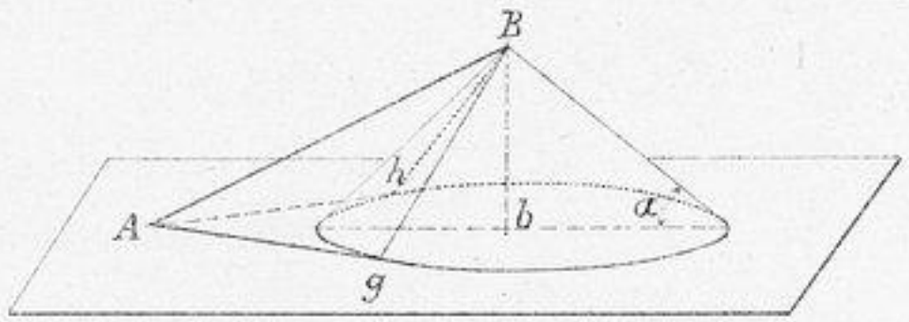
Soit 13.55, cette cote.

Sur m n donc on connaît l'intervalle $i' = 1.28$, on calculera la distance x du point de cote 14; et l'on continuera la graduation de la droite.

On remarquera qu'elle doit être graduée en sens inverse du plan X Y.

Problème 12.

Par une droite donnée ab, mener un plan ayant une pente donnée $\left(p = \frac{2}{3}\right)$



Considérons le Cône de révolution à axe vertical, ayant pour sommet le point B, et dont les génératrices font avec le plan horizontal un angle α, dont la tangente est égale à la pente demandée $p = \frac{2}{3}$.

Prenons sa base sur le plan horizontal qui passerait par A.

Les deux tangentes A g, A h, menées du point A à ce cercle de base, définissent avec les génératrices de contact Bg et Bh, un plan tangent au cône, qui répond à la question.

A g est une horizontale de ce plan et Bg en est une ligne de pente.

Pour faire l'épure, nous prendrons sur ab deux points de cote exacte. — Les points 10 et 14 par exemple. — Le cône aura son sommet au point 14

et sa base sur le plan horizontal 10.

Calculons son rayon de base R. — La différence de niveau est de 4m. entre le sommet et la base.

On aura donc

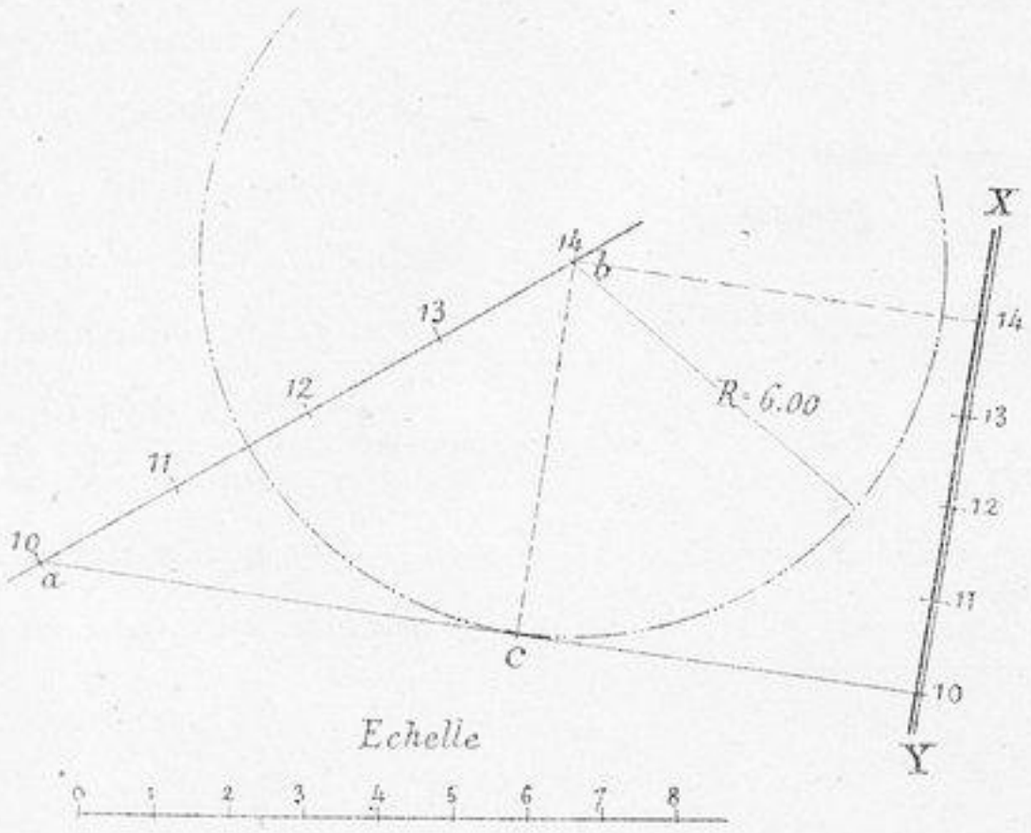
$4 = R \times p$, d'où

$R = \frac{4}{p} = 4 \times \frac{3}{2}$, puisque $p = \frac{2}{3}$

$R = 6$ mètres.

On mesurera 4m. sur l'Echelle. — On tracera du point 14 comme centre le cercle de rayon R, et on lui menera une tangente a c, du point 10.

a c est l'horizontale de cote 10, du plan demandé.



La ligne de pente X Y sera une perpendiculaire à la droite a c. — On la graduera facilement.

Remarque: Il y aurait deux solutions. — Il pourrait aussi ne pas en avoir, si le cercle de rayon R passait au delà de a. — Ce problème est très-souvent résolu dans les travaux de terrassements, surtout dans la fortification.

Problème 13.

Par un point m d'un plan, mener dans ce plan une droite ayant une pente donnée $p = \frac{2}{5}$.

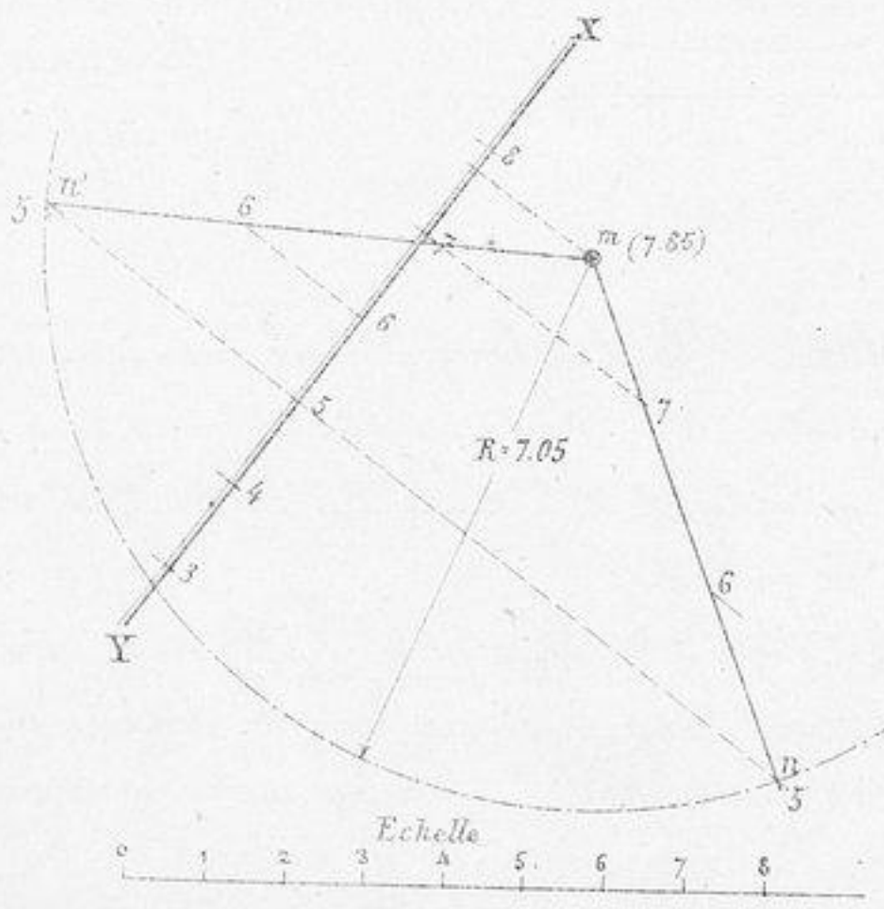
Soit 7.85, la cote du point m, du plan X Y.

Considérons un cône de pente $\frac{2}{5}$ ayant son sommet au point m, et sa base sur le plan horizontal de cote 5, par exemple.

Le rayon de sa base sera

$$R = \frac{7.85 - 5}{p} = \frac{2.85}{2/5} = \frac{2.85 \times 5}{2} = 7.05.$$

Du point m, comme centre, on tracera le cercle de rayon R. — Il



recoupera l'horizontale du plan dont la cote est 5, en 2 points n et n'. — Ce qui donnera comme solutions les deux droites m n et m n'. — faciles à graduer.

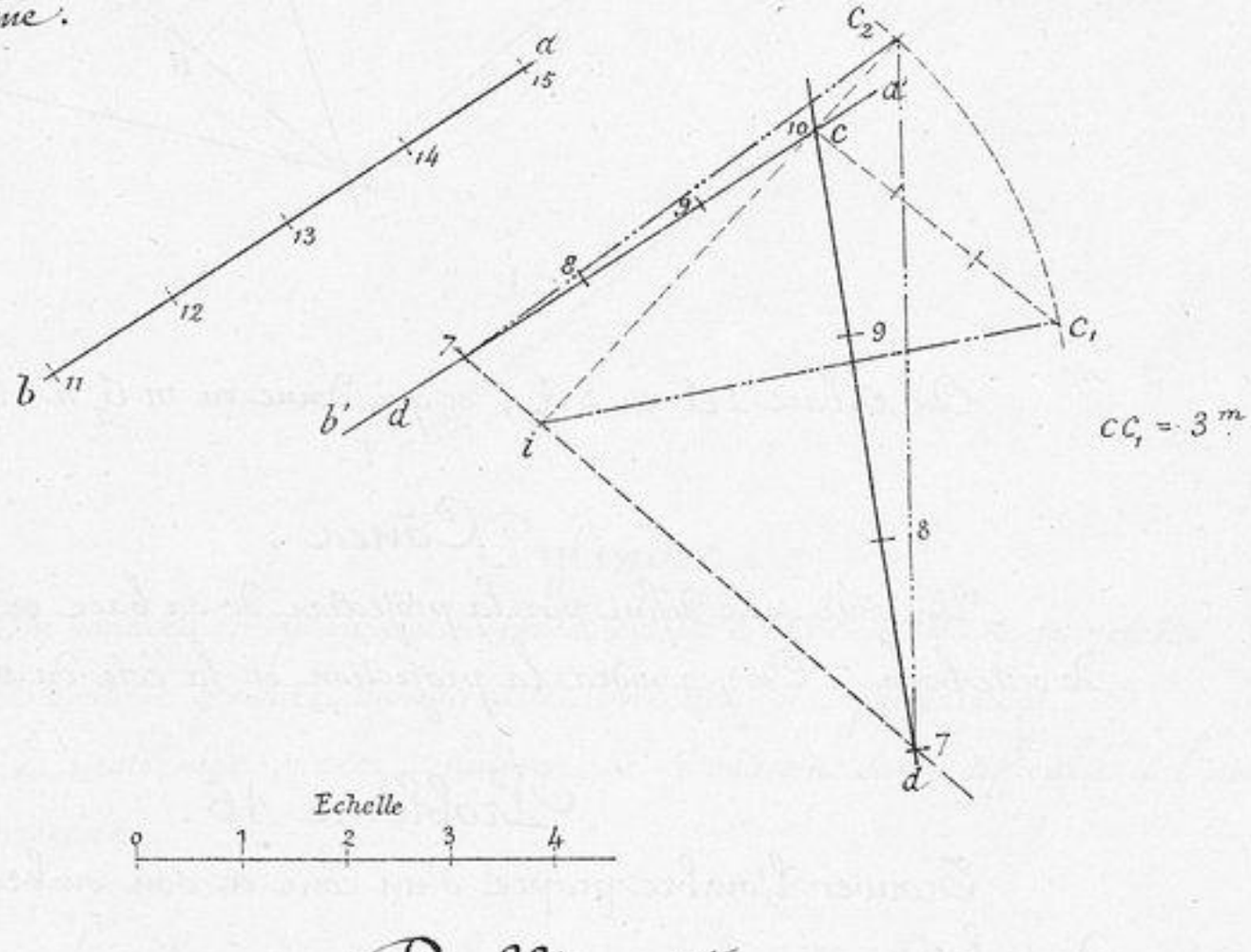
Le problème aurait pu ne pas avoir de solution.

Problème 14.

Angle de deux Droites.

Soient ab cd ces 2 droites. — Par un point de cote exacte de cd, on mène une parallèle à ab. — Soit a'b' cette parallèle.

cd et a'b' définissent un plan que l'on rabat sur le plan de cote 7, par exemple autour de l'horizontale 7.7 comme charnière. L'épure s'explique d'elle-même.



Problème 15.

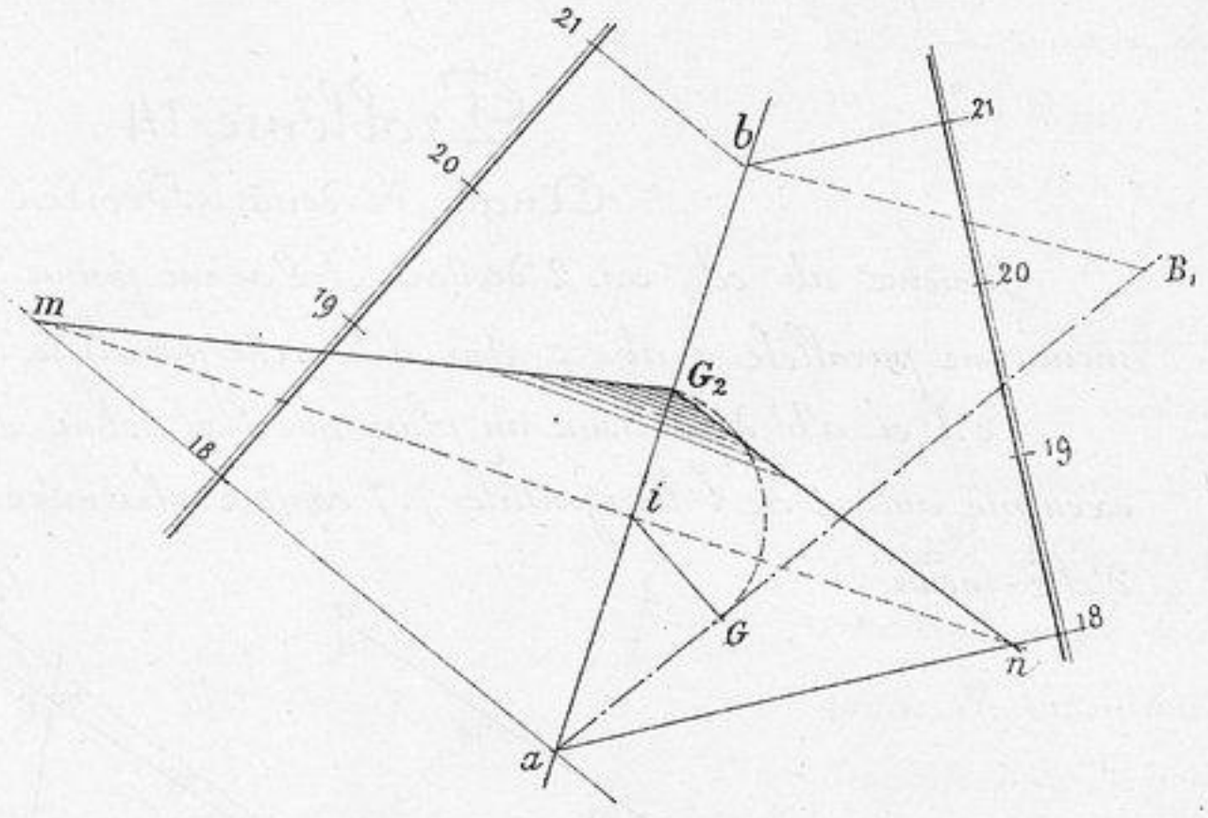
Angle de deux Plans.

On cherchera en ab l'intersection des deux plans.

On rabattra le plan projetant de ab, sur le plan horizontal 18, par exemple.

Soit aB_1 cette intersection rabattue. — On lui menera une perpendiculaire quelconque Gi — par le point i une perpendiculaire à ab, jusqu'aux points m et n où elle rencontre les horizontales 18 des deux plans.

iG est le rayon de rotation du point G de l'espace, sommet du rectiligne de l'angle des deux plans.



On rabat IG en iG_2, ce qui donne en mG_2n l'angle cherché.

Cônes.

Un cône sera défini par la projection de sa base et l'échelle de pente du plan de cette base. — On y joindra la projection et la cote du sommet.

Problème 16.

Trouver l'ombre propre d'un cône et son ombre portée sur le plan de sa base.

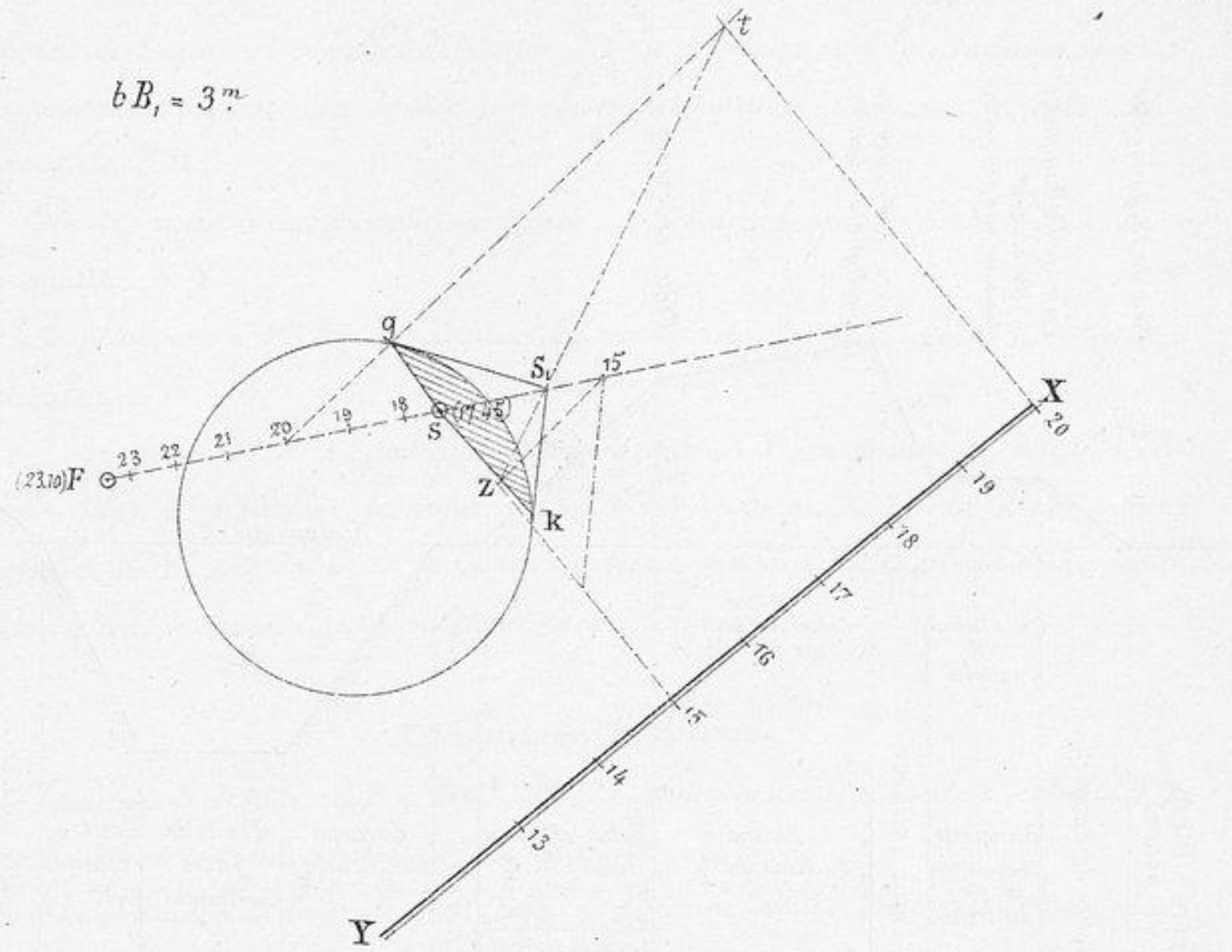
Sa base est, je suppose, un cercle en projection. Le plan de sa base est défini par sa ligne de pente XY.

Le sommet est en S (17.45).

Soit F un flambeau (coté 23.10)

Menons la ligne SF et graduons-la.

Prenons son intersection avec le plan XY, ce qui se fait à l'aide d'un plan auxiliaire dont nous prenons 2 horizontales arbitraires 20-t et 15-z — L'intersection auxiliaire est tz. — Nous avons en S_1 l'ombre du sommet sur le plan XY. — En S_1G et S_1K les deux droites d'ombre portée, et en S_g, SK les 2 génératrices d'ombre propre.



Cylindre.

On donnera le plan de sa base et la courbe de base projetée.

Une droite graduée indiquera la direction des génératrices.

Les problèmes sur les cylindres se résoudront sans difficulté à l'aide de ce qui précède.

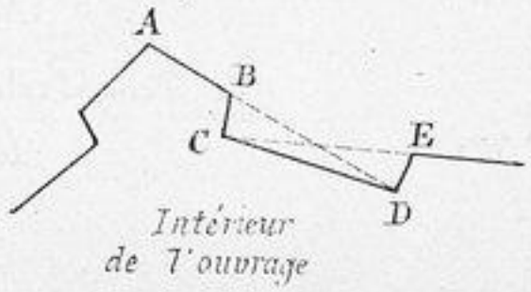
Explications relatives à la 2e Epure.

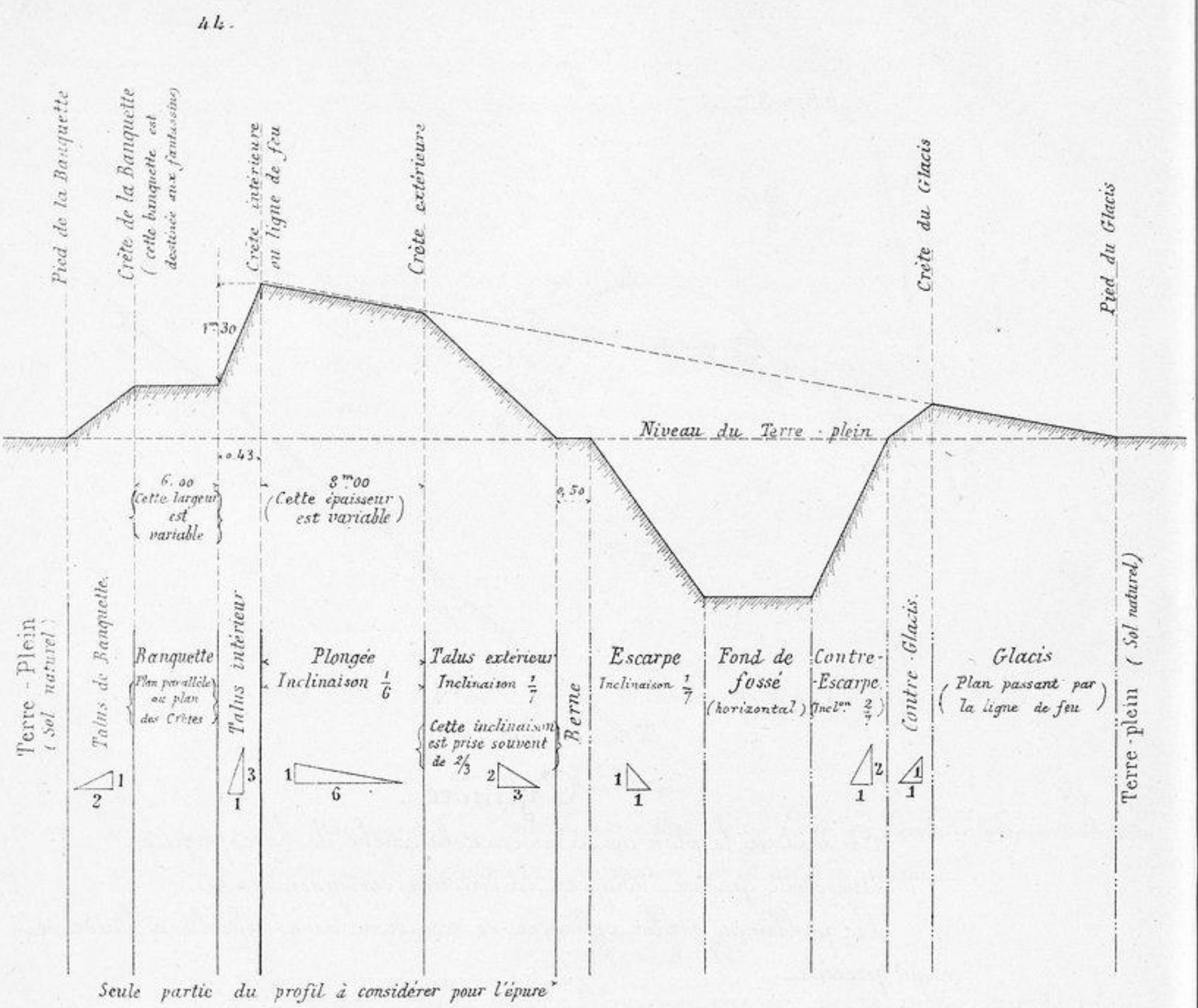
Cette épure se rapporte à la construction d'un saillant de fortification.

On se propose de couvrir des combattants par une masse de terre assez épaisse pour détruire la force vive des projectiles. Le profil ci-contre fait connaître la forme du déblai et du remblai que l'on exécute pour cela.

Pour l'épure on ne considèrera que la partie en remblai.

En projection horizontale la nécessité de flanquer les ouvrages, c'est-à-dire d'en faire défendre les parties les unes par les autres, conduit à donner à la ligne de feu un tracé en ligne brisée tel que A B C D E.





On nomme saillant un angle, tel que A, ayant son sommet tourné vers l'extérieur de l'ouvrage.

On se propose, dans l'épure, d'étudier les intersections de plans auxquelles donnent lieu les retournements du profil ci-dessus, à l'occasion d'un saillant.

Ligne de feu. — Plan des Crêtes — Plan de Banquette. —

On commence l'épure par le tracé de la ligne de feu AB – BC – CD.

On a abattu l'angle du saillant par la ligne BC.

Ces 3 droites sont dans un même plan que nous nommerons le Plan des Crêtes, et qui, pour des raisons de défilement, n'est pas horizontal.

La ligne CD, seule est horizontale. On tracera donc, à priori, un peu

en dehors de l'épure l'échelle de pente XY de ce plan ; on la graduera facilement puisque la pente est donnée par le programme, ainsi que la cote de l'horizontale CD.

On tracera immédiatement après, l'échelle de pente du Plan de Banquette X'Y'.

Ce plan est à 1m. 30 au-dessous du précédent, hauteur comptée suivant la verticale.

Pour graduer X'Y', on prendra donc sur XY un point m coté 21m.30, par exemple, l'on en fera le point coté 20m.00 du plan X'Y'. — De ce point de l'échelle X'Y', on déduira tous les autres, puisque les 2 plans étant parallèles, les intervalles de leurs lignes de pente sont les mêmes.

Talus intérieurs.

Par les 3 droites AB, BC, CD, graduées à l'aide de l'échelle XY, on fera passer le talus intérieur à la pente $\frac{3}{1}$.

On résoudra 3 fois le problème : « Par une droite, faire passer un plan ayant une pente donnée. » — L'une des droites, CD, est horizontale ; les autres sont inclinées. On prendra les intersections de ces plans de talus intérieur avec le plan de banquette X'Y', ce qui donnera les droites $A_1 B_1 - B_1 C_1 - C_1 D_1$.

Remarques. 1° Ces droites seront parallèles deux à deux comme intersections de 2 plans parallèles par un troisième.

2° CD étant horizontale, sa parallèle $C_1 D_1$ sera à 0m.43 de distance (voir le profil) ; mais pour les deux autres, cette distance ne sera pas de 0.43.

3° Dans ce tracé on ne s'occupera pas encore de la traverse.

Talus de Banquette.

On prendra, en plan, les droites NP – PQ, QR parallèles à $A_1 B_1 C_1 D_1$ et à une distance de 6m. — Ce qui donnera la crête du Talus de Banquette.

Les horizontales du plan X'Y', menées dans la partie utile de la banquette, donneront la graduation de ces crêtes.

Par ces droites on fera passer des plans inclinés à la pente $\frac{2}{1}$, (Problème connu), et l'on en prendra l'intersection avec le plan horizontal du terre-plein, ce qui donnera le pied du talus de banquette.

Cette intersection sera l'horizontale de cote 14 de ce talus.

Plongées.

Par les 3 lignes de feu on menera des plans inclinés en dehors à la pente $\frac{1}{6}$

Ils se couperont suivant les droites BF et CE. — Sur les 2 faces AB et CD, et non sur la face BC, on limitera ces plongées aux deux droites KF — EH, parallèles à AB et CD, et distantes horizontalement de 8m. Puis on joindra FE. Cette dernière droite n'est pas parallèle à BC. — On aura ainsi les 3 plongées dont on tracera les horizontales dans les parties utiles ; — Ce qui est facile, puisque les lignes de feu sont graduées.

Talus Extérieurs.

Par les 2 crêtes extérieures KF — EH, on fera passer un plan incliné à la pente $\frac{1}{1}$ (Cette pente est souvent de $\frac{3}{2}$). — On prendra l'horizontale 14 de ces 2 plans, ce qui donnera le pied du talus extérieur sur le terre-plein. — On prendra aussi leur intersection LM. — Enfin le talus extérieur du pan coupé EF s'obtiendra en prenant sur l'intersection précédente le point M, de cote 16, et le joignant par deux droites aux points E et F.

Traverse.

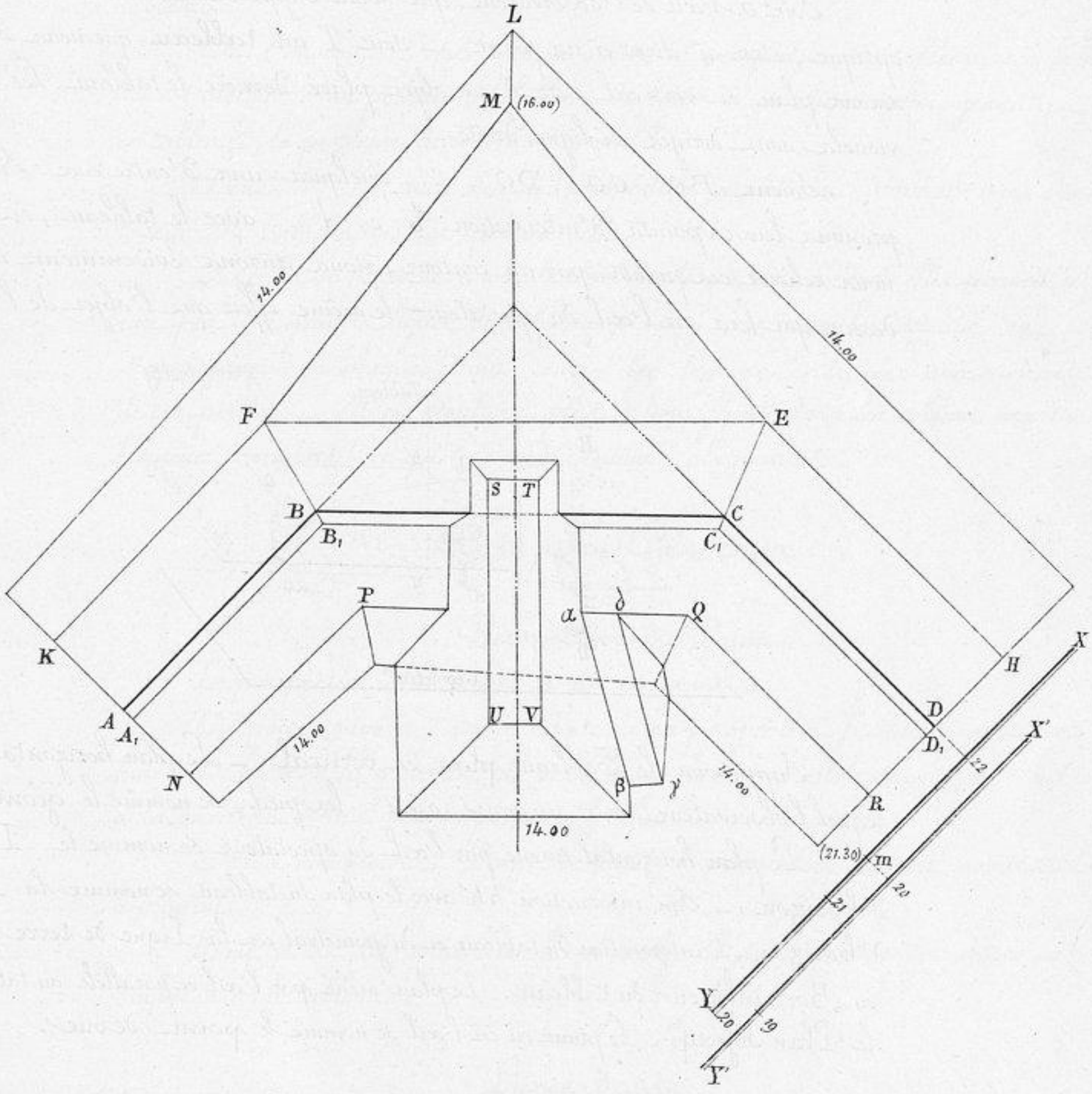
On établit d'abord le rectangle horizontal de couronnement STUV. Le reste n'est plus qu'une intersection des plans des talus de la banquette avec les plans déjà dessinés, et avec le terre-plein.

Rampe.

On prendra le point α où le talus de la traverse rencontre la crête du talus de banquette. — Par cette crête αQ on fera passer un plan incliné à la pente 1/4.

On prendra son intersection αβ avec le talus de la traverse ;

On prendra, comptée sur αQ, une largeur α δ = 4m. — On menera δγ parallèle à αβ. — On graduera le plan de la rampe, puis ensuite la droite δγ. — Enfin, par cette droite δγ on fera passer le plan de talus de la rampe, incliné à la pente 1/2, et on prendra ses intersections avec les talus de banquette et le terre-plein.


L
M
(16.00)
14.00
14.00
F
E
S
T
B
B1
C
C1
P
α
δ
Q
K
A
A1
N
U
V
14.00
H
D
D1
X
X'
22
β
γ
14.00
R
14.00
(21.30)
m
21
20
Y
20
19
Y'

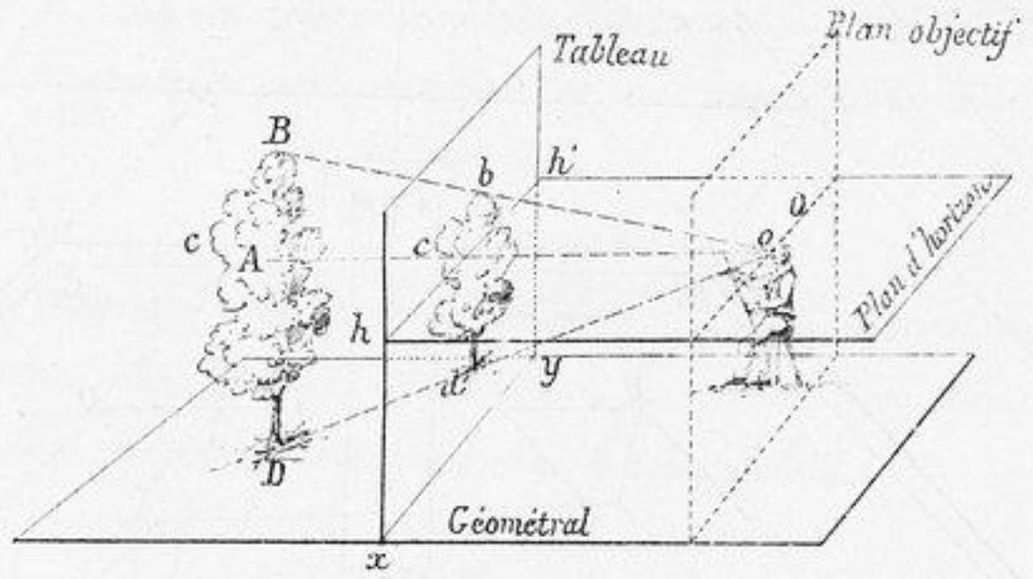
Perspective Conique.

On se propose dans la Perspective conique de représenter sur un Tableau les objets tels qu'on les voit.

A cet effet :

Soit O l'œil de l'observateur que nous supposerons réduit à son centre optique, c'est-à-dire à un point ; — Soit T un tableau que nous supposerons plan et vertical, et A un objet placé derrière le tableau. Les rayons visuels sont dirigés en ligne droite.

Soient BO , CO , DO , ... quelques-uns d'entre eux. Si nous prenons leurs points d'intersection b, c, d ... avec le tableau, et si nous relions ces points par un contour, nous aurons évidemment un dessin qui fera sur l'œil du spectateur le même effet que l'objet de l'espace.



Supposons le Tableau plan et vertical. — Le plan horizontal sur lequel l'observateur est supposé avoir les pieds se nomme le géométral.

Le plan horizontal mené par l'œil du spectateur se nomme le Plan d'horizon. — Son intersection hh' avec le plan du tableau se nomme la Ligne d'horizon. — L'intersection du tableau et du géométral est la Ligne de terre xy, ou Bord inférieur du tableau. — Le plan mené par l'œil et parallèle au tableau est le Plan objectif. — Le point où est l'œil se nomme le point de vue.

Panorama. — Quelquefois le tableau est cylindrique et vertical. Dans ce cas on le nomme panorama. S'il est horizontal, l'œil étant placé au-dessous, c'est un plafond.

Problème de la Perspective. — Esprit des Méthodes.

La perspective est une projection cônique. — Le problème à résoudre revient en résumé à trouver l'intersection d'une droite et d'un plan, et peut se résoudre par les méthodes de la géométrie descriptive.

Mais ces dernières conduiraient à des constructions compliquées, ne faisant pas image, et surtout nécessitant plus de place que n'en comporte le tableau.

Or, l'on conçoit que si pour mettre en perspective un tableau occupant tout l'atelier d'un peintre, il fallait disposer d'un espace plus grand que ce tableau, le problème deviendrait insoluble.

Donc, 1° Les méthodes de perspective permettront d'opérer dans l'intérieur du Tableau ou très-peu au-delà.

2° Elles se prêteront à des tracés directs, c'est-à-dire elles permettront, une fois les grandes lignes du tableau placées, d'achever les détails en s'appuyant, en chaque point, sur les figures tracées aux environs de ces points. — Il en résultera plus d'homogénéité dans les erreurs inévitablement commises, ce qui les rendra moins choquantes.

Principes Généraux.

Perspective du Point.

La perspective d'un point A est un point a.

Un point situé à distance infinie a sa perspective f située à distance finie. — f est à la rencontre du tableau et de la parallèle menée par l'œil à la direction définie par le point à l'infini.

Nous nommerons Point de fuite, la perspective de tout point situé à l'infini.

Tout point M situé dans le plan objectif, a sa perspective située à l'infini sur le tableau.

Ligne droite.

La perspective d'une droite AB est une ligne droite a.b.

Parmi les différents points d'une droite AB, nous considérons :

1° Sa trace sur le tableau, — que nous nommerons simplement la

Trace. — Soit V ce point : il est à lui-même sa perspective.

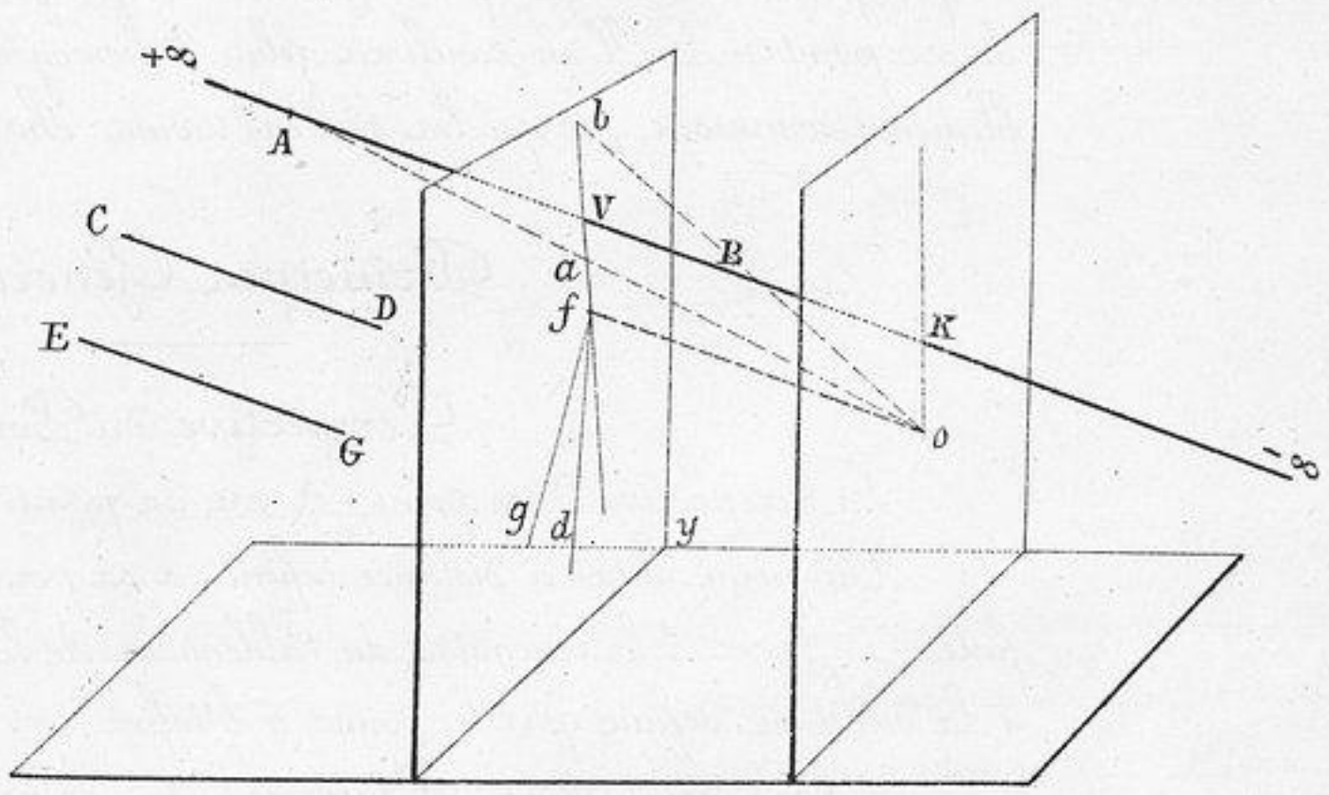
2° Le point situé à l'infini positif, c'est-à-dire à l'infini, derrière le tableau, et du côté opposé au spectateur.

Sa perspective f s'obtient en menant un rayon visuel parallèle à la droite. — On nomme f le point de fuite de la droite.

3° Le point situé à l'infini négatif, c'est-à-dire du côté du spectateur. Sa perspective est également le point f.

4° Le point K situé dans le plan objectif. — Sa perspective se trouve à l'infini sur le Tableau.

Théorème. Deux ou plusieurs droites parallèles AB — CD — EG, auront le même point de fuite f, obtenu en menant par le point de vue une parallèle à leur direction commune et prenant son intersection avec le tableau.

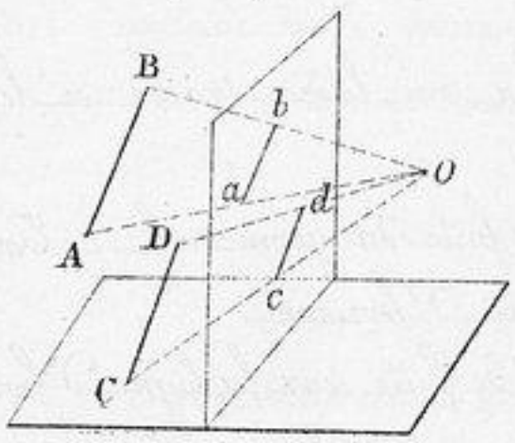


Remarque. En perspective, on déterminera le plus souvent une droite, par sa trace V sur le tableau, et par son point de fuite f, c'est-à-dire par les 2 points situés à une distance nulle ou infinie du tableau.

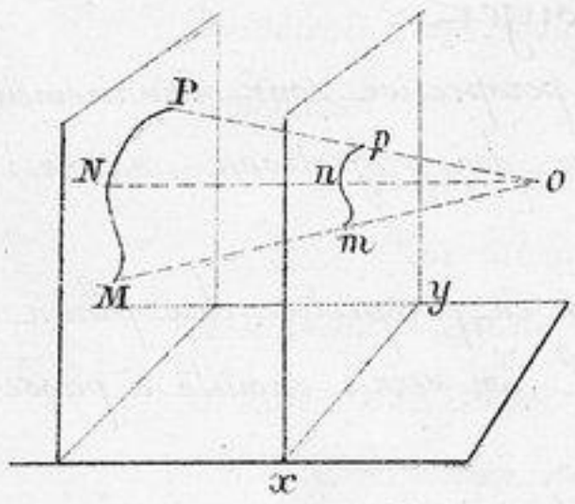
Droites de front. — Figures de front. — Une droite de front, c'est-à-dire parallèle au plan du Tableau, n'a par de point de fuite.

Sa perspective ab est parallèle à la droite de l'espace AB.

Deux droites de front AB et CD parallèles dans l'espace ont leurs perspectives, ab et cd, parallèles.



La perspective déforme non seulement les figures de l'espace, mais elle altère les rapports de 2 segments pris sur une même droite, ce que ne fait pas la projection droite. Cependant il est facile de voir que : Toute figure MNP située dans un plan de front, se perspective mnp semblable à elle-même, c'est-à-dire en étant réduite, mais non déformée

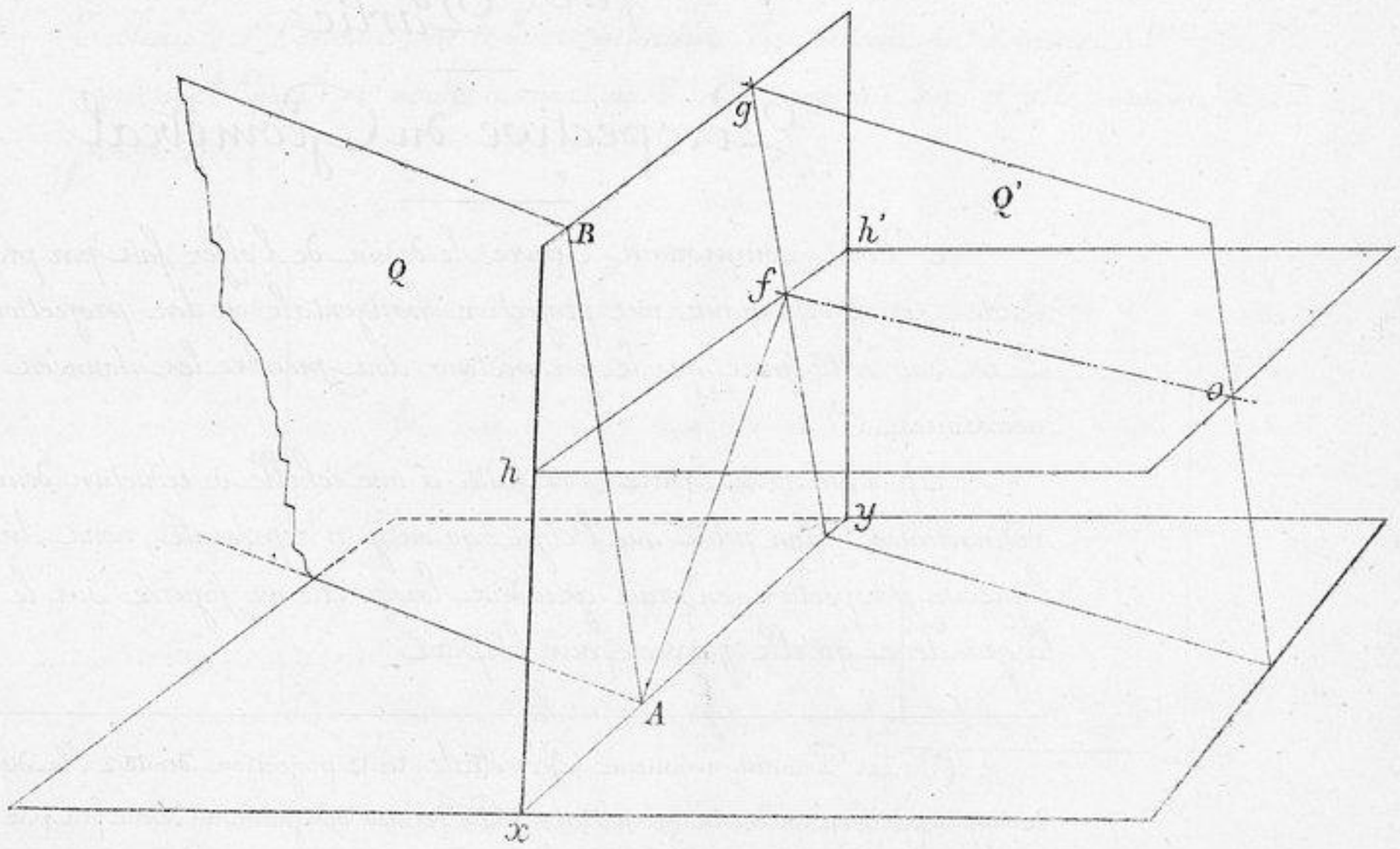


Plan.

Un plan Q sera défini par sa trace AB sur le tableau, et par la perspective Af de sa trace sur le géométral. — On y joindra quelquefois sa ligne de fuite fg. — On nomme ainsi le lieu des perspectives des points du plan situés à l'infini.

On voit que cette ligne de fuite s'obtient en menant par l'œil un plan Q' parallèle au plan donné et prenant son intersection fg avec le tableau.

La ligne de fuite fg d'un plan est parallèle à sa trace AB sur le tableau.



Toute droite tracée sur un plan a son point de fuite sur la ligne de fuite du plan.

Deux ou plusieurs plans parallèles ont leurs traces et leurs lignes de fuite parallèles.

La ligne d'horizon est la ligne de fuite du géométral. — Tous les plans horizontaux ont pour ligne de fuite la ligne d'horizon.

Toute droite horizontale a son point de fuite sur la ligne d'horizon hh'.

Division du sujet.

Les figures que l'on veut mettre en perspective sont ordinairement définies, soit en architecture, soit en mécanique, par des projections, savoir : un plan, une élévation et une coupe.

On commencera par étudier la mise en perspective des plans, c'est-à-dire des figures tracées sur le géométral ; on verra ensuite à passer du géométral aux figures de l'espace.

Nous diviserons donc le sujet en deux parties :

1°. La perspective du Géométral.

2°. La perspective des Élévations.

1ère Partie.

Perspective du Géométral.

Nous nommerons Épure le dessin de l'objet fait par projections droites, et comprenant une projection horizontale et des projections verticales. C'est sur cette épure que le perspecteur doit prendre les données qui lui sont nécessaires.(*)

Quoique cette Épure soit faite à une échelle de réduction donnée, et soit ordinairement plus petite que l'objet qu'on y a représenté, nous dirons qu'une ligne se perspective en vraie grandeur lorsqu'elle est figurée sur le tableau à la grandeur qu'elle possède sur l'épure.

(*) Les Peintres nomment Géométrale toute projection droite — Ils disent : « Un dessin perspectif et un dessin géométral » — Ce dernier désignant un dessin fait par projections droites

On voit facilement que sur un tableau donné il existe un plan de front et un seul, pour lequel toute figure tracée à sa surface est vue en vraie grandeur:

Nous nommerons ce plan: Plan de front des vraies grandeurs.

Perspective d'une droite du Géométral.

Soit AB une droite du géométral (voir l'épure). – xy la trace du tableau; o la projection horizontale de l'œil, et h sa hauteur au dessus du géométral.

L'œil est en général placé sur une perpendiculaire po, élevée au milieu du tableau, et à une distance d qui varie entre 1 fois et 3 fois la largeur du tableau.

Prenons $d = \frac{3}{2} l$, environ.

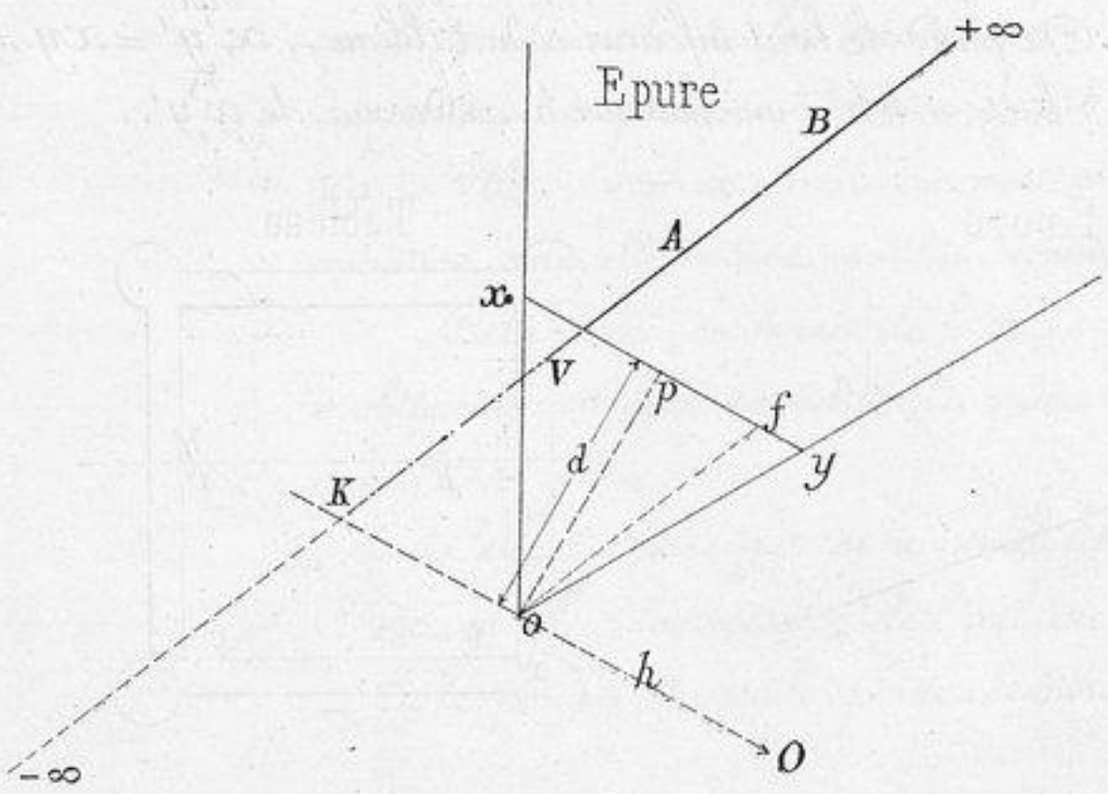
Si l'on mesure les 2 rayons visuels extrêmes ox et oy, l'angle xoy se nomme l'angle optique. – Pour qu'un point apparaisse dans le tableau, il devra être situé dans l'intérieur de cet angle.

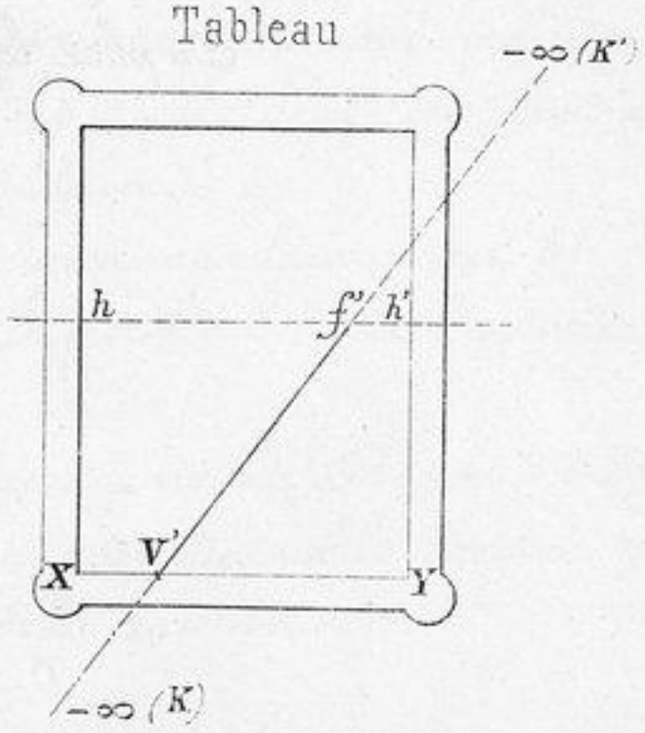
Mettons en perspective la droite AB.

Soit XY le bord inférieur du tableau en perspective;

hh' la ligne d'horizon située à la hauteur h au-dessus de XY.

Nous déterminerons la trace V et le point de fuite f de la droite. – A cet effet, sur l'Epure, prolongeons AB jusqu'à sa trace en V sur le Tableau. – Portons sur le bord inférieur du tableau la distance XV' = xV (pris sur l'Epure) et nous aurons en V' la trace qui est à elle-même sa perspective.





Pour avoir le point à l'infini, c'est-à-dire le point de fuite, menons sur l'épure, et par l'œil, la droite of parallèle à la droite AB.

Le point f est la perspective du point $+\infty$ de la droite AB. — D'ailleurs nous avons vu que ce point doit se trouver sur la ligne d'horizon; on l'obtiendra donc, sur le tableau, en portant sur hh' à partir de h' une distance h'f' = yf (pris sur l'épure) — V'f' est la perspective de la droite.

Remarque. — La région VK de la droite (voir l'Epure), comprise entre le tableau et le plan objectif, et marquée en trait mixte — . — . — . — . — . — . — se perspective au dessous de V', et de V' à $+\infty$ (K'), — le point K ayant sa perspective à l'infini en $+\infty$ (K').

La région $K-\infty$, placée derrière le spectateur et marquée sur l'Epure en pointillé . . . . . , se perspective au-dessus de la ligne d'horizon de $-\infty$ (K') à f' point de fuite. — Elle est virtuelle.

Le point de fuite est la perspective, et $+\infty$ et $-\infty$

Perspective d'un point du Géométral.

(Epure) Soit a le point du géométral; xy le bord du tableau; — o le point de vue; — h la hauteur de l'œil.

On fera passer par ce point 2 droites faciles à mettre en perspective, c'est-à-dire ayant des traces et des points de fuite situés dans le tableau ou très-peu en dehors. — Le point est à l'intersection de ces 2 droites.

Soit ab, ac ces 2 droites, — b et c leurs traces, — f et K leurs points de fuite obtenus en menant par O des parallèles aux 2 droites. —

(Tableau) On prend le bord inférieur du tableau, $x'y' = xy$.
On place la ligne d'horizon hh' à une hauteur h au-dessus de x'y'.

Epure

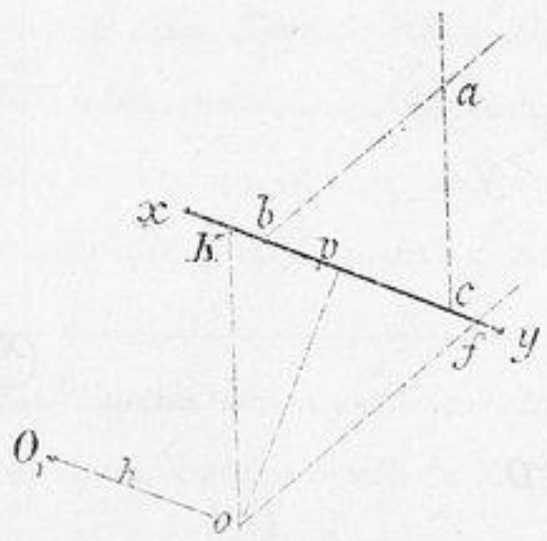
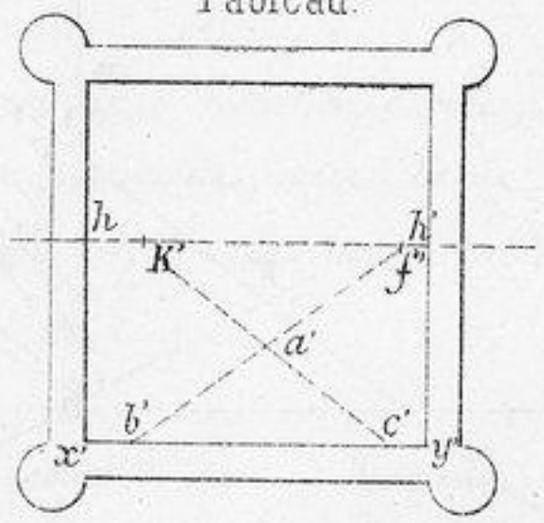


Tableau.



On reporte les tracer b et c sur le bord inférieur x'y' en b' et c' et les 2 points de fuite f et K, en fK' sur la ligne d'horizon. (Ce report de point se fait ordinairement avec une bande de papier.)

Les 2 droites auxiliaires ont pour perspectives b'f' et c'k'. — Le point a a pour perspective a', intersection de ces deux droites.

Perspective d'une série de points en ligne droite.
Point de distance d'une direction donnée.

(Epure) Soient a b c d, — 4 points situés sur la même ligne droite a d, — xy le tableau, — o l'œil, situé à la hauteur h.

(Tableau) On tracera comme ci-dessus: 1° le bord inférieur x'y' — 2° la ligne d'horizon hh'.

(Epure) On prolongera la droite jusqu'à sa trace V. — On cherchera son point de fuite f.

(Tableau) On reportera V en V' sur x'y' et f en f' sur hh', — et l'on aura en v'f' la perspective de la droite.

Il reste à placer les points sur la droite v'f'.

(Epure) Parmi les droites auxiliaires parallèles que l'on pourrait mener par les points a, b, c, ... nous en aurions, telles que bb_1 — cc_1 ..... qui détacheraient sur le tableau des segments Vb_1 — Vc_1 comptés à partir de la trace, égaux aux segments Vb, — Vc .... comptés sur la droite, à partir du tableau.

Prenons celles-là de préférence. — Elles présenteront cet avantage qu'il sera inutile de les tracer sur l'épure et qu'il suffira, sur une bande de papier, de prendre à partir de V, des longueurs égales aux profondeurs Va — Vb ... Vc et de les reporter de V' en a' b' c'. (Cette dernière opération sera elle-même inutile, comme on va le voir)

Cela posé, le point de fuite D de ces lignes auxiliaires aa' bb' s'obtiendra en leur menant la parallèle oD par l'œil. — Et l'on voit que fD = fo.

Cette distance fo se nomme la distance répondant à la direction of. C'est en effet la distance de l'œil au tableau, comptée sur la direction of — Et le point D est le point de distance de la direction of.

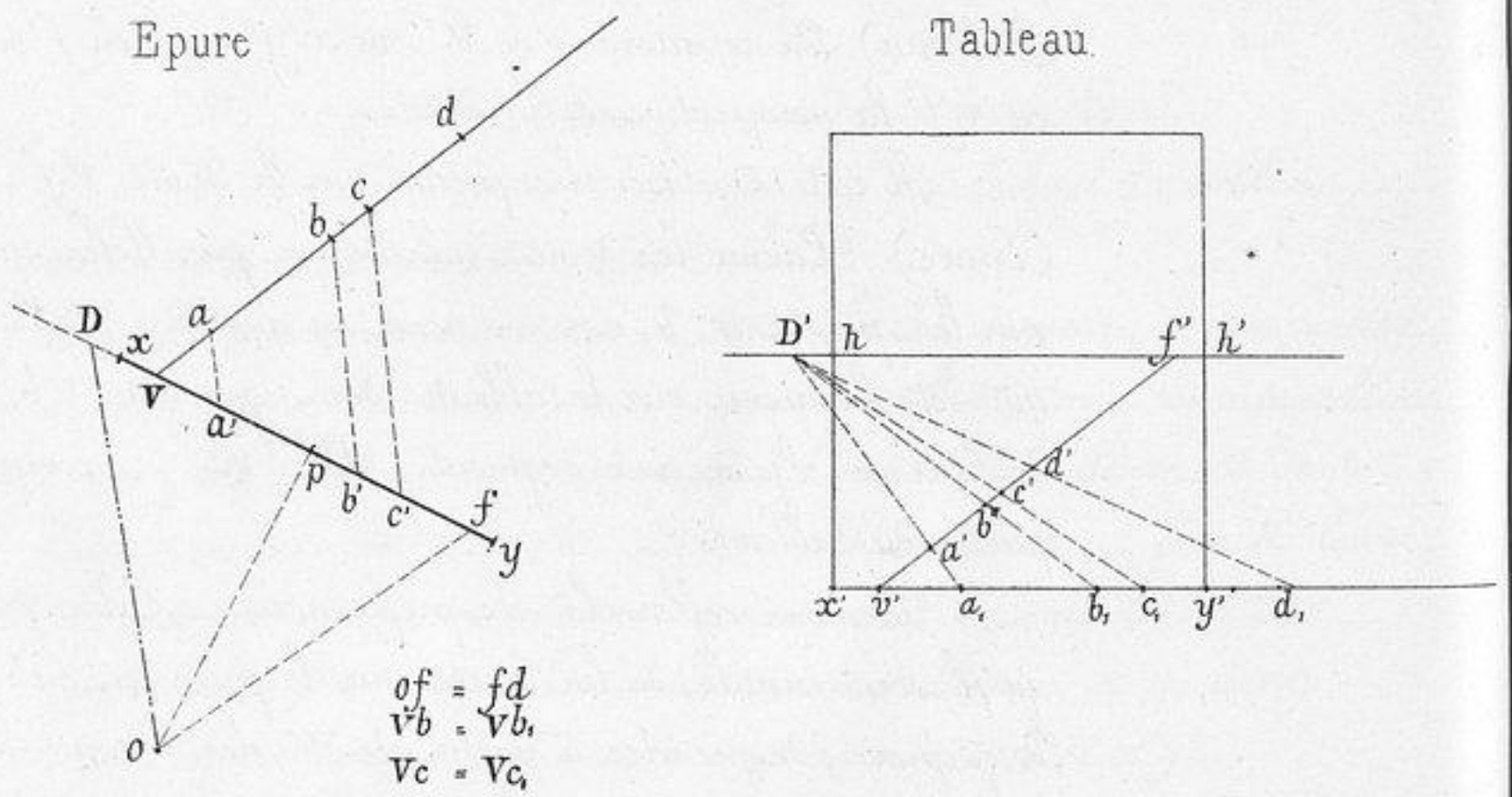
Nous voyons comment on l'obtient. — Nous pouvons en donner la définition suivante :

Le point de distance d'une direction donnée (ayant pour point de fuite f) est le point de fuite des droites qui interceptent dans l'espace sur les lignes de front, des segments égaux à ceux qu'elles interceptent sur les lignes parallèles à cette direction, (c'est-à-dire fuyant au point f, en perspective).

Tableau. Cela posé, on fera la perspective de la manière suivante :

Avec une bande de papier sur l'Epure, on prend les profondeurs Va – Vb – Vc . . . .

Sur le tableau, à droite de V', on les reporte en $v'a_1 - b_1 - c_1 - d_1 -$ sur la ligne de terre x'y'.



of = fd
Vb = Vb₁
Vc = Vc₁

Sur la ligne d'horizon, à gauche de f', c'est-à-dire dans le sens inverse de celui dans lequel ont été portées les profondeurs, on prend f'D' égale à la distance of prise sur l'épure. — On a eu D' le point de distance de la direction fuyante dont f' est le point de fuite.

Joignant a_1 b_1 c_1 . . . . au point de distance D', on a, par recoupement avec la droite V'f' les points cherchés a' b' c' d' . . . .

Amplification du Tableau.

Point de distance réduite.

Le plus souvent, le tableau tel qu'il est donné par l'épure, est trop petit, et il devient nécessaire de l'amplifier. — On fait directement cette amplification de la manière suivante.

(Epure) Prenons comme exemple le cas où nous aurions à mettre en perspective une série de points a, b, c, d, ... disposés d'une manière quelconque.

Nous supposons qu'il n'existe pas de direction particulière sur laquelle ces points soient distribués plus particulièrement

Nous prendrons alors comme fuyantes les droites perpendiculaires au tableau. — Cette direction de droites se nomme **Direction principale**. Son point de fuite, p, est le point de fuite principal. Il se trouve ordinairement au milieu de la ligne d'horizon, en p', pied de la perpendiculaire abaissée du point de vue sur le tableau.

Le point de distance correspondant se nomme **Point de distance principal**. C'est le point de fuite des droites du Géométral inclinées à 45° sur le tableau.

On rapportera sur l'épure les points a, b, c, ... à 2 axes de coordonnées dont l'un sera le bord du tableau xy, et l'autre une parallèle xz à la direction fuyante adoptée, menée soit par le bord x du tableau, soit par tout autre point.

On menera donc (Epure) les perpendiculaires au tableau $aa_1 - bb_1 - cc_1$ .... et les lignes de front $aa_2 - bb_2 - cc_2$ .... jusqu'à la rencontre avec l'axe xz, qui se nomme **Echelle des Profondeurs**.

On va mettre en perspective les points $a_1\ b_1\ c_1$ .. et les points a_2, $b_2\ c_2$; puis, en menant par $a_1\ b_1$ .... des fuyantes principales et par $a_2\ b_2\ c_2$ .... des lignes de front, on aura, par recoupement, les perspectives des points a b c ....

1°. Perspective des fuyantes aa_1, bb_1 .... dd_1.

(Tableau) — Supposons que le tableau soit doublé, on prendra $x'y' = 2f.xy$.

Et la hauteur h sera portée deux fois, en h_1 et h_2. — Par le point h_1 on mènera l'horizontale $h_1 K_1$ — Nous verrons ce qu'elle représente.

Le point de fuite principal est en p'. — L'échelle des profondeurs xz de l'épure aura pour perspective $x'p'$ sur le tableau.

On pourrait mettre en perspective les fuyantes $a\,a_1$ — $b\,b_1$ .... en doublant les largeurs $x\,b_1$ — $x\,a_1$ ..... $x\,c_1$ .. de l'épure et portant ces largeurs doublées sur le bord $x'y'$ du tableau doublé. — Mais on préfère ne rien doubler.

Imaginons que xy se recule parallèlement à elle-même dans le géométral, x glissant sur xz. — En s'éloignant x' glissera sur la fuyante $x'p'$ (Tableau) et y' sur $y'p'$. — La largeur apparente de $x'y'$ ira en diminuant. — Supposons $x'y'$ arrivé en $x''y''$ sur la droite $h_1 k_1$ — à ce moment $x'y'$ est réduit de moitié et ramené à la grandeur de l'épure, c'est-à-dire à la vraie grandeur. — Par conséquent, avec une bande de papier, prenons sur l'épure les largeurs x, b_1, c_1, a_1, d_1 — Reportons-les au tableau sur $x''y''$ en $x''\ b_1\ a_1\ c_1\ d_1$; joignons $p'b_1$ — $p'a_1$ ..... et nous aurons les fuyantes mises en perspective.

Epure

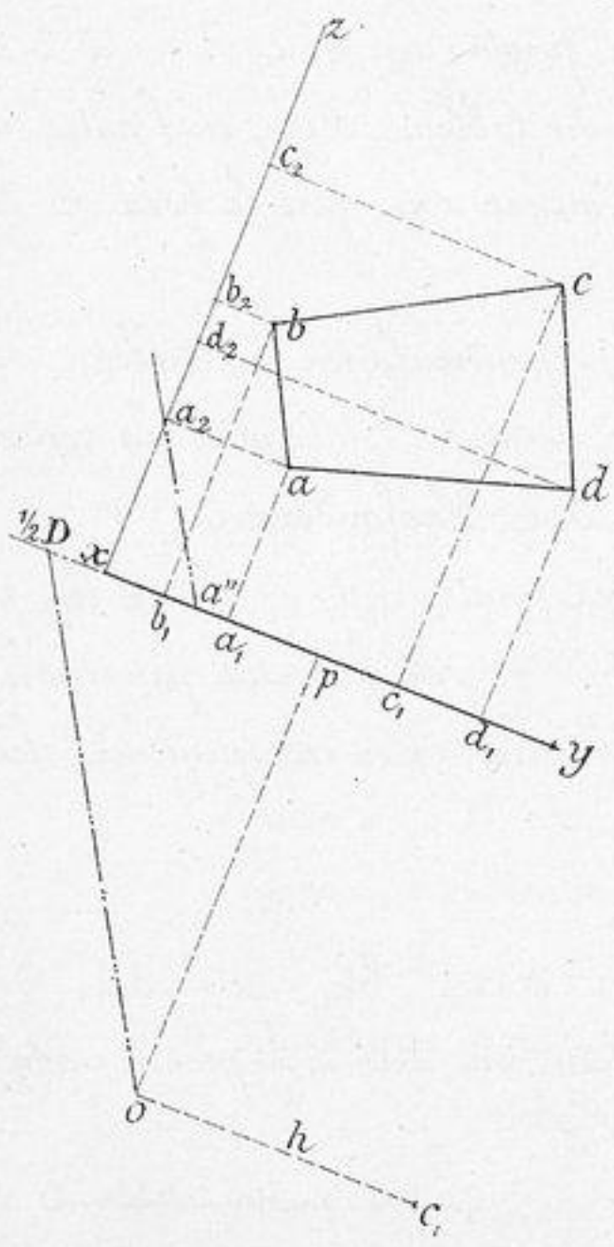
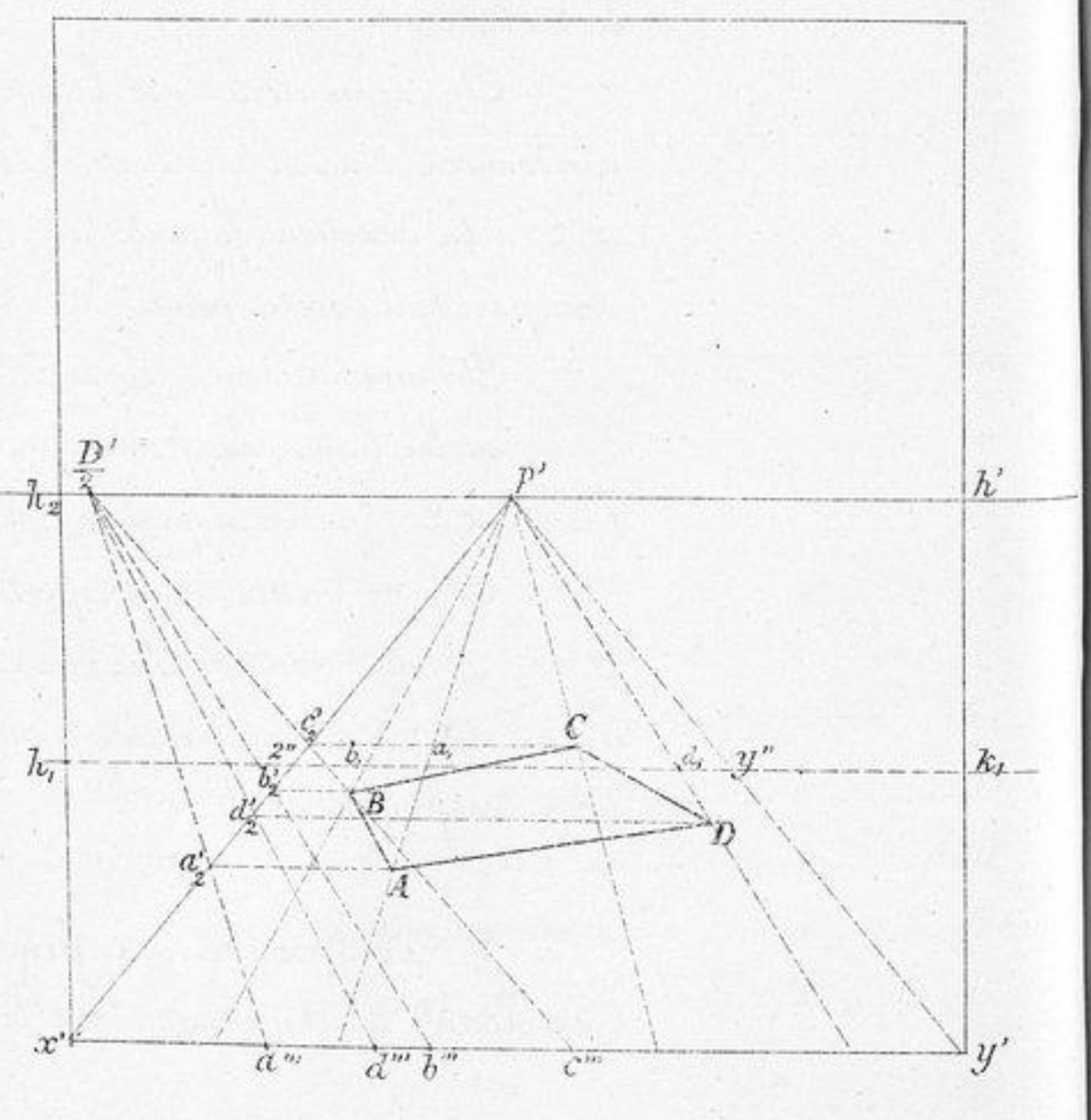


Tableau.



La droite x″y″ se nomme échelle des vraies largeurs, ou simplement Echelle des Largeurs.

Remarque. L'échelle des vraies grandeurs divise la hauteur d'horizon dans le rapport $\frac{h}{H} = \frac{l}{L}$, l étant la largeur du tableau sur l'épure, et L sa largeur amplifiée.

2°. Perspective de l'Echelle des Profondeurs.

(Epure) Pour mettre en perspective les points a_2, c_2 .... situés sur xz, on pourrait comme ci-dessus, mener par ces points des lignes auxiliaires interceptant sur le tableau des segments égaux aux profondeurs de ces points. — Cela nous conduirait : 1° à doubler ces profondeurs et à les porter sur $x'y'$, (Tableau) à droite du point x'. — 2° à doubler la distance OP de l'épure et à la porter sur la ligne d'horizon du Tableau, à gauche de p'. — On aurait ainsi sur cette ligne d'horizon le point de distance. — 3° à joindre le point de distance aux points de profondeurs, ce qui donnerait, par recoupement avec l'échelle des profondeurs, les points cherchés.

Au lieu de cela : sur l'épure menons par a_2 une ligne auxiliaire $a_2 a''$, qui coupe le bord du tableau suivant un segment $\overline{x\,a''} = \frac{1}{2}\ \overline{x\,a_2}$.

Son point de fuite sera le point $\frac{1}{2}D$ obtenu en menant $O\frac{D}{2}$ parallèle à $a_2 a''$, ou en portant la longueur $p\frac{D}{2}$ égale à la demi-distance principale OP.

Si nous amplifions ces données nouvelles sur le tableau, nous prendrons $\overline{x\,a''}$ (sur l'épure), et nous porterons cette longueur doublée, de x' en a''' sur le bord du tableau, et à droite de x'.

Nous prendrons la demi-distance $p\frac{D}{2}$, nous la doublerons et nous la porterons de p' en $\frac{D'}{2}$ sur la ligne d'horizon. Puis joignant a''' et $\frac{D'}{2}$ nous aurons en a'_2 la perspective du point a_2 de l'épure. — Nous remarquerons qu'en doublant ainsi les demi-profondeurs et les demi-distances, nous restituons les profondeurs et les distances de l'Epure, ce qui conduit à la pratique suivante.

On prend les profondeurs $xa_2 - d_2 - c_2$ sur l'épure, et sans les changer on les porte en $a'''\,d'''\,c'''$ .... sur le bord du Tableau, ce qui donne les points de demi-profondeurs. — On prend la distance sur l'épure, et la portant sur la ligne d'horizon on a le point de demi-distance du Tableau amplifié.

Il ne reste plus qu'à joindre le point de demi-distance aux points de demi-profondeurs, pour avoir en a'_2 b'_2 les points de l'échelle des profondeurs.

Théorème.

Le point de demi-distance d'une direction fuyante est le point de fuite des droites du géométral qui interceptent sur des lignes de front des segments qui sont aux segments interceptés sur les fuyantes, dans le rapport de 1 à 2.

On généralisera ce théorème pour le point de distance $\frac{m}{n}$.

3°. Perspective des points a, b, c ... de l'Epure.

(Tableau) Par les points a'_2 b'_2 c'_2 d'_2 de l'échelle des profondeurs on mène des lignes de front jusqu'à la rencontre avec les fuyantes $p'b_1$ — $p'a_1$ .... et l'on a en A — B — C .... les perspectives demandées.

Généralisation de la Méthode.

Si le tableau est amplifié dans le rapport $\frac{m}{n}$ en largeur, la hauteur d'horizon doit être amplifiée dans le même rapport.

L'Echelle des vraies grandeurs x"y" divise la hauteur amplifiée dans le rapport inverse $\frac{n}{m}$.

Le point de fuite p' des directions fuyantes divise la ligne d'horizon amplifiée comme il la divise sur l'épure.

Telles sont les seules amplifications à faire ; — après quoi :

Les largeurs sont portées en vraie grandeur sur l'échelle des largeurs.

La distance est portée en vraie grandeur sur la ligne d'horizon, et donne le point de distance $\frac{n}{m}$ du tableau.

Les profondeurs sont portées en vraie grandeur sur le bord du tableau et donnent les points de profondeurs $\frac{n}{m}$ de ce tableau.

L'épure s'achève ensuite comme si l'on n'avait pas amplifié.

Perspective directe sur le Géométral.

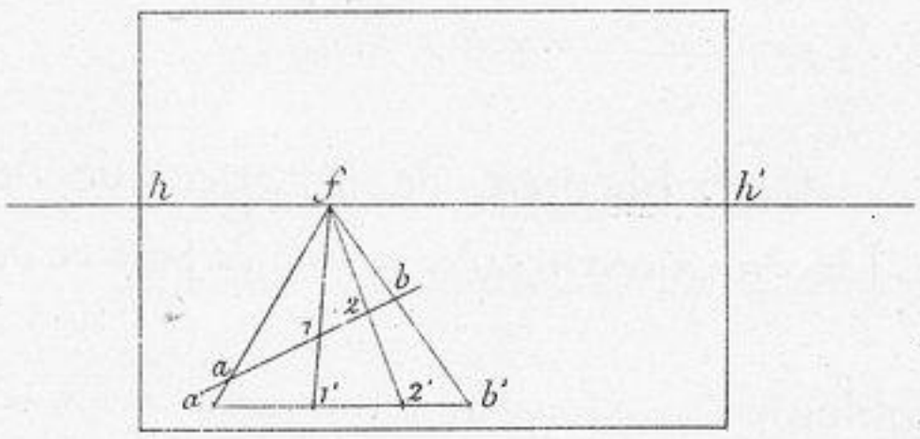
Dans cette partie de la perspective, on se propose de résoudre directement les problèmes sur les figures déjà mises en perspective sur le géométral.

Problème 1. Partager une droite de front en parties égales.

Puisque les rapports dans lesquels une ligne de front est divisée, se conservent en perspective, il suffit de diviser la perspective de cette droite en parties égales.

Problème 2. Partager une ligne fuyante ab, en parties qui soient entre elles dans un rapport donné.

On joindra les 2 points a et b à un point quelconque f de la ligne d'horizon. On inscrira une ligne de front a'b' entre ces deux fuyantes.

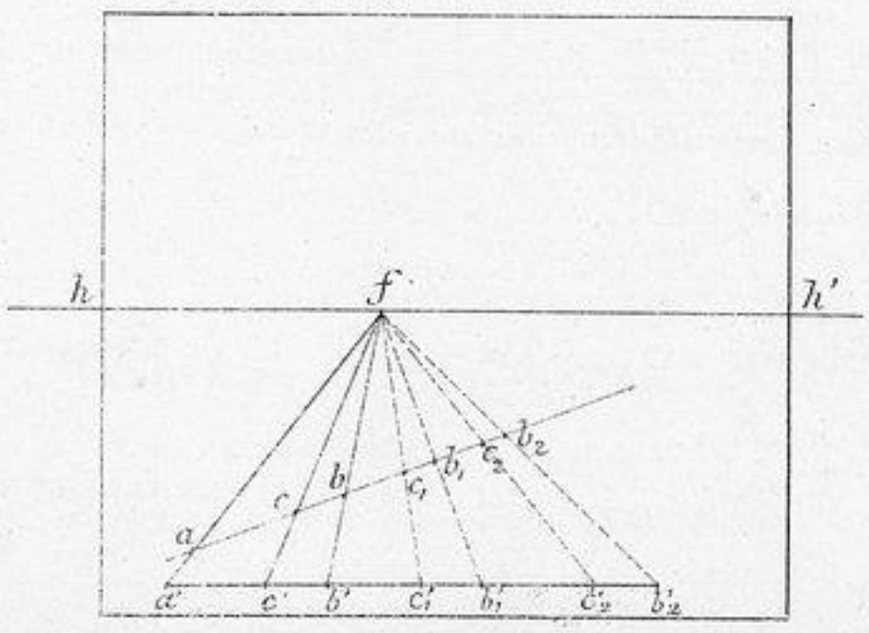


— On divisera a'b' dans le rapport donné, aux points 1' et 2'. On menera les fuyantes f1' — f2', et aux intersections avec la droite ab on aura aux points 1 et 2 les points demandés.

En effet, — dans le géométral, les fuyantes f1' — f2' .... fb' .... sont parallèles. — Les 2 sécantes ab et a'b' les recoupent en donnant des segments proportionnels. C.Q.F.D.

Problème 3. — Prolonger sur une droite du géométral une division amorcée sur cette ligne.

Soit ab un fragment de droite du géométral divisé dans un rapport quelconque par le point c. On veut prolonger au delà du point b, la division amorcée en a c b.



On mène les trois fuyantes quelconques fa — fb — fc.
On les coupe par une ligne de front a'c'b'. Sur cette ligne de front on répète la graduation a'c'b' en $c'_1 b'_1$ — $c'_2 b'_2$ .... autant de fois qu'on le désire :
— On mène les fuyantes par ces points, et l'on obtient par recoupement avec ab prolongée, les

pointe demandée $c_1 b_1 - c_2 b_2$ .... etc. ...

Applications : 1° continuer sur une route un tracé d'arbres ; — 2° sur un mur, continuer un tracé de fenêtres et de tronceaux.

Problème 4. Trouver le rapport exact dans lequel une droite ab est divisée par un point c.

(Même figure) On mène les fuyantes fa — fb — fc. — On les coupe par une ligne de front a'c'b' et l'on obtient sur cette ligne le rapport exact.

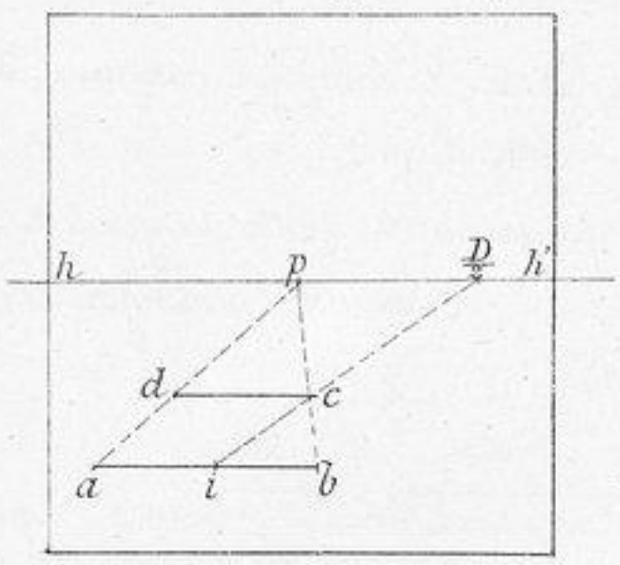
Remarque. Les problèmes précédents ne nécessitent pas la connaissance du point de fuite ni de distance principaux. Ils ont leur solution indépendante de la position du spectateur.

Problèmes de perspective directe
exigeant la connaissance des points de fuite et de distance principaux.

Problème 5. Construire un carré sur une droite de front ab comme côté.

Soit p le point principal, et $\frac{D}{2}$ le point de demi-distance[1].

Menons les fuyantes principales ap — bp. Ces droites seront les côtés du carré. Prenons le milieu i de ab, et joignons-le au point $\frac{D}{2}$.

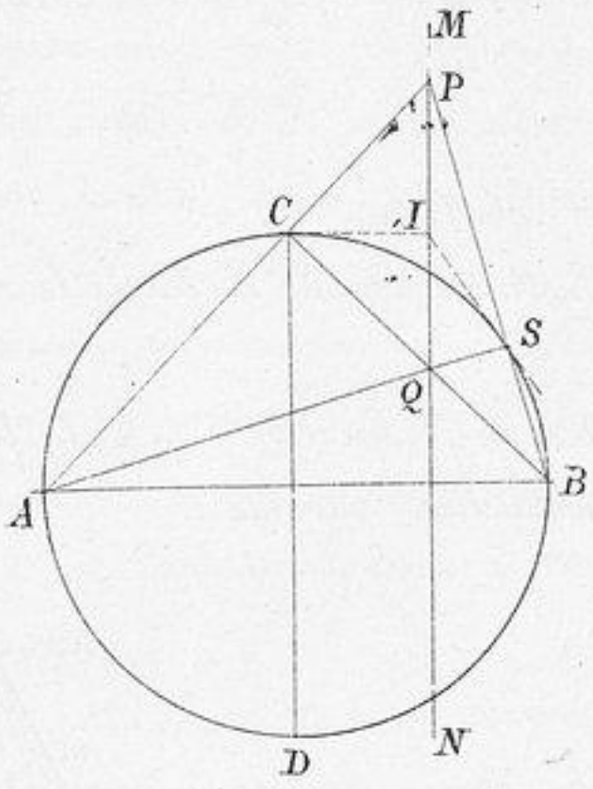


Nous savons que cette droite fuyante au point de demi-distance intercepte sur la ligne de front ab, un segment $\overline{ib}$ qui est la moitié du segment bc intercepté sur la fuyante principale. — On a donc dans l'espace $\overline{bc} = 2\,\overline{bi}$ et bc = ab.

Menons ensuite la ligne de front cd, et nous aurons en a b c d la perspective d'un carré.

Problème 6. — Sur une droite de front ab comme diamètre, construire un cercle.

1ère Méthode, — fondée sur les remarques suivantes :



soit AB, CD, 2 diametres à angle droit d'un cercle.

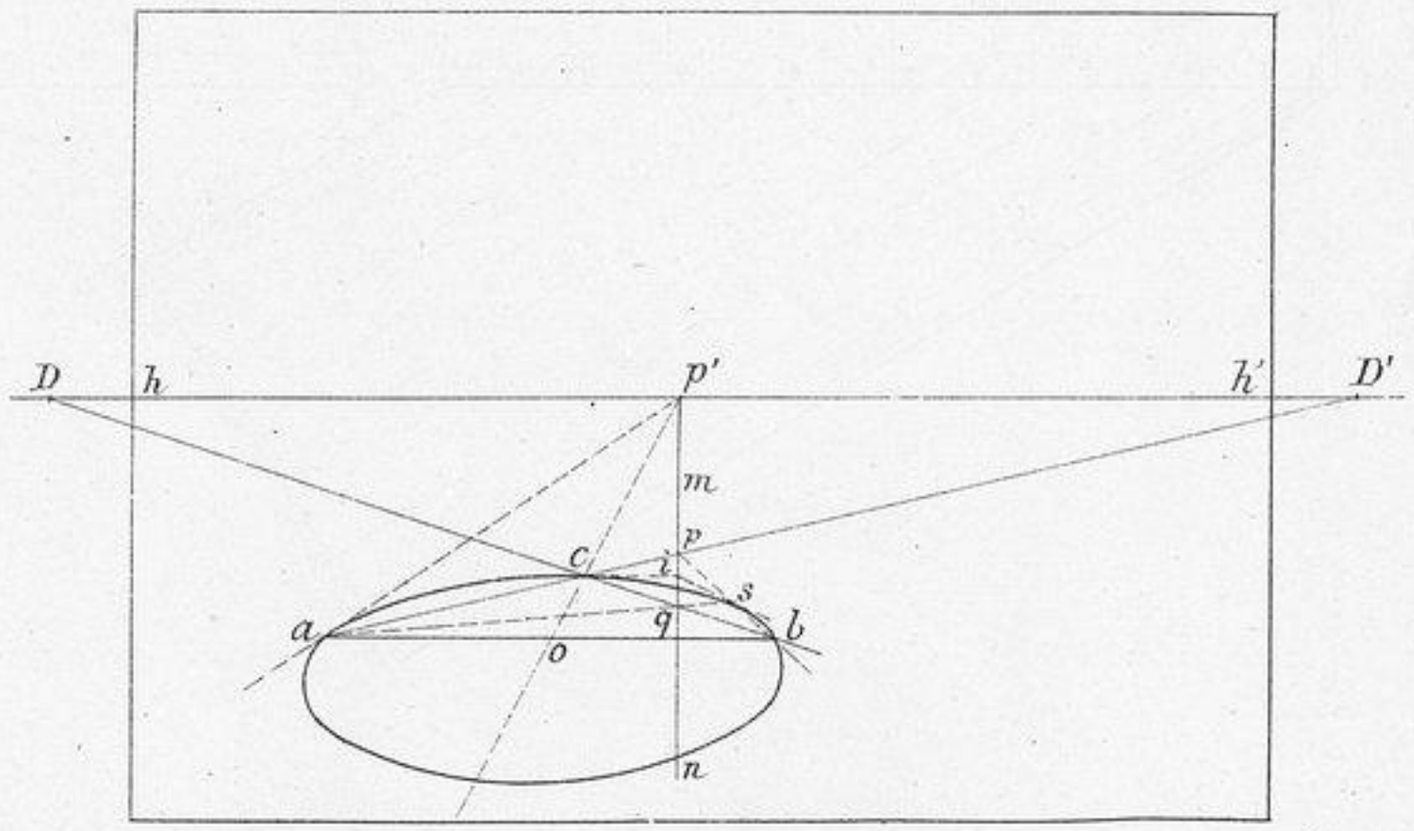
Menons une perpendiculaire quelconque MN sur le diametre AB. — Menons les lignes à 45° AC et BC. — Prenons les intersections P et Q avec la ligne MN. — Joignons AQ et BP; ces 2 droites se rencontrent en un point S, qui appartient au cercle. (Facile à démontrer en considérant les 3 droites PQ — AQ — BQ comme les 3 hauteurs d'un même triangle APB.)

De plus, si l'on mène CI et IS, cette dernière droite est tangente au cercle.

On voit immédiatement l'application de ce qui précède à la mise en perspective d'un cercle.

Les lignes à 45° AC, BD, fuient aux 2 points de distance D et D'. — Les lignes parallèles à AB, restent de front.

Les lignes perpendiculaires à AB, fuient au point principal p'



Remarques géométriques. — La courbe est une conique. — La ligne d'horizon est la polaire du point O, perspective du centre.

En effet, si par un point quelconque de la ligne hh' on menait deux

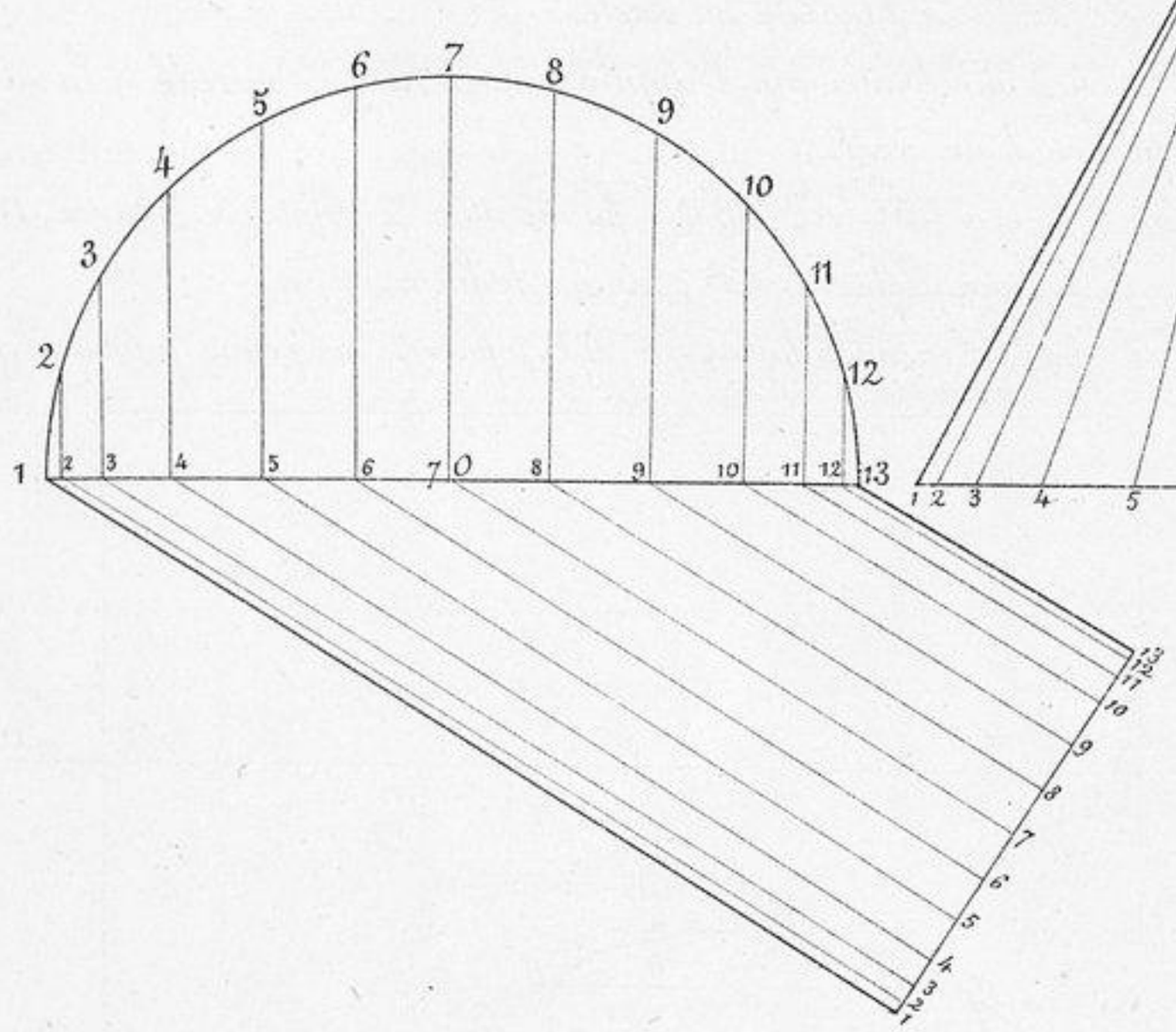
deux tangentes à cette conique, ces droites seraient les perspectives de 2 tangentes au cercle parallèles entre elles, — et leur corde de contact passerait par le centre.

2e Méthode : Par Echelles.

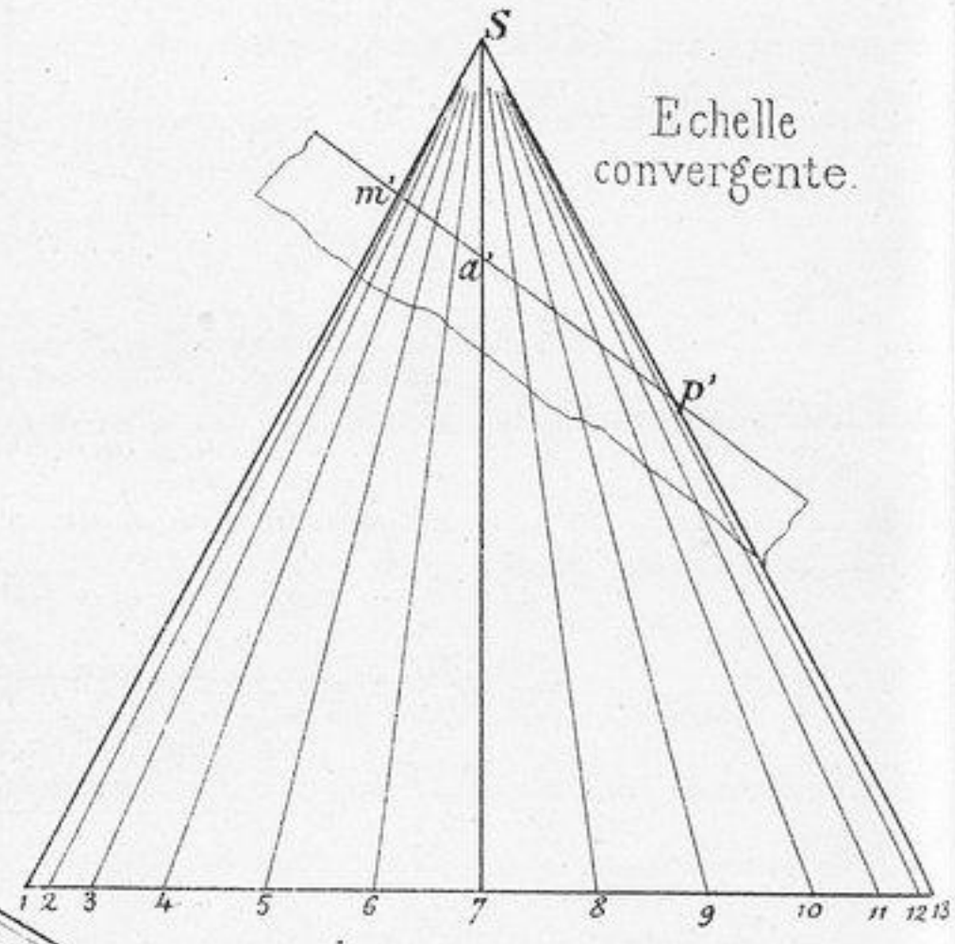
On commencera par construire, comme ci-dessus, le carré circonscrit au cercle.

Soit m n p q, ce carré en perspective. — Cela fait, exécutons à part, et une fois pour toutes, la construction suivante.

Echelle parallèle.



Echelle convergente.



O est un cercle quelconque. On l'a divisé en un nombre quelconque de parties égales, 24 par exemple. — (Cette division par 24 est utile pour les cannelures des colonnes, en architecture.)

On a projeté les points de division sur le diamètre, en 1, 2, 3, 4 ...., et par ces points on a mené des parallèles 1'_2'_3'..... qui constituent une échelle de réduction, que l'on garde pour s'en servir par la suite, dans de très-nombreuses occasions, comme on le verra plus tard.

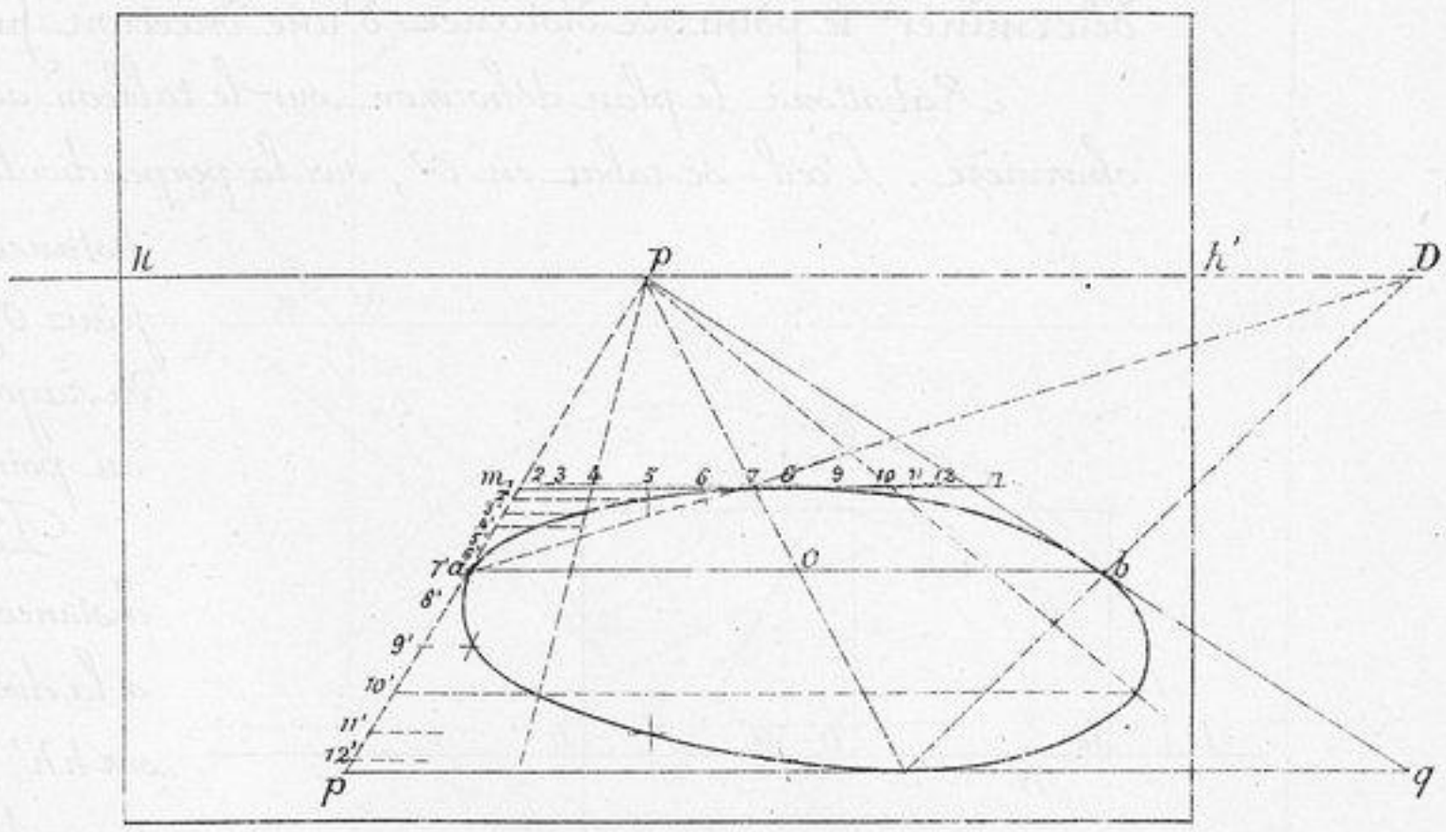
Il est évident, que si sur les côtés d'un carré nous portons des divisions proportionnelles à celles de notre échelle, et si nous menons par les points de division des parallèles aux côtés du carré, nous aurons par recoupement des points du cercle inscrit.

Nous appliquerons cette construction en perspective de la manière suivante.

1°. Dans le carré perspectif, nous tracerons à peu près et fort légèrement au crayon la conique inscrite; dans le seul but de savoir approximativement où sont les points exacts.

2°. Sur le côté de front m n, nous reporterons les divisions de l'échelle en 1, 2, 3 ....

3°. Sur un côté fuyant m p, nous ferons une division proportionnelle à la précédente, soit en nous servant des points 1.2.3 .... déjà obtenus, et les reliant par un point de fuite auxiliaire D aux points à obtenir, soit en opérant comme au problème 2.



Soient 1' 2' 3' .... les points de division ainsi obtenus.
On menera les fuyantes principales par 1.2.3. ....; les lignes de front

par les points 1'.2'.3' ....., ce qui, par recoupement, donnera les points du cercle perspectif.

On remarquera que ce tracé charge très peu le dessin.

Remarque. — Ce procédé est encore susceptible de simplifications.

En effet, joignons à notre première échelle parallèle, une 2e échelle convergente S étant le point de convergence.

Puis, revenons au tableau. Le point a divise la fuyante mp, en son milieu dans l'espace, mais non en perspective.

Relevons sur une bande de papier les 3 points m a p. — Par tâtonnements inscrivons cette bande dans l'échelle convergente; à savoir: le point m sur $S\bar{1}$; — le point p sur $S\_\bar{13}$ et le point a sur S7. — Soit m'a'p', la bande de papier inscrite. Prenons les points de rencontre avec les autres lignes de l'échelle, puis reportons-les au tableau sur la ligne mp, et nous aurons sans aucun tracé la division 1'.2'.3'..... — On achèvera comme ci-dessus.

On voit que l'échelle convergente seule pourra suffire, et donner aussi bien les points de front que les points fuyants.

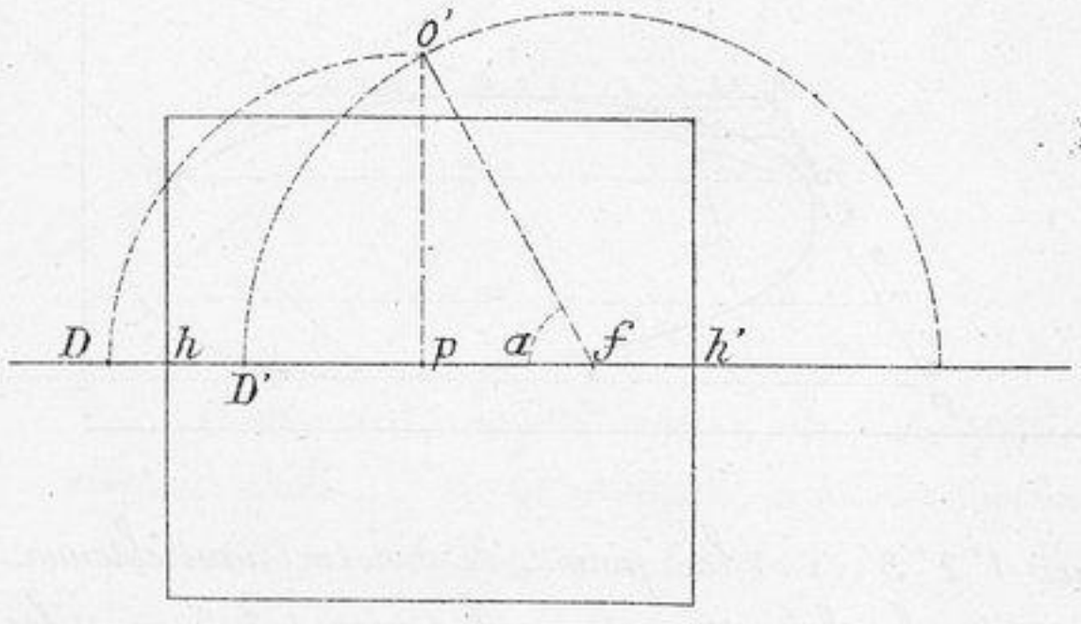
Problème 7.

Connaissant les points de fuite et de distance principaux, déterminer le point de distance d'une direction fuyante quelconque, f.

Rabattons le plan d'horizon sur le tableau autour de hh' comme charnière. L'œil se rabat en o', sur la perpendiculaire po', égale à la distance principale. Si l'on joint o'f, on a le rabattement du rayon visuel qui aboutirait au point f.

Par suite o'f est la distance accidentelle répondant à la direction f. — En portant sur hh', fD' = fo' on aura le point de distance de la direction f.

Remarque. — α est l'angle de la direction fuyante f avec le tableau.



Problème 8.

Connaissant le point principal p, le point de fuite f d'une direction donnée et son point de distance accidentelle D', déterminer la distance principale.

Même figure; — solution évidente.

Relèvement du Géométral.

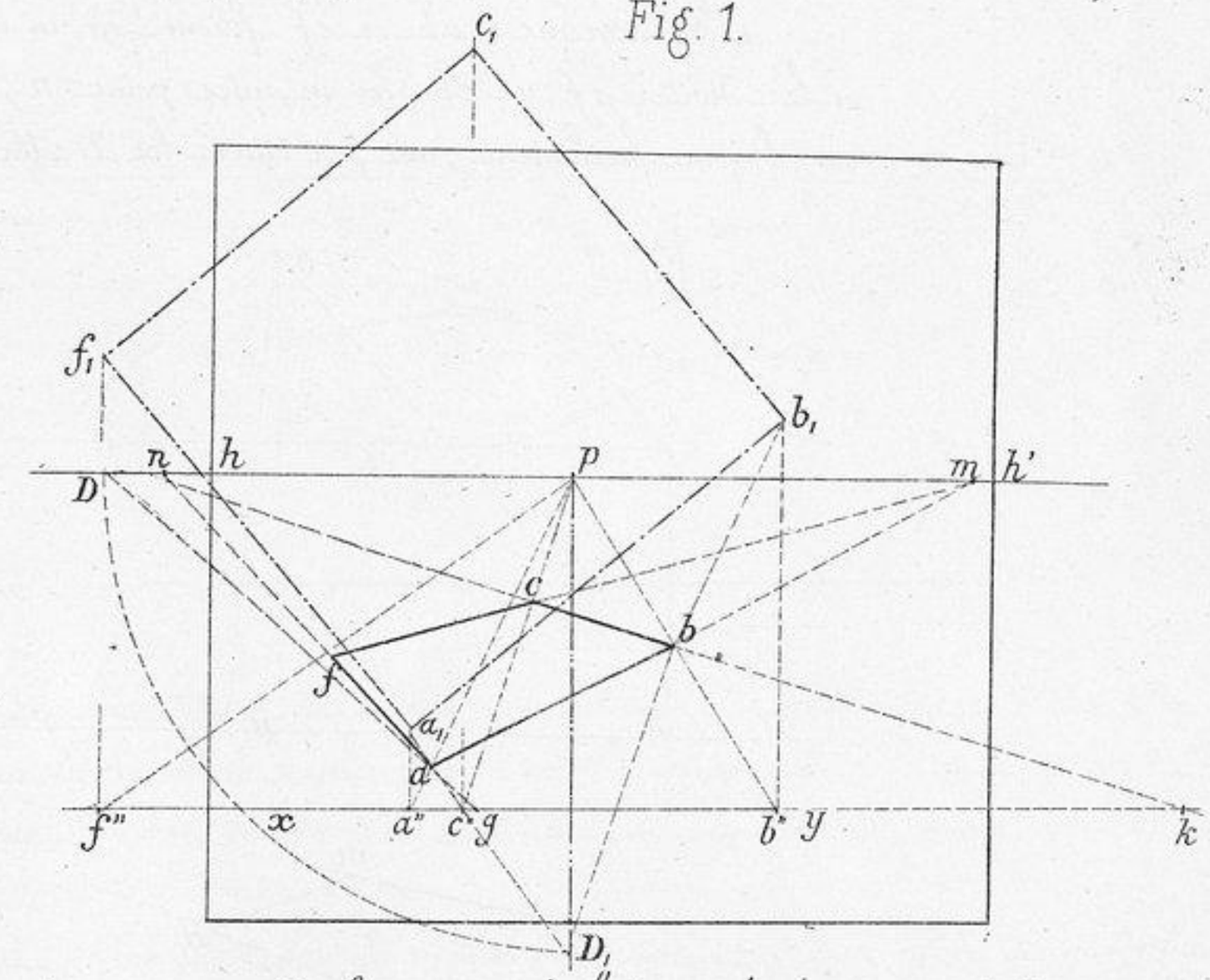
On relève le géométral, ou plutôt une portion du géométral, en la faisant tourner autour d'une ligne de front comme charnière, et l'amenant à être elle-même de front.

Dans cette position elle se perspective semblable à elle-même, ce qui permet de résoudre tous les problèmes d'angles ou de rapports. — En rabattant ensuite, autour de la même charnière, on remet les figures en place.

Problème 9.

Sur une ligne fuyante ab comme côté, construire un carré (fig. 1).

Fig. 1.



Soient p et D les points de fuite et de distance principaux.
Prenons une charnière de front quelconque xy; — et relevons les

point a en b.

La fuyante pa, est, dans l'espace, perpendiculaire sur xy qu'elle perce en a". — Elle se relève suivant une perpendiculaire réelle a"a_1.

Pour en chercher la vraie grandeur, réduite à l'échelle du plan de front xy, joignons a D ; — Cette ligne intercepte sur xy un segment a"g égal, dans l'espace, au segment fuyant a"a.

Portons a"g en a"a_1, et nous aurons le relèvement cherché.

Remarque. — Si l'on n'avait eu que le point $\frac{1}{2}$D, ou $\frac{1}{3}$D, il eût fallu doubler ou tripler le segment a"g.

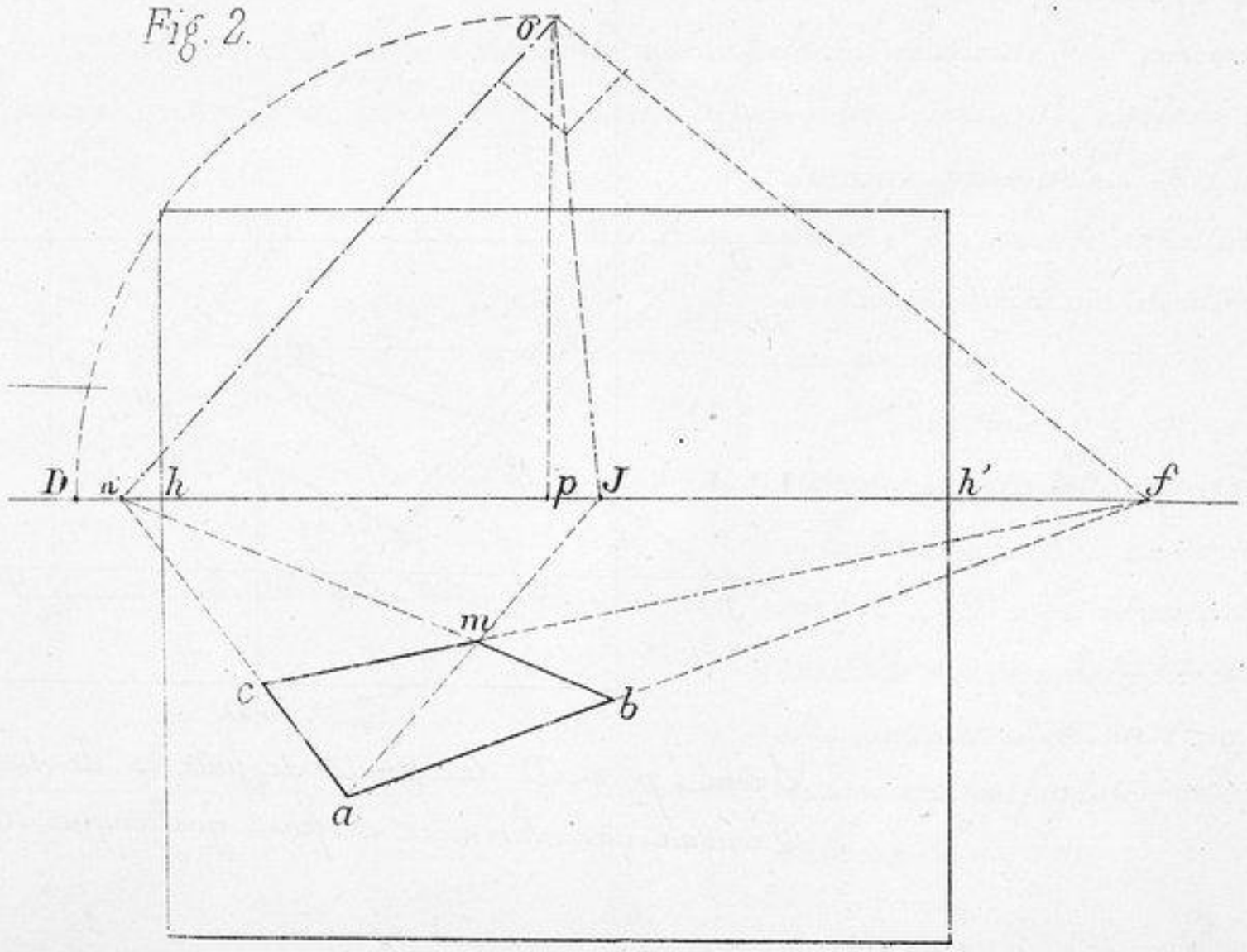
On relèvera de même le point b en b_1.

Remarque. — Si l'on joint le point relevé a_1 au point par terre a, et si l'on fait de même pour bb_1, ces 2 droites sont parallèles dans l'espace et fuient au point de distance inférieur D_1 ..., situé sur la verticale pD_1 au-dessous de hh' et à une distance pD_1 = p D. Il existe aussi un point de distance supérieure.

Sur la droite a_1 b_1 relevée, on construit le carré a_1 b_1 c_1 f_1 ; puis on rabat les points c et f, par une construction inverse de la précédente.

Remarque. ab et cf fuient en un même point m de hh' — si les droites af et cb, en un autre point n, ce qui permettrait de terminer l'épure facilement, une fois tracés les 2 côtés ab et af.

Fig. 2.



2e. Solution (fig. 2).

On prolongera ab jusqu'à son point de fuite f. Puis prenant le rabattement O' de l'œil sur le tableau, on obtiendra comme au problème 7 le rabattement O'f, du rayon visuel parallèle à ab de l'Espace.

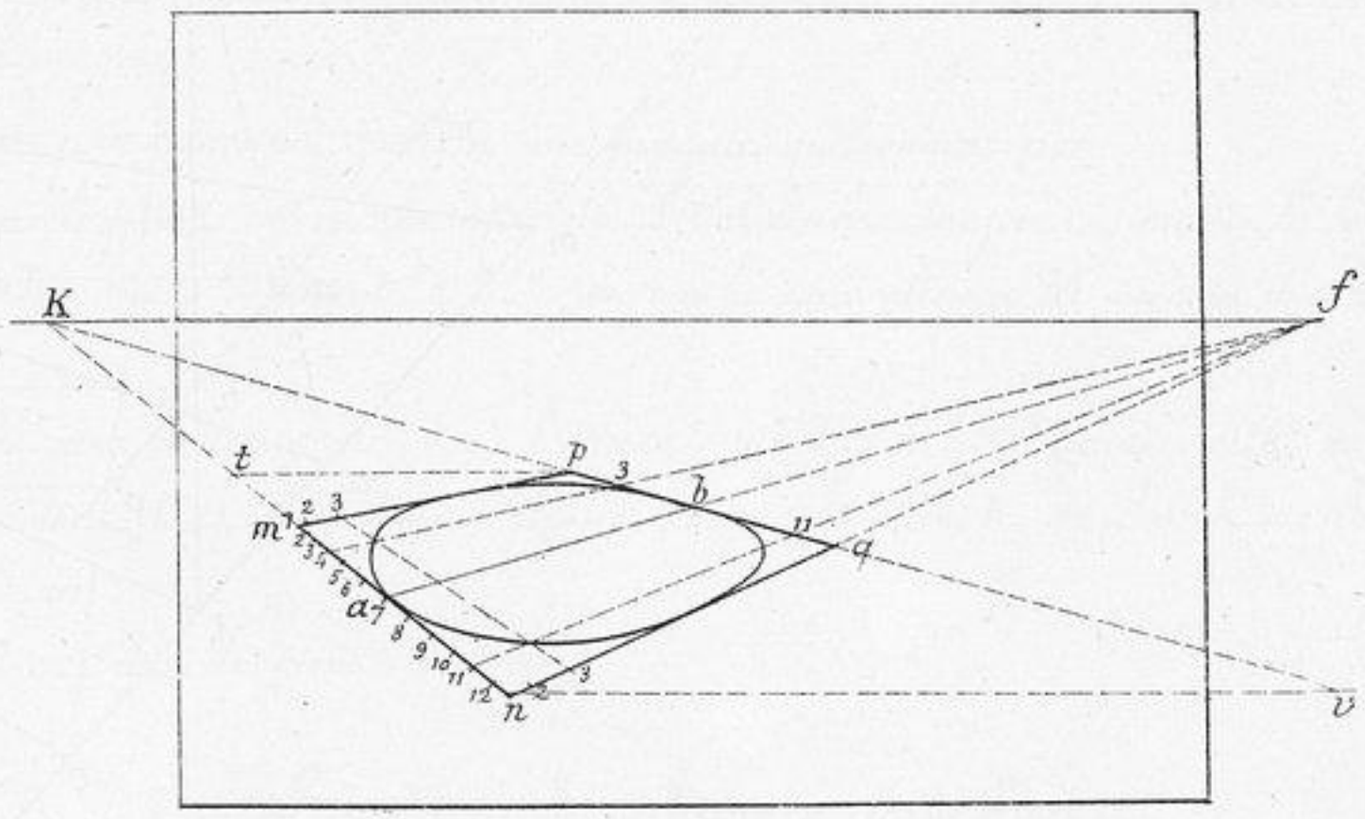
Menant O'K perpendiculaire à O'f, on aura en K le point de fuite des droites perpendiculaires à ab de l'espace. — Menant O'J, bissectrice de l'angle KO'f, on aura en J le point de fuite de la diagonale du carré.

— On l'achèvera donc facilement, à l'aide des deux points de fuite f et K

Problème 10.

Sur une droite fuyante ab comme diamètre, construire un cercle.

On construira comme au problème précédent, le carré m n p q ; qui serait circonscrit au cercle. — a est le milieu de m n, dans l'espace, et b le milieu de p q.



Sur une bande de papier on relèvera les points m. a. n. — On inscrira la bande de papier sur l'échelle convergente, le point m sur S1 — a sur S7 — et n sur S13. — Puis on reportera les points sur m n, en 1. 2. 3 . . . .

On fera quatre fois la même opération sur les 4 côtés du quadrilatère m n p q, et joignant les points deux à deux, on aura par recoupement

les points du cercle perspectif.

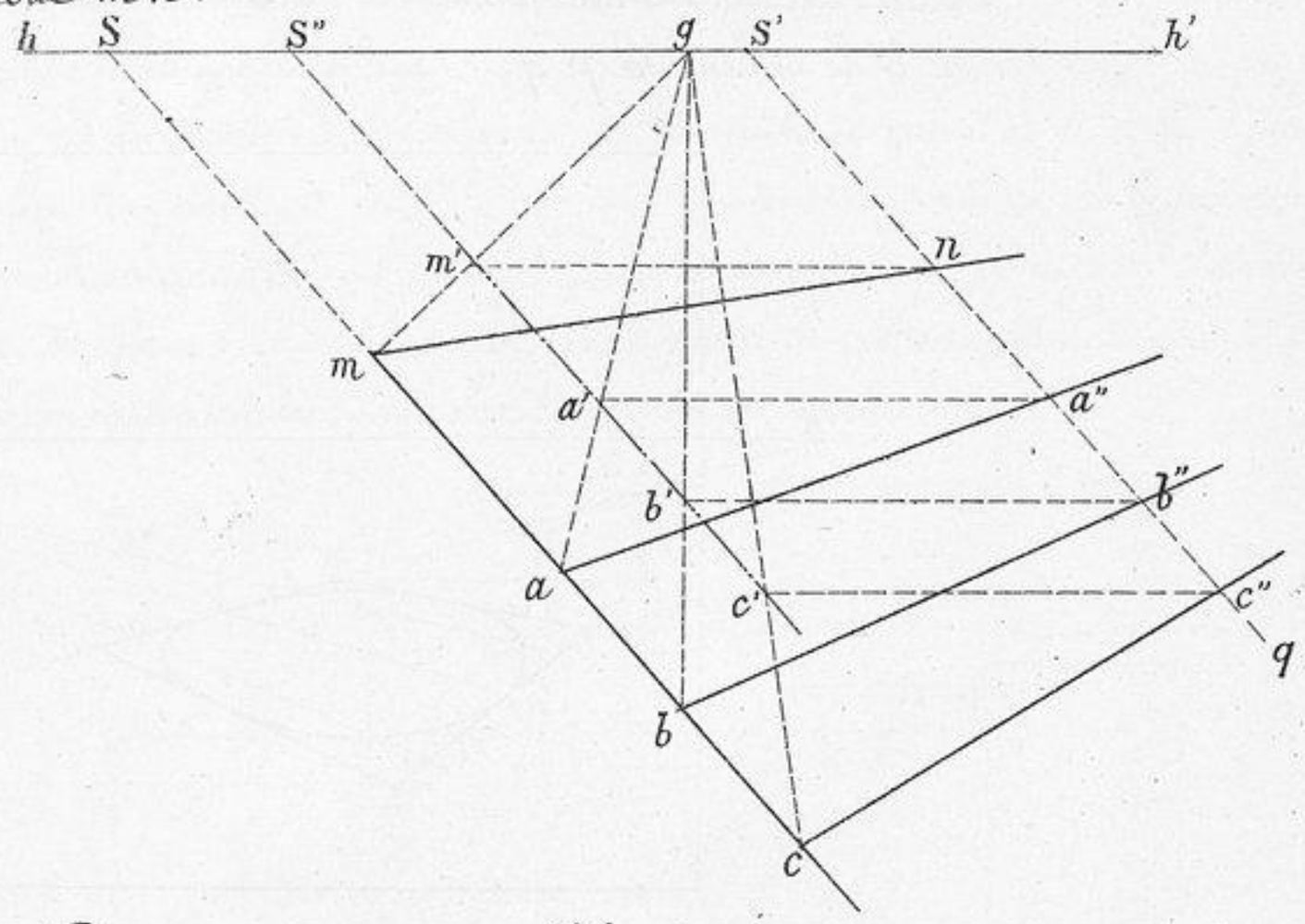
On aurait pu porter les divisions sur les diagonales au lieu des côtés, — ou bien encore sur 2 lignes de front quelconques tp et n v.

2e. Solution.

On aurait pu faire le relèvement du géométral — Relever la droite ab. — Construire sur ab relevé, comme diamètre, un cercle, et le rabattre ensuite point par point.

Problème 11.

Mener par un point a, ou par une série de points en ligne droite a, b, c .... des lignes fuyantes au point de fuite inaccessible de la droite m n.



Par n, menons une parallèle nq à mc.

Prenons un point de fuite quelconque g; — joignons gm — ga — gb — gc.

Menons la parallèle n m' à la ligne d'horizon et par le point m' où elle rencontre la fuyante gm, menons une parallèle à nq..

Nous déterminons ainsi les segments S'' m' a' b' c' proportionnels aux segments S. m. a. b. c.

Reportons les longueurs m' a' b' c' en n a'' b'' c''... sur la droite nq, et joignons a a'' — b b'' — c c'', nous aurons les droites demandées.

2.e Partie.

Perspective des Élévations.

Problème. — Etant donnée la projection d'un point sur le Géométral, et sa hauteur au-dessus du Géométral, construire la perspective de ce point.

Supposons que le tableau soit triplé. — Soit m la perspective de la projection d'un point sur le géométral, établie comme ci-dessus.

Sur l'épure on mesurera en vraie grandeur la cote h du point.

L'échelle des vraies largeurs x"y" se trouve, puisque le tableau est triplé, au tiers de la hauteur de la ligne d'horizon; et cette ligne x"y" est la trace sur le géométral du plan de front des vraies grandeurs. — Toute figure tracée dans ce plan de front se perspective à la grandeur qu'elle possède sur l'épure. — Une verticale de hauteur h sur l'épure, y serait figurée avec cette hauteur.

Cela posé, menons par m une fuyante quelconque p m.

Par le point m" où elle rencontre l'Echelle des largeurs, menons la verticale m"M" = h, puis la fuyante pM" jusqu'à la rencontre en M avec la verticale du point m.

On aura évidemment, dans l'espace, mM = m"M", mais m"M" = h; donc le point M est bien dans l'espace, à une hauteur h au-dessus de la projection m.

M est donc le point cherché.

Emploi d'un plan fuyant auxiliaire.

Echelle des Hauteurs.

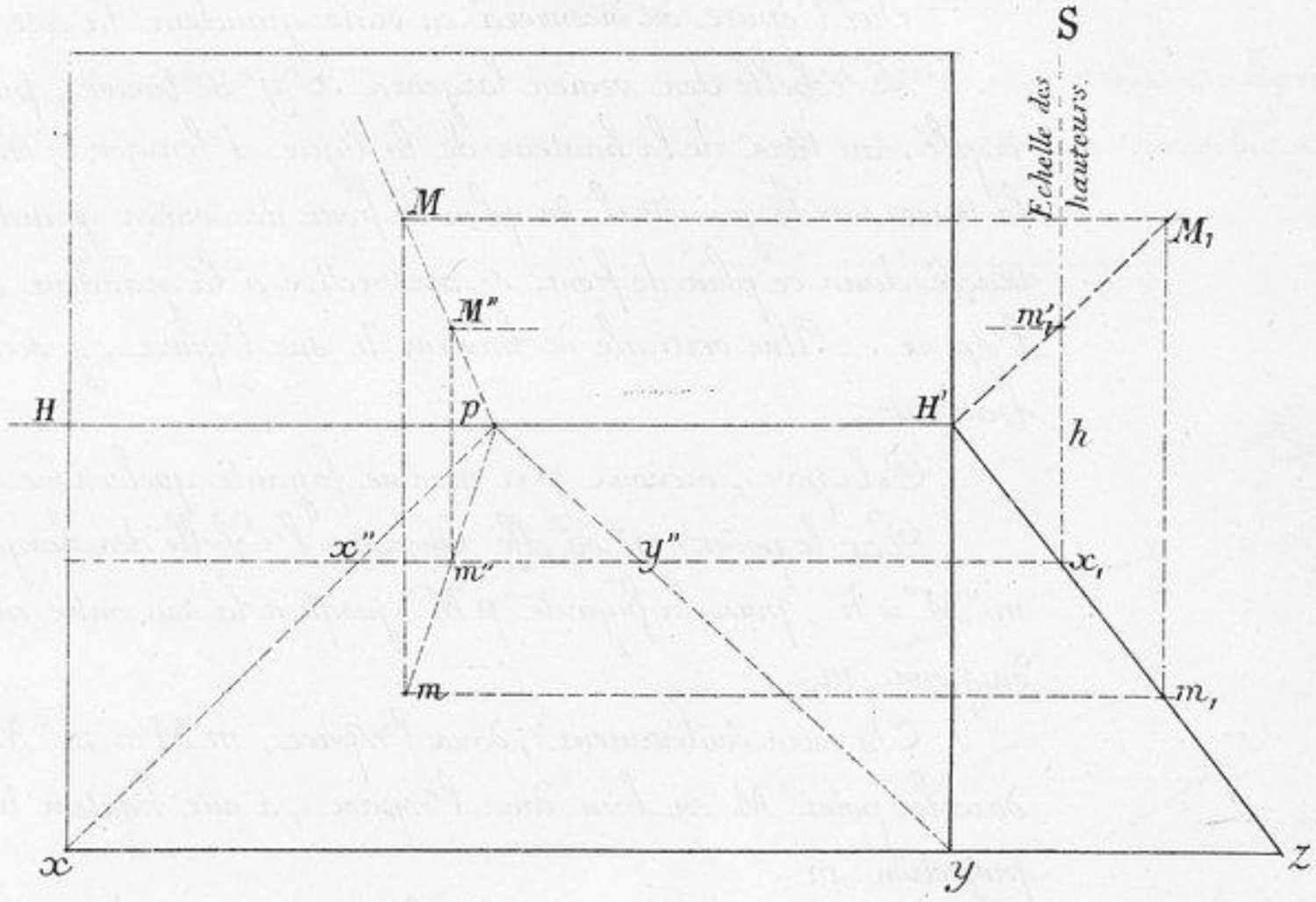
La construction précédente a l'inconvénient de tracer de nombreuses lignes dans la partie importante du Tableau. — Lorsque l'on a une série de points à mettre en hauteur, on procède comme il suit:

Sur le côté du tableau, en H'Z, on trace une fuyante quelconque ayant une inclinaison aussi voisine que possible de 45°, afin de donner plus de précision aux recoupements.

Cette droite est la trace sur le géométral d'un plan vertical fuyant.

Soit x_1 le point où l'échelle des largeurs rencontre la trace H'z de ce plan. La verticale $x_1 S$, se nomme Echelle des vraies hauteurs. Il est évident que toute hauteur portée sur cette droite se perspective à la grandeur qu'elle posséderait sur l'Epure.

Cela fait, pour mettre le point M en perspective, on porte sa hauteur h de x_1 en m'_1 sur l'échelle des hauteurs. — On trace la fuyante $H' m'_1$ du plan fuyant. — On l'arrête en M_1 sur la verticale du plan de front qui passerait par m.



Puis on reporte la hauteur m,M sur la verticale du point m, de m en M, ce qui donne le point cherché.

On remarquera que dans une épure faite par cette méthode sur une planche à dessin, toutes les lignes de construction se tracent au T et à l'équerre, ce qui permet de les exécuter vite et bien.

Si l'élévation et le plan ne sont pas donnés à la même échelle sur l'épure, les échelles des largeurs et des hauteurs ne seront pas dans un même plan de front.

Application.

Application.

Perspective d'une Croix.

Epure. — On a donné, sur l'épure, le plan et l'élévation de la Croix. Le Tableau est figuré en xy sur le plan, et sa position choisie de telle sorte que l'angle optique xoy comprenne dans son intérieur l'objet que l'on veut représenter.

L'œil est en o sur le plan. Sa hauteur au-dessus du géométral est h.

Les lignes du plan ont deux directions. Les unes telles que rf, md, qb ..... sont prises comme fuyantes. On les prolonge jusqu'en a'b'c'...q' sur xy.

On prend l'échelle des éloignements yz, parallèle à ces fuyantes. Les autres lignes telles que qr — Kp — ag — ... sont prolongées d'une part jusqu'à l'échelle des éloignements en r_1 p_1 g_1 f_1 ..., et d'autre part jusqu'à la fuyante aa', qu'elles coupent en 2, K, a et 1. — Nous allons mettre en perspective ces deux séries de lignes.

Le point de fuite des premières lignes est en φ, dans les limites du tableau. Le point de fuite des autres est en dehors de l'épure.

Le point φ_1 est obtenu en menant par l'œil la droite $o\varphi_1$ parallèle à yz

Tableau. — Géométral abaissé. — Tableau triplé.

Afin de dégager l'épure définitive, on est dans l'usage de faire à part la perspective du géométral.

A cet effet, prenons le bord réel xy du tableau, comme ligne d'horizon auxiliaire, et au-dessous, à une distance quelconque, un nouveau bord du Tableau XY.

Nous mettons le géométral en perspective entre les 2 lignes xy et XY.

Menons HH' au lieu de xX, à partir de x; nous aurons l'échelle de front des vraies largeurs.

Prenons $y\varphi' = 3$ fois $y\varphi$ compté sur l'épure; cela nous donnera en φ' le point de fuite des premières directions, et en $Y\varphi'$ la perspective de l'échelle des profondeurs. Enfin en portant à gauche et à droite de φ' les longueurs φ'D' et φ'D" égales à la ligne oφ de l'épure, nous aurons les

Fig. 13.

Epure

Tableau

Elévation

Plan

Géométral abaissé

points de tiers de distance.

Perspective des points r_1 p_1 g_1 f_1

Epure. — Sur une bande de papier nous relevons les profondeurs $yf_1 - g_1 - p_1 - r_1$.
Tableau. — Nous les reportons sur XY, à partir de Y, et à gauche, en f_2 g_2 p_2 r_2, ce qui donne les points de tiers de profondeur.

En les joignant au point D', de tiers de distance de droite, nous avons par recoupement avec l'échelle des profondeurs, en r_1 p_1 g_1 f_1, les perspectives cherchées.

Perspective des fuyantes K a , b q . . . . etc.

Sur l'échelle des vraies largeurs y' a', à partir de y', nous reportons les largeurs y g' — f' — d' . . . . prises sur la ligne xy de l'épure.

En joignant ces points au point de fuite φ' nous avons les fuyantes cherchées.

Perspective des points 1 - a - K - 2.

La dernière fuyante $\varphi' a'_1$ est prolongée jusqu'en a'_2 sur XY. — Nous relevons, sur l'Epure, les profondeurs a'_1 — a — K — 2. Nous les reportons sur le tableau, à partir et à droite de a'_2 en 1", a" — K" et 2" et joignant au point D" de 1/3 distance de gauche, nous avons par recoupement en 1, a, K — 2, les points cherchés. — Cela fait, on joindra 1, 2 — p, K — g, a, etc. . . . et par recoupement avec les fuyantes on aura la perspective de la projection horizontale de la croix sur le Géométral abaissé.

Perspective de l'Elévation.

On reprend en xy la ligne de terre, et en h h' la vraie ligne d'horizon située au dessus de xy à une hauteur égale à 3 fois la hauteur de l'oeil, mesurée sur l'Epure.

On établit en w — w', au tiers de x h, l'échelle des vraies largeurs, et en TV sur le plan vertical fuyant auxiliaire h' ω' l'échelle des vraies hauteurs.

Sur le géométral abaissé, le plan fuyant auxiliaire aurait pour trace la ligne y ω.

Cela posé, mettons en perspective le point de la croix projeté en bB sur l'Epure.

Sa projection horizontale a pour perspective sur le géométral abaissé le point b.

Je mène d'une part la verticale bB ; d'autre part la ligne de front bB_1 recoupant en B_1 la trace ωy du plan fuyant sur le géométral abaissé. Je relève B_1 en B_2 sur le plan fuyant, non par sur sa trace, mais sur la fuyante $h'B_2$ de ce plan située au niveau TI mesurée sur l'échelle des hauteurs. — TI est égale à la cote du point B mesurée sur l'élévation.

Je ramène B_2 en B par une ligne de front, et j'ai le point cherché.

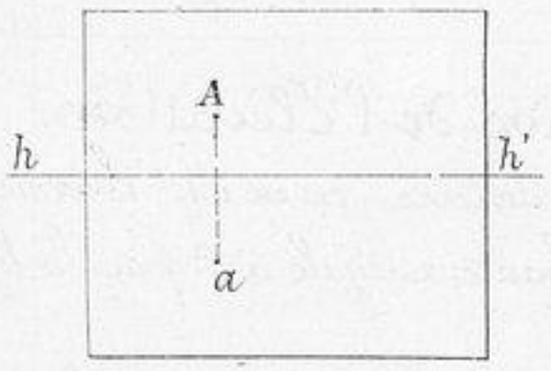
On fera l'épure de la même manière pour les autres points. On simplifiera les constructions en se servant du point de fuite φ, en remarquant qu'un grand nombre de points doivent être deux à deux sur les fuyantes au point φ.

Ainsi. le point Q situé sur l'arête BQ du socle, sera situé, d'une part sur la fuyante $B\varphi$, et de l'autre sur la verticale qQ menée par le point q du géométral abaissé.

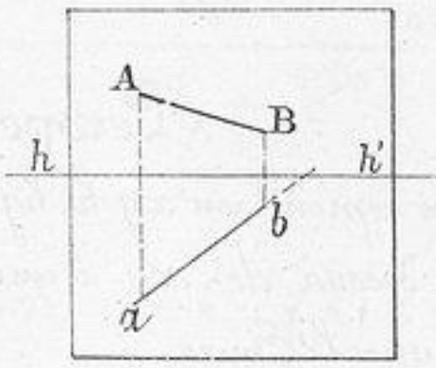
Résolution en Perspective de Problèmes Géométriques.

Un point A est déterminé en perspective par la perspective de sa projection a sur le géométral, et par sa perspective propre A.

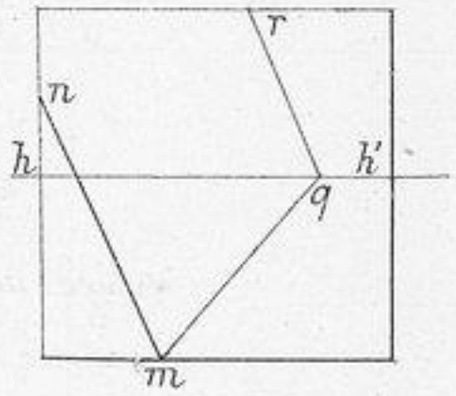
Point.



Droite.



Plan.



Une droite est donnée par sa perspective propre AB et par la perspective ab de sa projection géométrale.

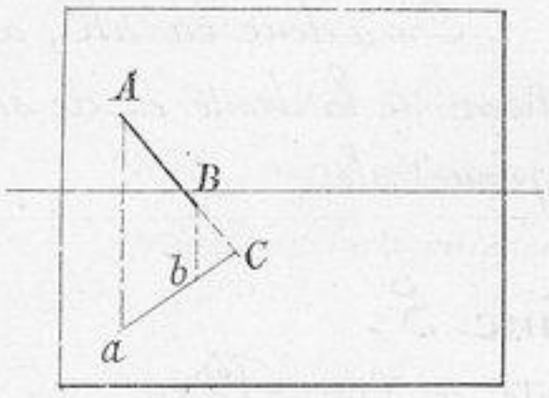
Un plan est donné : 1° par la perspective mq de sa trace sur le géométral ; 2° par sa ligne de fuite φr ; 3° par sa trace mn sur le tableau.

Ces 2 droites qr et mn sont parallèles. Deux des lignes précédentes suffisent pour déterminer la 3e.

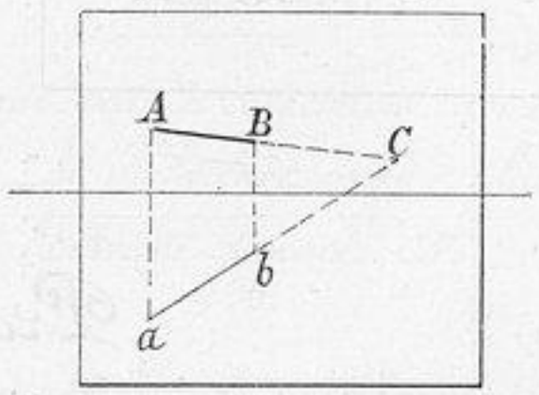
Problème 1.

Trouver la trace d'une droite sur le Géométral.

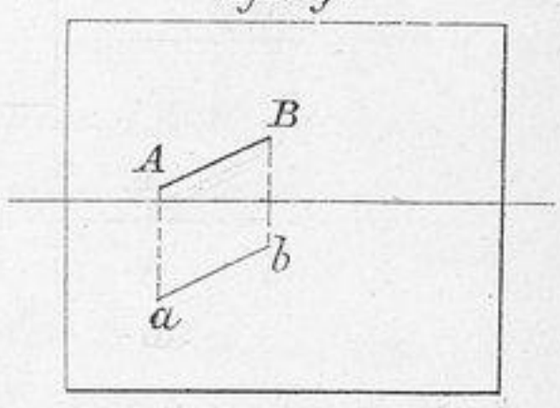
1er Cas
La trace C, est derrière le tableau.



2e Cas
La trace C est derrière le spectateur. (elle est virtuelle)



3e Cas
La trace est dans le plan objectif.



Ces épures n'ont pas besoin d'être expliquées.

Problèmes 2 & 3.

Trouver la trace d'une droite sur un plan de front x'y' (fig. 1)
Trouver la trace d'une droite sur un plan vertical uz (fig. 2)

Fig. 1.

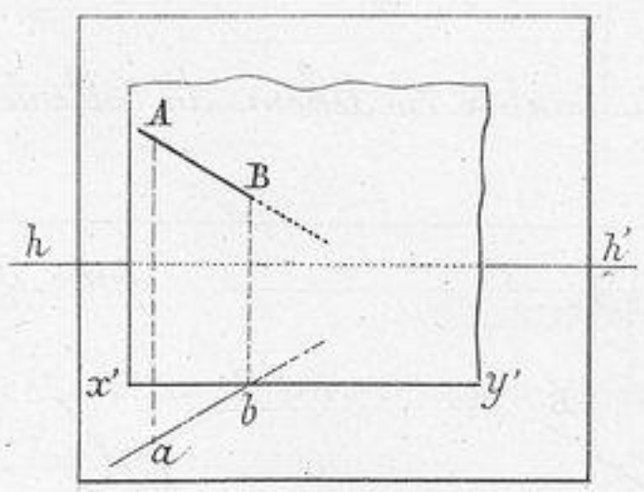
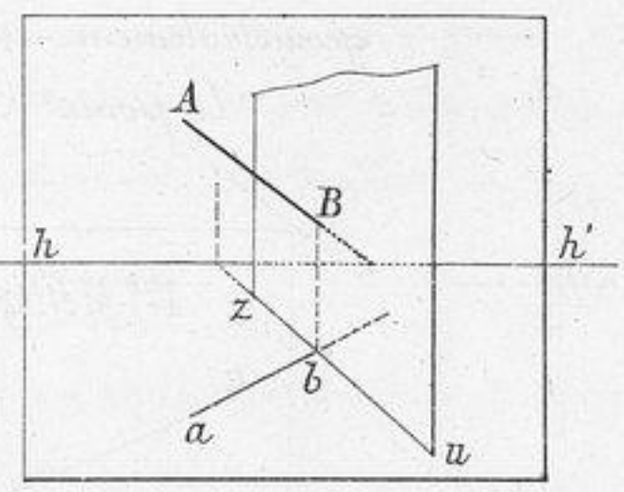


Fig. 2.

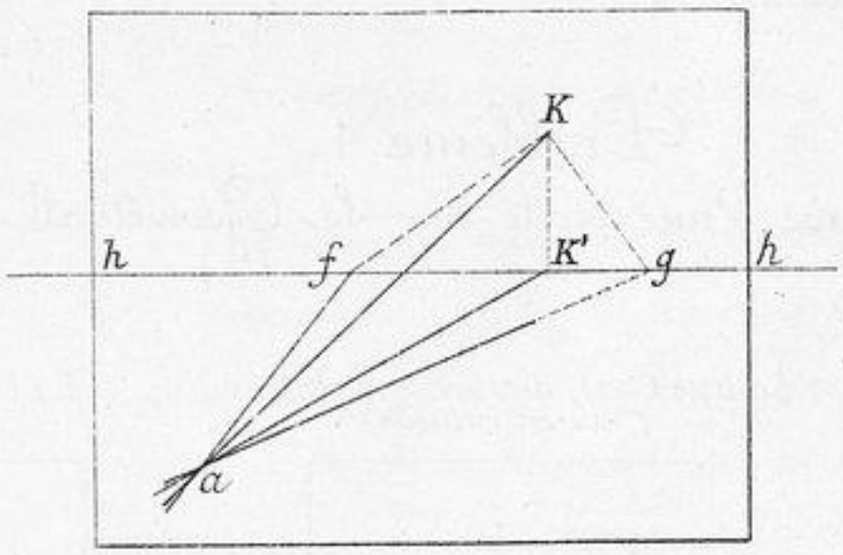


Solutions évidentes d'après les figures.

Problème 4.

Intersection de deux Plans.

Soient af et ag les deux traces géométrales en perspective ; — fK et gK les 2 lignes de fuite. — Les traces se coupent en a, qui est un premier point d'intersection.



Le point de fuite de cette intersection doit être à la fois sur la ligne de fuite de chacun des deux plans. — On a donc en K le point de fuite de l'intersection. C'est un point à l'infini projeté à l'infini sur le géométral, c'est-à-dire en K' sur la ligne d'horizon.

On a donc en aK, aK', les perspectives de la droite et de sa projection géométrale.

Problème 5.

Intersection d'une droite et d'un Plan.

Soit AB, ab, la droite.

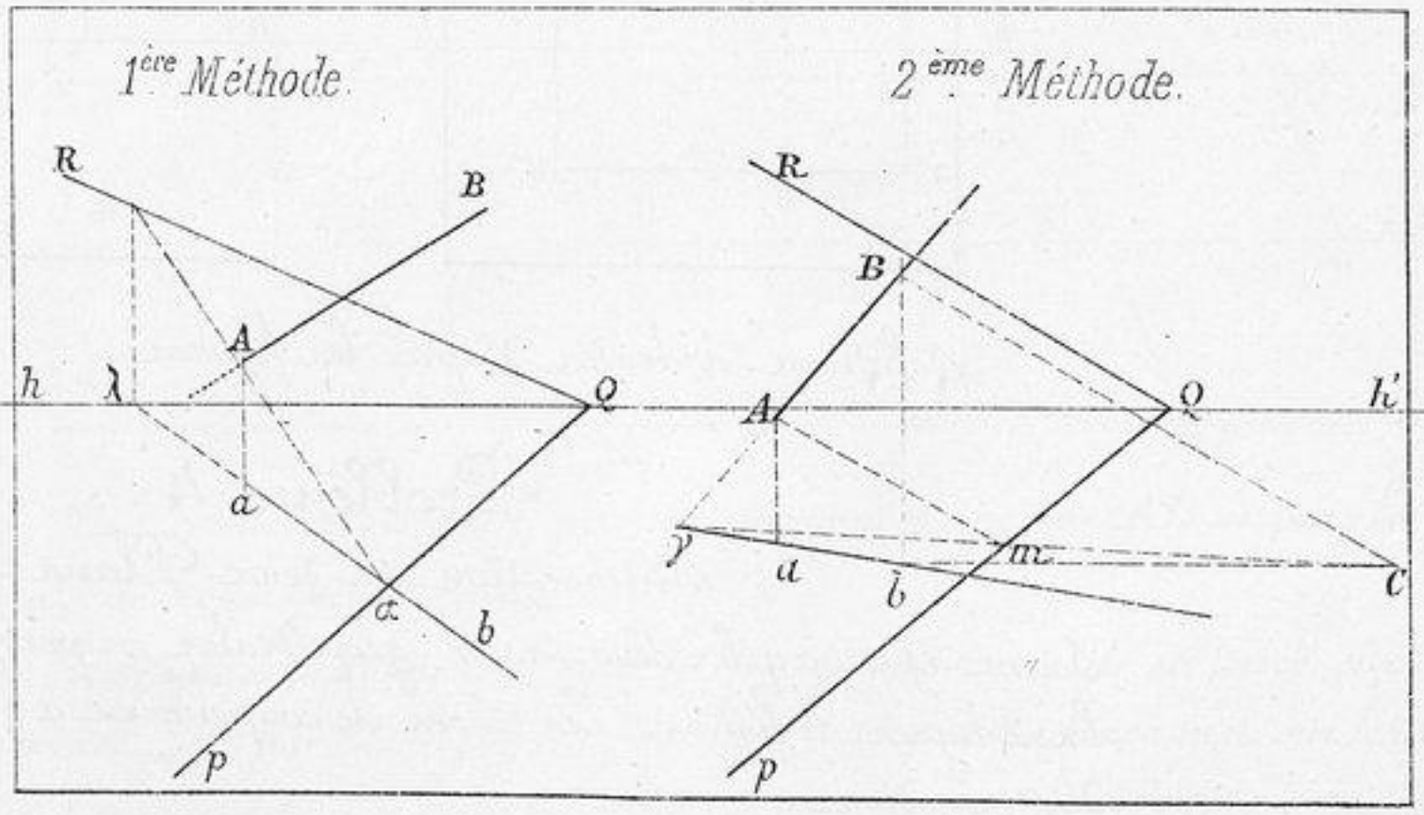
Soit PQ la trace géométrale et QR la ligne de fuite du plan.

1ère Méthode:

Emploi du plan projetant géométralement la droite comme plan auxiliaire

Sa trace géométrale est ab. Sa ligne de fuite est la verticale λR. — L'intersection du plan projetant et du plan donné est Rα de l'espace. — Cette droite auxiliaire coupe la droite donnée au point cherché A, projeté géométralement en a.

Le point λ peut tomber en dehors du tableau.

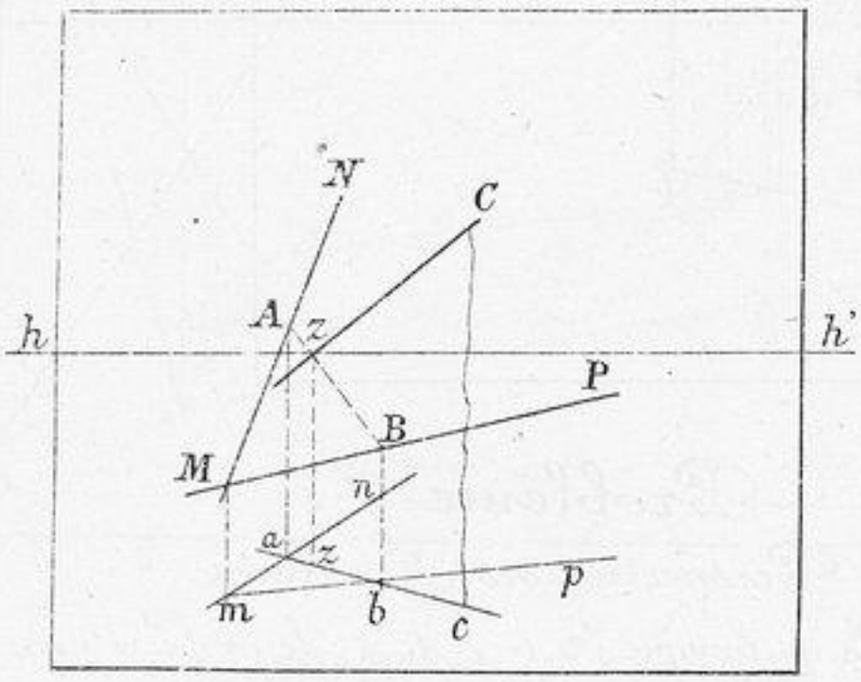


2e Méthode.

Par la droite menons un plan auxiliaire parallèle aux lignes de front du plan donné. – A cet effet, par un point, Bb de la droite, menons Bc – bc, parallèle à la ligne de fuite QR. – bc est parallèle à h h'.

Prenons la trace γ de la droite. – Joignons γC, nous avons la trace horizontale du plan auxiliaire. Il coupe le plan donné suivant la ligne de front, mA, dont l'intersection avec la droite donne le point A d'intersection cherché.

Si le plan est donné par 2 directrices qui se coupent (MN – mn) et (MP – mp) on emploiera, de préférence comme plan auxiliaire, le plan CZ – cz projetant horizontalement la droite donnée, CZ.



Il coupe les 2 plans, qui projettent MN et MP suivant les verticales Aa et Bb. – Il coupe donc les 2 directrices en A et B, et par suite, coupe le plan donné suivant la droite auxiliaire AB. – AB et CZ se coupent en Z z, qui est le point cherché.

C'est sous cette forme que le problème se présente le plus souvent dans les applications.

Problème 6.

Partager un segment de droite de l'espace en parties proportionnelles à des longueurs données.

1ère Méthode.

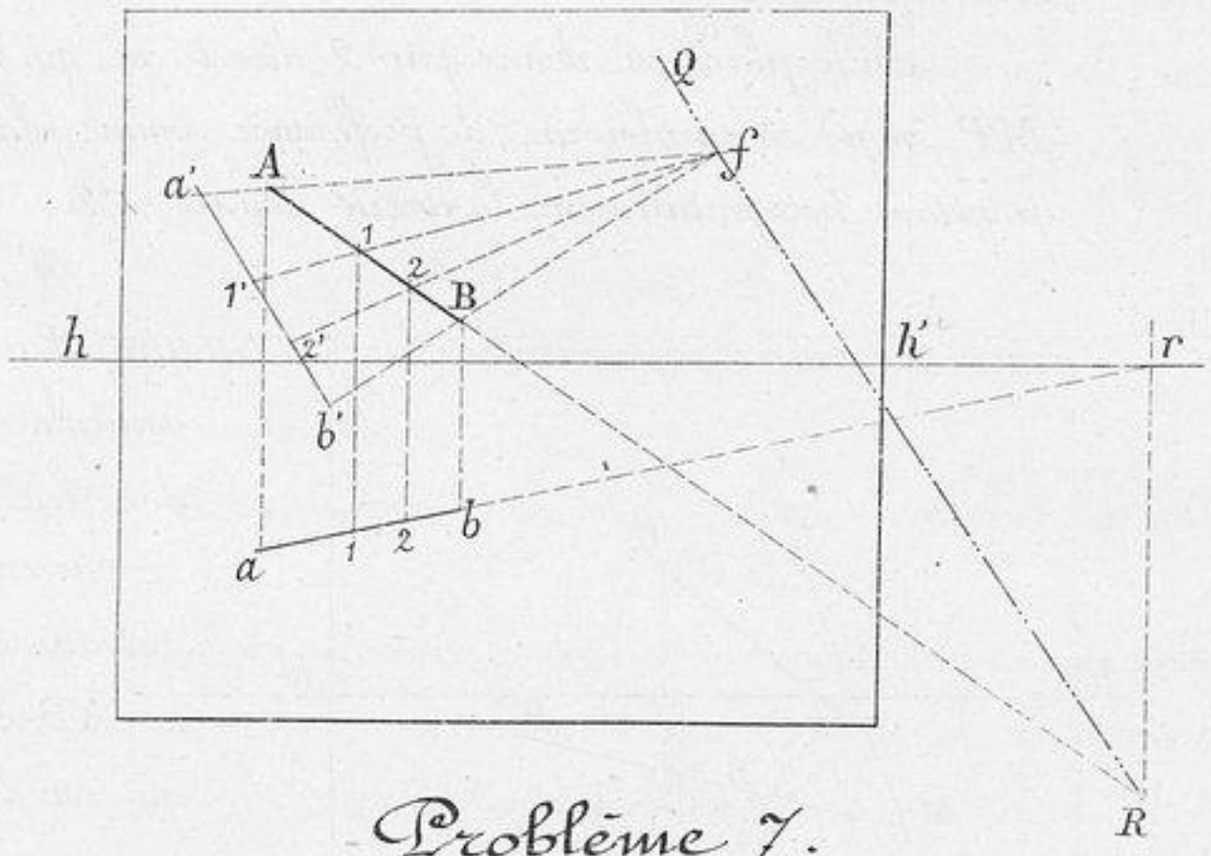
On partagera, comme il a été indiqué plus haut, sa projection sur le géométral, puis on remontera des points du géométral aux points de l'espace.

2ème Méthode (directe)

Par la droite AB on fera passer un plan quelconque. – Soit QR sa ligne de fuite passant par le point de fuite R de la droite. – On

menera dans le plan une ligne de front quelconque a'b' parallèle à QR.

On prendra un point de fuite quelconque f sur QR, on le joindra aux points A et B, ce qui déterminera sur a'b' un segment a'b' que l'on divisera en 1'2'3 ... comme il est demandé ; — à l'aide des fuyantes 1'f, 2'f, 3'f... on trouvera sur AB les points de division cherchés.



Problème 7.

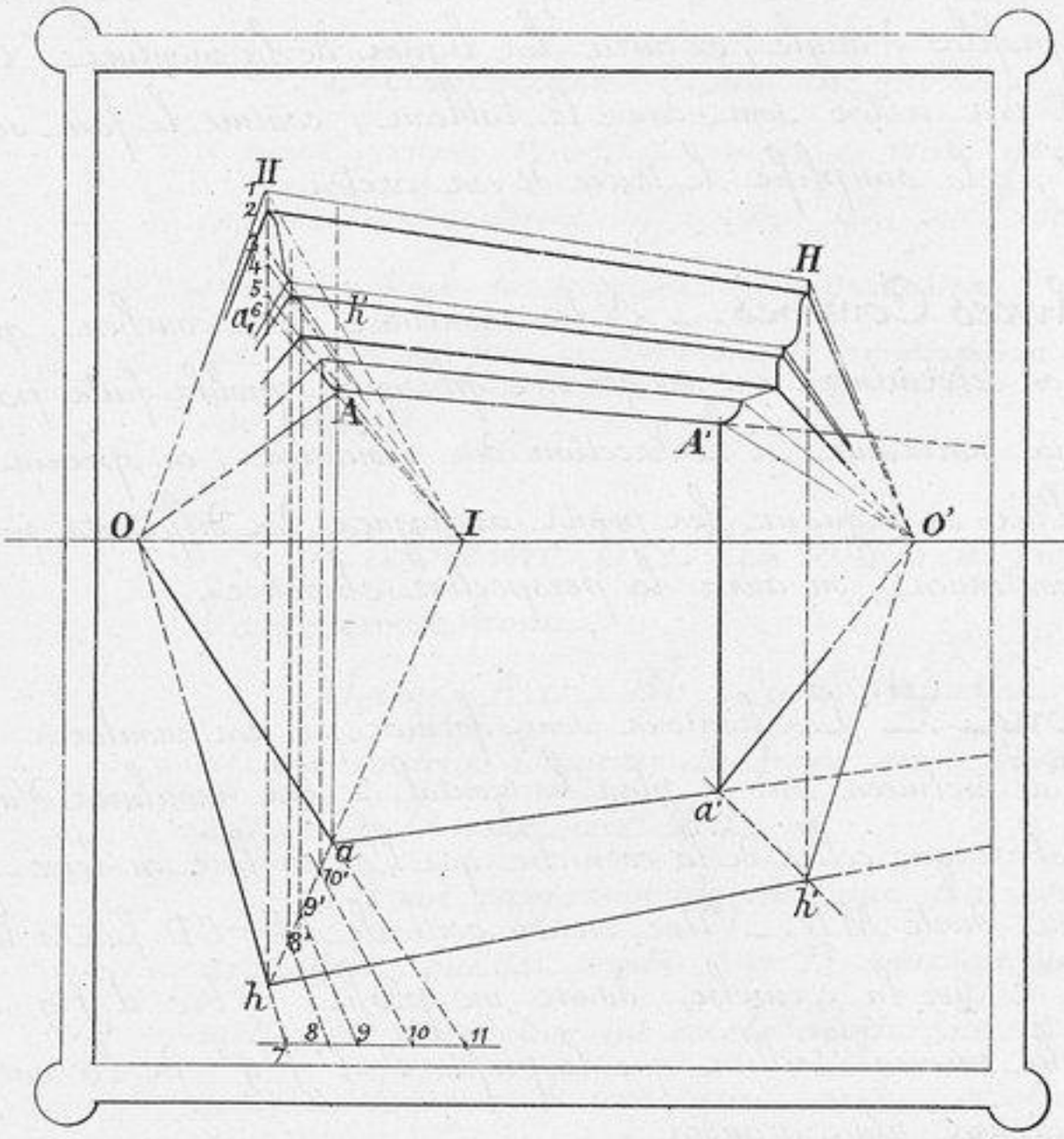
Perspective des Moulures.

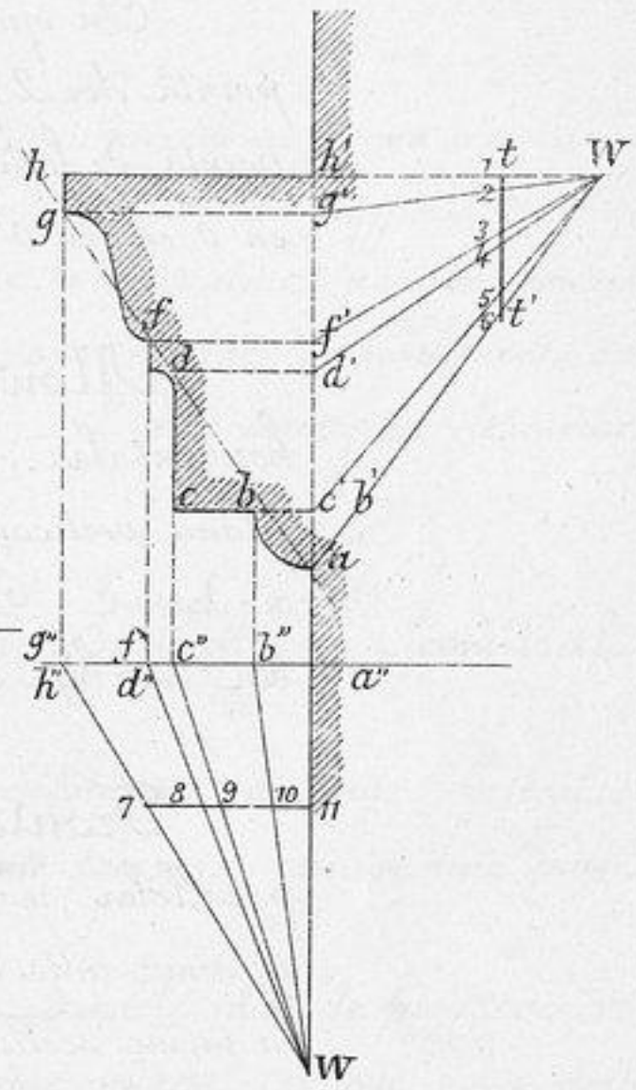
Soit, à une échelle quelconque, a.b.c.d.... le profil d'une moulure destinée à couronner deux murs ; que nous supposons mis en perspective sur le tableau.

Soit A le départ de cette moulure sur l'arête Aa d'intersection des deux murs. Nous supposons mises en perspective par les méthodes ordinaires, les lignes extrêmes de la moulure : savoir, l'arête répondant au point a, origine de la moulure sur le mur, en AA' dans l'espace, et en a a' en projection géométrale ; et l'arête la plus haute, en HH' et hh'. — Les lignes ah et a'h' du géométral sont les bissectrices des angles en a et en a', dans l'espace et non en perspective. — Soit I le point de fuite ah. Tous les points de retournement se projettent géométralement sur la ligne ah.

Joignons IA, cette droite interceptera sur la verticale du point H, un segment Ha,. Nous le partagerons en parties proportionnelles aux hauteurs des points saillants ou rentrants de la moulure. — Ces hauteurs seront mesurées

en $h'g'f'd'$... sur la moulure en vraie grandeur. — Une échelle convergente construite avec W pour centre permettra de trouver rapidement sur une droite $tt' = Ha_1$ les segments 1.2.3.4 à reporter en 1.2.3.4, sur Ha_1





Profil de la moulure.

Si nous menons les fuyantes 1İ, 2İ .... les points de retournement de la moulure seront sur ces droites, dans l'espace.

D'un autre côté, sur la projection géométrale ah, faisons une division proportionnelle aux distances a" b" c"... des sommets de la moulure en projection horizontale. Seulement, ici, comme ah est une fuyante, nous devrons appliquer la construction connue. — Rappelons-la. — On mène 2 fuyantes oh — oa; on les coupe par une ligne de front 7–11. On partage en 7 – 8 – 9 – 10... cette dernière en parties proportionnelles aux segments a" b" c".... — De nouvelles lignes fuyantes au point o menées par les points 7 – 8 – 9 – 10... donnent par recoupement avec ah, les points cherchés 8' – 9' – 10'. — En menant par 8' – 9' – 10'... des verticales et prenant les rencontres avec les fuyantes 1İ – 2İ – 3İ, etc... on aura les points

de retournement cherché.

Le profil d'intersection sur l'angle se trace ensuite et au sentiment, en le faisant passer par ces points.

On opèrera de la même manière pour l'arête A'a'. — Joignant les points des 2 profils d'angle, on aura les lignes de la moulure. Quand les points de fuite des arêtes sont dans le tableau, comme le fait se produit en o et en o', cela simplifie le tracé de ces arêtes.

Moulures Courbes. — Si les moulures sont courbes, quoique horizontales, on déterminera en perspective plusieurs profils faits par des plans verticaux normaux, à la direction des moulures, en opérant comme ci-dessus. Puis en joignant les points analogues des différents profils par des courbes continues, on aura la perspective cherchée.

Frontons. — Les frontons sont formés par des moulures à arêtes parallèles, mais inclinées sur le plan horizontal. — Les moulures d'un fronton ne sont autre chose que celles de la corniche que l'on incline en leur gardant la même section droite MN. — Une section verticale AB–CD faite à la fois sur le fronton & sur la corniche, donne un profil a b c d f g sur le fronton ayant les mêmes saillies que le profil c' d' f' g' de la corniche, mais des hauteurs plus grandes.

Fig. 1.

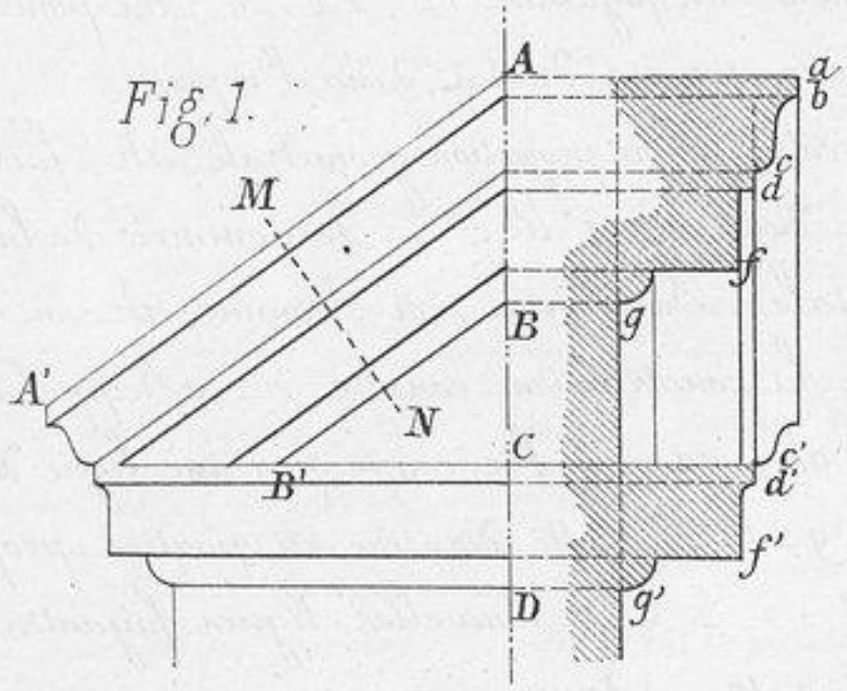
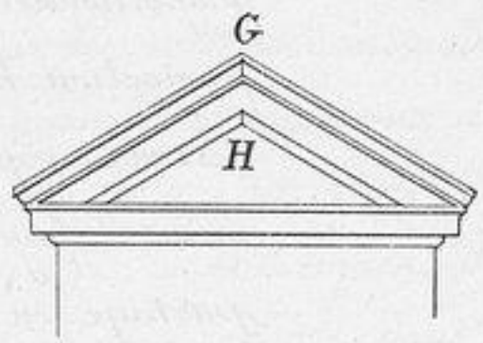


Fig. 2.



Pour mettre un fronton en perspective, on établira par les méthodes générales la perspective des lignes extrêmes AA' et BB', puis on déterminera

comme ci-dessus, deux profils verticaux, tels que AB, ce qui suffira.

On fera bien de choisir le profil vertical GH (fig. 2) suivant lequel se coupent les deux rampants du fronton.

Remarque. Dans les problèmes qui précèdent, nous n'avions pas à nous occuper d'angles connus en vraie grandeur, ni des rapports des lignes ayant des directrices différentes. Ces problèmes n'exigeaient pas la connaissance exacte de la position du spectateur, c'est-à-dire se résolvaient sans les points de fuite et de distance principaux; — il n'en sera pas de même des suivants.

Problème 8. — Un Plan est perpendiculaire au Géométral; l'amener de front.

Soient Aa — Bb, deux verticales définissant un mur vertical; — Nous voulons l'amener de front en le faisant tourner, comme une porte, autour de la charnière Aa.

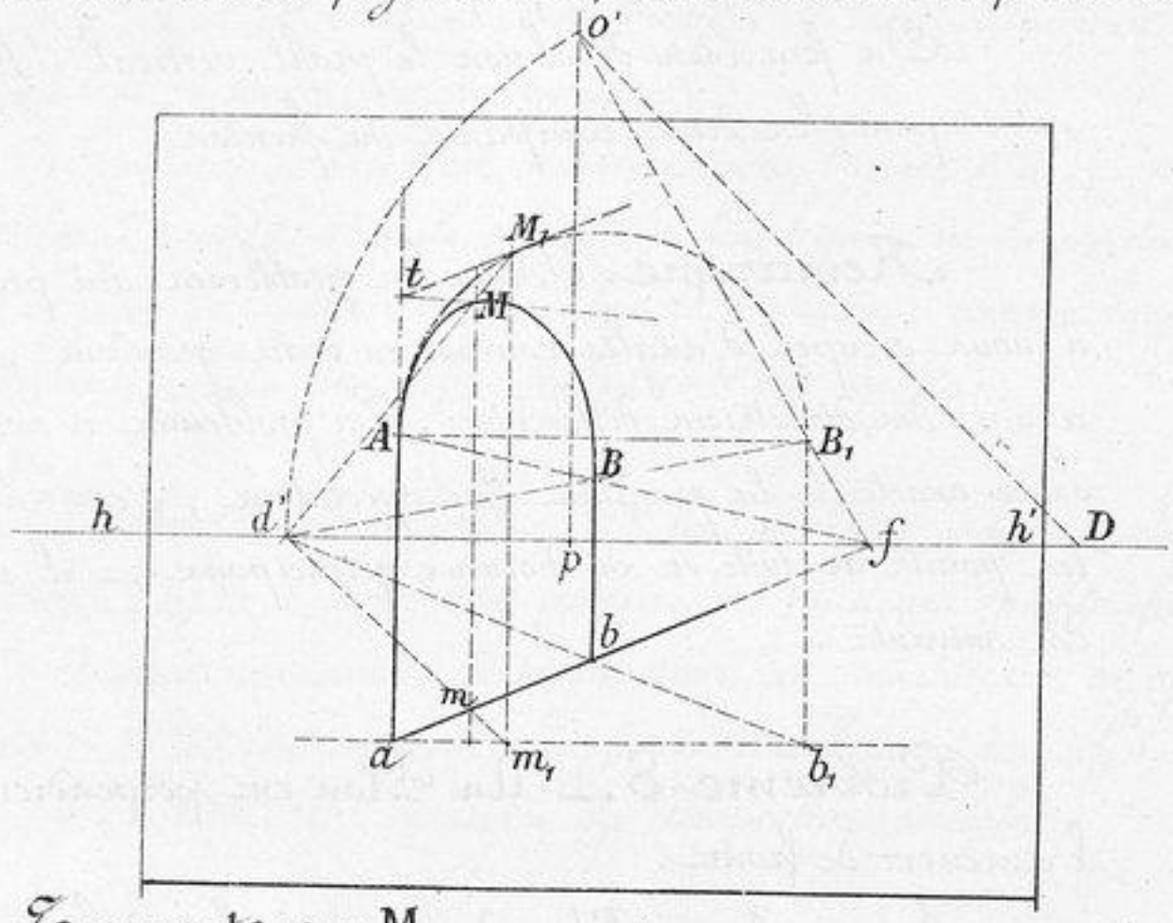
Nous supposons de plus que Aa est dans le plan de front des vraies grandeurs, que les points A et B sont au même niveau, et que nous voulons mettre en perspective un cercle décrit sur AB comme diamètre. Après la rotation le point b sera venu en b_1, et l'on aura, dans le géométral de l'espace $ab = ab_1$. — Par conséquent, joignons bb_1; cette droite intercepte un segment de front ab_1 égal au segment ab intercepté sur la fuyante abf; c'est donc une ligne concourant au point de distance accidentel d' de la direction ayant pour point de fuite f.

On se rappelle comment s'obtient d' connaissant le point principal p et le point de distance principale D. — On rabat l'œil en o', à une distance $po' = pD$. — On joint o'f, et l'on prend $fd' = fo'$.

La verticale bB prend la position b_1B_1. — La ligne AB_1, étant parallèle à hh', on décrira, en vraie grandeur, le cercle sur aA_1B_1 comme diamètre, et l'on ramènera tous les points en place par une construction inverse de la précédente. — Par exemple: soit M_1 un point du cercle de front, projeté en m_1 sur a_1b_1. —

Je mène la ligne m_1m, et M_1M fuyantes toutes deux en d'. Je prends l'intersection m de la fuyante m_1d' et de ab, et remontant par la

verticale m M sur la fuyante d'M, nous obtenons le point M.



Tangente en M.

Menons la tangente $M_1 t$ au cercle de front. Elle rencontre la charnière au point t qui ne bouge pas. On a donc en t M la tangente cherchée.

Il est facile de trouver le point pour lequel la tangente est parallèle à une direction donnée. — Il suffit de se donner dans le plan vertical ab AB une droite parallèle à cette direction ; de faire tourner cette droite en l'amenant de front ; de mener au cercle AM_1B_1 une tangente parallèle à cette direction devenue de front, et de remettre en place cette dernière tangente.

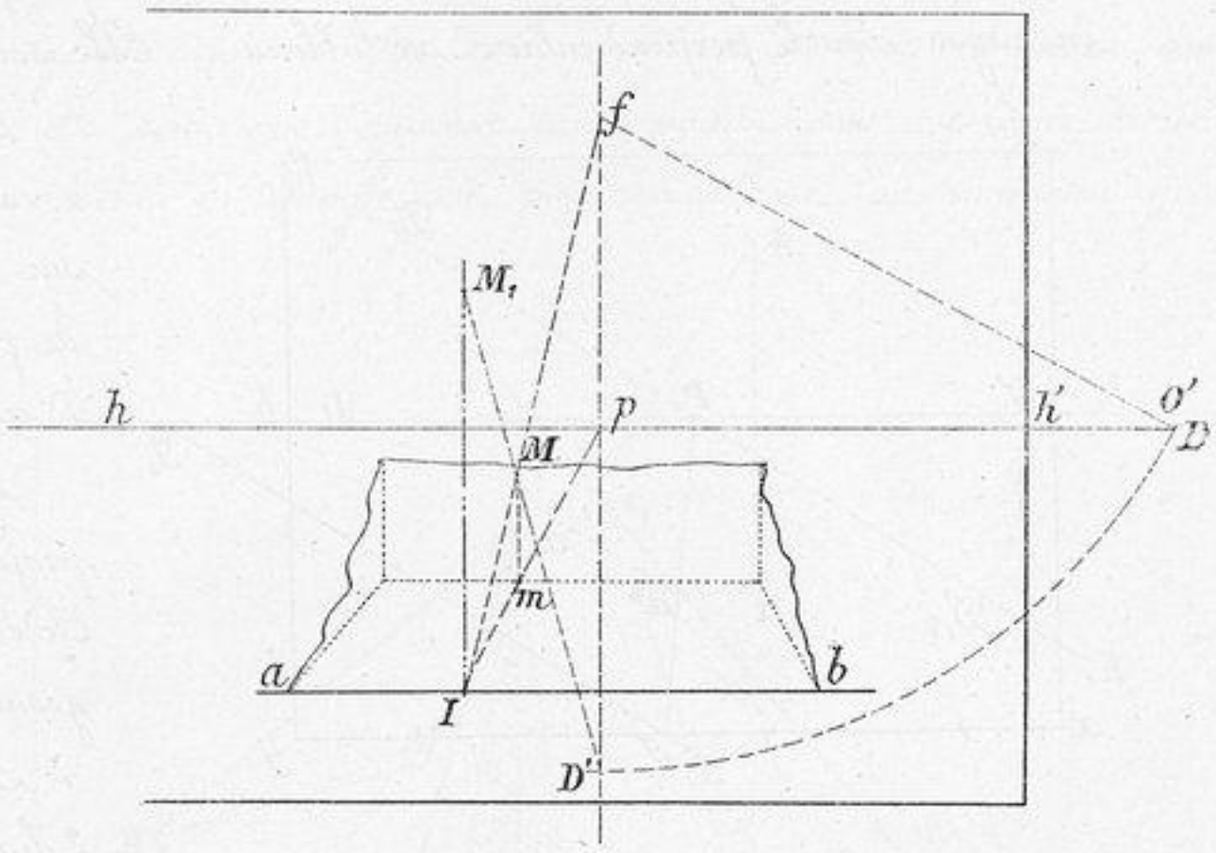
Remarque 1. Dans ce mouvement de rotation, les points m — b — M ..... décrivent des arcs de cercle dont les lignes m m_1 — b b_1 .... sont les cordes. C'est ce qui a fait donner à ce tracé le nom de Méthode par la Corde de l'Arc.

Remarque 2. La méthode serait la même dans le cas où le plan fuyant vertical serait perpendiculaire au tableau, c'est-à-dire aurait sa trace ab sur le géométral, fuyant au point principal p.

Problème 9. — Un plan oblique au Géométral passe par une ligne de front, ab, de ce dernier ; l'amener à être de front.

Soit M un point de ce plan, projeté géométralement en m ; — p, le point principal ; — D, le point principal de distance de droite.

Joignons pm, et prolongeons jusqu'en I sur la droite ab,



qui servira de charnière. — La droite mI est perpendiculaire sur la charnière. Il en est de même de MI, du plan, d'après le théorème des 3 perpendiculaires.

Après le relèvement, M sera venu en M_1 et l'on aura, dans l'espace, $IM_1 = IM$. Donc la ligne M_1M est une droite qui dans le plan vertical IMm intercepte des longueurs égales sur la fuyante IMf et sur la ligne de front verticale IM_1 ; elle passera donc en D', point de distance inférieur de la direction If.

Pour obtenir le point D' rabattons, sur le tableau, le plan vertical passant par l'œil et ayant fp pour trace sur ce tableau.

L'œil se rabat en O' confondu avec D, et la droite of est le rabattement du rayon visuel qui donne le point de fuite f. — Par suite fO' est la distance relative à f, et en portant $fD' = fO'$, on aura en D' le point inférieur de distance accidentel cherché.

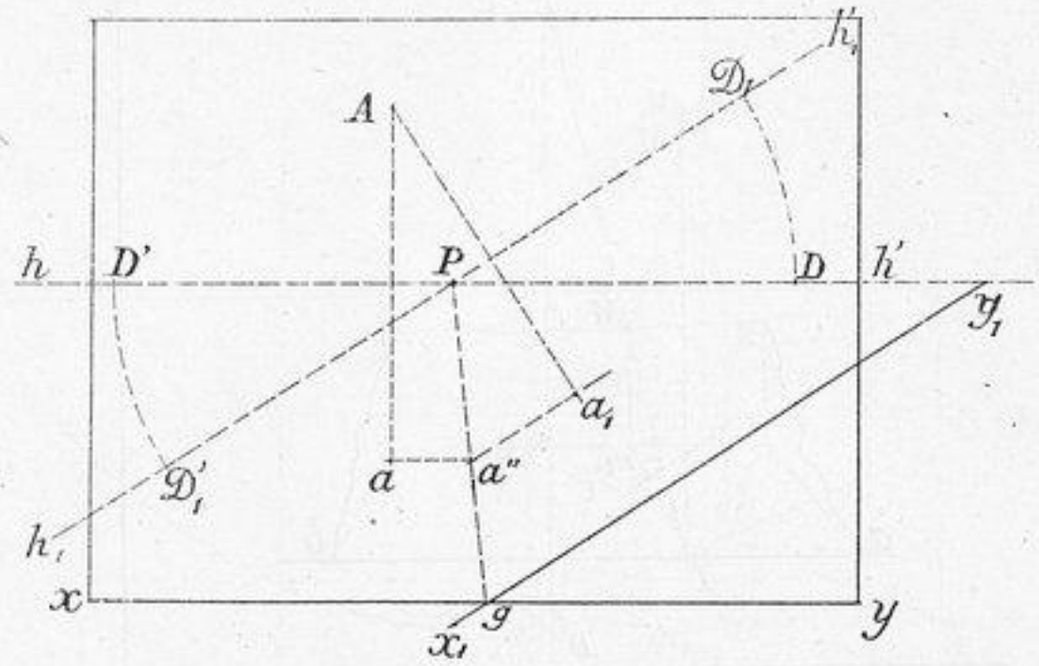
Problème 10. — Changement du Géométral.

Ce problème est analogue au problème de Descriptive connu sous le nom de Changement de Plan horizontal de Projection.

Soit xy le bord du tableau (ou ligne de terre), trace du géométral primitif sur ce tableau, et hh' la ligne d'horizon correspondante.

Soit x_1y_1 une nouvelle droite choisie dans ce tableau, comme nouvelle ligne de terre, c'est-à-dire prise comme trace, d'un nouveau géométral, perpendiculaire aussi au Tableau, mais non plus horizontal. Sa ligne d'horizon

$h_1\ h'_1$ passera encore par le point principal p, puisque ce point est la trace du rayon visuel perpendiculaire au tableau. — Elle sera parallèle à $x_1 y_1$



Les points de distance nouveaux seront en D_1 et D'_1 sur $h_1 h'_1$ à la même distance de p que les points anciens D et D'

Soit A, un point, a, sa projection géométrale ancienne. Déterminons sa projection géométrale nouvelle a_1.

Soit g l'intersection des 2 lignes de terre, gp est l'intersection des 2 géométraux. — Par le point a je mène dans le premier géométral la ligne de front a a", parallèle à x y, et par a", point où elle rencontre gp, la ligne de front a"a, du 2e géométral, parallèle à $x_1 y_1$. — J'abaisse $A a_1$ perpendiculaire sur cette ligne de front, et j'obtiens en a_1 la nouvelle projection géométrale cherchée.

Problème 11. — Prendre un nouveau géométral perpendiculaire à un plan donné.

Nous savons que lorsqu'un plan est perpendiculaire au géométral, sa trace sur le tableau, et plus généralement toutes ses lignes de front sont perpendiculaires sur la ligne de terre, et nous avons vu, (Problème 8) qu'il est facile de rabattre un pareil plan par la méthode de la corde de l'arc, et d'y construire ou d'y mesurer telle figure que l'on veut.

Par conséquent, pour résoudre le problème demandé, il suffit de prendre comme ligne de terre du nouveau géométral, une ligne $x_1 y_1$ perpendiculaire aux lignes de front du plan.

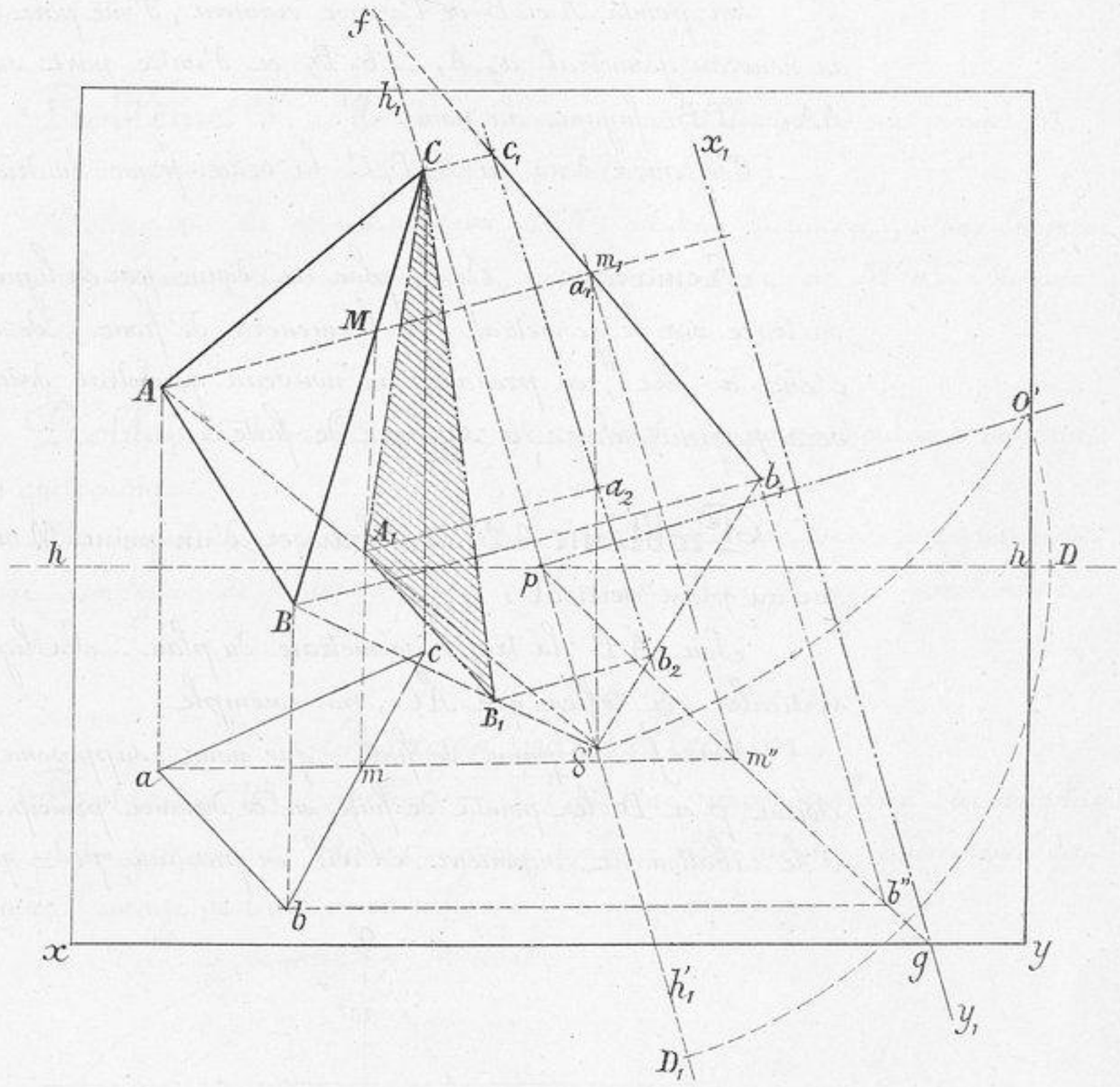
Application. Trouver la vraie forme d'un triangle défini par 3 points Aa — Bb — Cc.

Je mène la ligne de front am — AM du plan de ce triangle, et je choisis une nouvelle ligne de terre $x_1 y_1$ perpendiculaire sur AM.

La ligne d'horizon nouvelle est $p D_1$ passant par p et parallèle

à $x_1\ y_1$ — L'intersection des 2 géométraux est $p\,g$, et les nouvelles projections géométrales de A, B, C sont en $a_1\ b_1\ c_1$ obtenues comme ci-dessus.

Je remarque que ces trois points sont en ligne droite, puisque le plan ABC du triangle est perpendiculaire au nouveau géométral.



Prolongeons $b_1\ c_1$ jusqu'en f, sur la nouvelle ligne d'horizon, nous aurons le point de fuite de la ligne $b_1 c_1$. Cela fait, pour mieux lire l'épure, retournons notre papier et plaçons $x_1\ y_1$ horizontale, nous sommes dans le cas du problème 8 : "Amener un plan vertical à être de front".

On rabat l'œil en O'. — Avec fO' pour rayon, on décrit l'arc de cercle O'δ' qui donne en δ' le point de distance de la direction f.

C'est en ce point que viendront fuir toutes les cordes des arcs de la rotation que nous allons faire subir au triangle autour de C c_1 comme

charnière. — Faisons cette mise de front.

Le point Cc_1 ne bouge pas comme étant sur la charnière.

Les points a_1 et b_1 viennent en a_2 et b_2 sur la ligne de front $c_1 b_2$, à la rencontre de cette ligne avec les fuyantes $a_1 \delta' - b_1 \delta'$ qui sont les cordes des arcs de rotation.

Les points A et B de l'espace viennent, d'une part, sur les normales au nouveau géométral $a_2 A_1 - b_2 B_1$ et d'autre part sur les cordes d'arc $AA_1 - BB_1$ fuyant au point δ'.

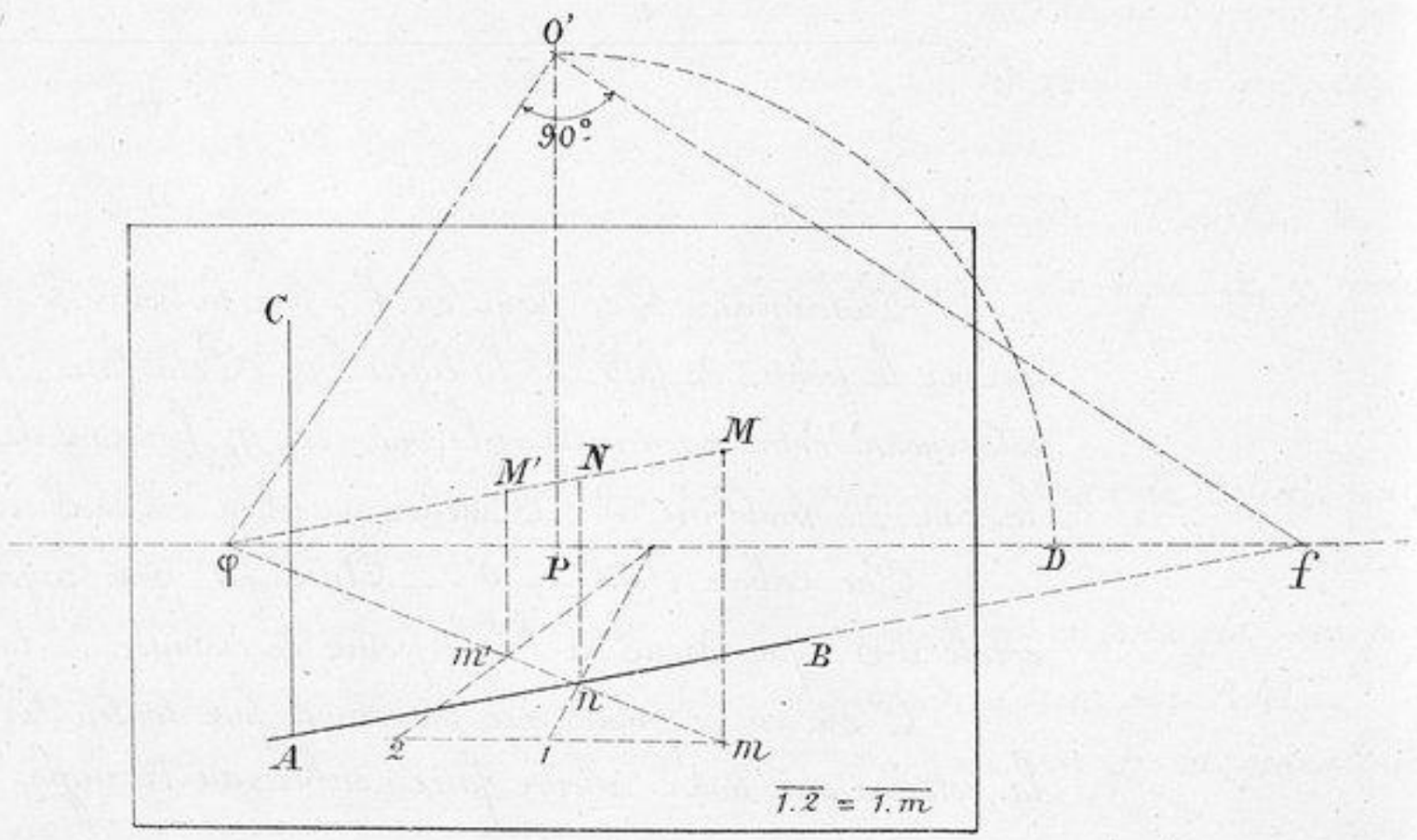
On aura donc en $A_1 B_1 C$ la vraie forme du triangle donné.

Remarque. Si le plan est donné par sa ligne de fuite et par sa trace sur le géométral, on l'amènera de front, de la même manière, c'est-à-dire, en prenant un nouveau géométral dont la ligne de terre sera perpendiculaire à sa ligne de fuite.

Problème 12. — Abaisser d'un point M m une perpendiculaire sur un plan vertical.

Soit AB la trace géométrale du plan. Ses lignes de front sont verticales, et telles que AC, par exemple.

Soit f son point de fuite, que nous supposons dans l'épure. — Soient p et D les points de fuite et de distance principaux. — Faisons en o' le rabattement supérieur de l'œil, en prenant $po' = pD$, et joignons fo';



Cette droite est le rabattement du rayon visuel aboutissant en f, c'est-à-dire, parallèle à la droite AB de l'espace. Si nous menons $o'\varphi$ perpendiculaire sur $o'f$, nous aurons en φ le point de suite des droites perpendiculaires à la ligne AB, et aussi au plan CAB. — Par suite, nous aurons en $M\varphi$, $m\varphi$ la perpendiculaire demandée, et en Nn sa trace sur le plan CAB.

Problème 13. — Trouver l'image par réflexion d'un point M, dans un miroir plan vertical, CAB (*Même figure*).

Prolongeons la perpendiculaire MN, au delà du miroir, d'une longueur égale à elle-même (*Problème connu*), et nous aurons en $M'm'$ l'image demandée.

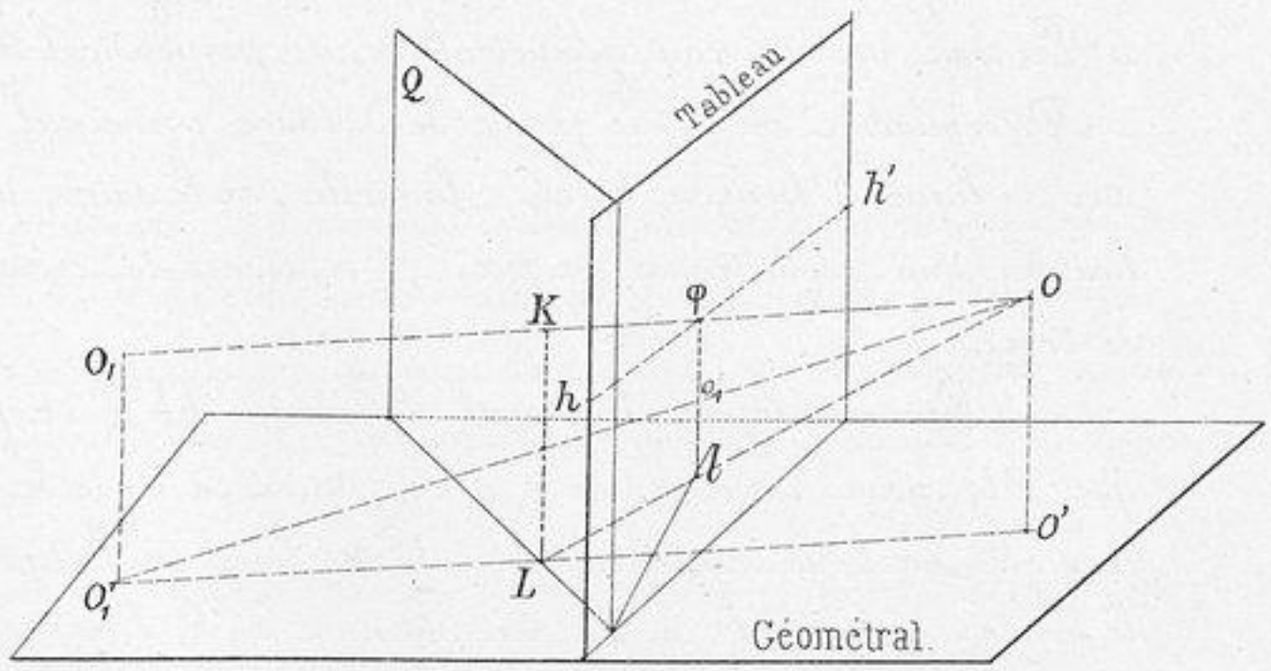
Problème 14. — Abaisser d'un point une perpendiculaire sur un plan quelconque.

On prend un nouveau géométral dont la ligne de terre est perpendiculaire aux lignes de front du plan, et l'on est ramené aux problèmes précédents.

Images par réflexion.

Problème 15. — Abaisser de l'œil une perpendiculaire sur un plan et la prolonger au delà, d'une longueur égale à elle-même, autrement dit: Trouver l'image de l'œil, par réflexion, dans un plan.

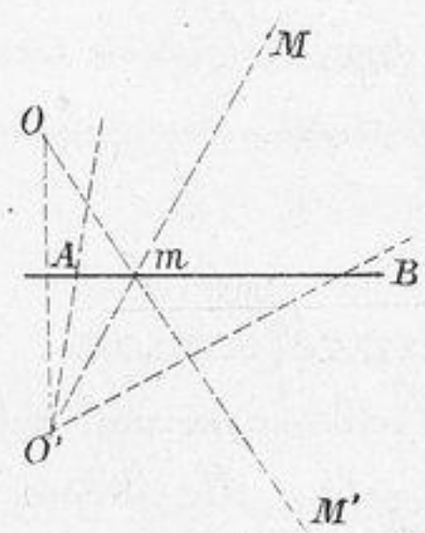
1er Cas: — Le plan est vertical.



Il est facile de se rendre compte, par une construction dans l'espace, que si Q est un plan vertical, et φ le point de fuite des lignes qui lui sont normales, la perspective du point O_1, symétrique de O par rapport au plan Q, se fait au point φ, et que la perspective o'_1 de la projection géométrale O'_1 du point précédent, se fait en o'_1 au milieu de la verticale φl, comprise entre la ligne d'horizon et la trace géométrale du plan. Cela posé, résolvons d'une manière complète le problème des images par réflexion.

Problème 16. — Etant donné un miroir plan quelconque et limité, déterminer le champ de ce miroir, et les images des points compris dans ce champ.

On sait que si AB est un miroir plan, et O, l'œil, on aura l'image d'un point M en prenant le symétrique O' de l'œil par rapport au plan, joignant O' au point M, prenant en m l'intersection de O'M avec le miroir, — le rayon visuel Om prolongé passera par l'image cherchée M'. — Il sera, d'ailleurs inutile de chercher M', car le point m étant sur le rayon visuel OM' se perspectivera au même point que M'.



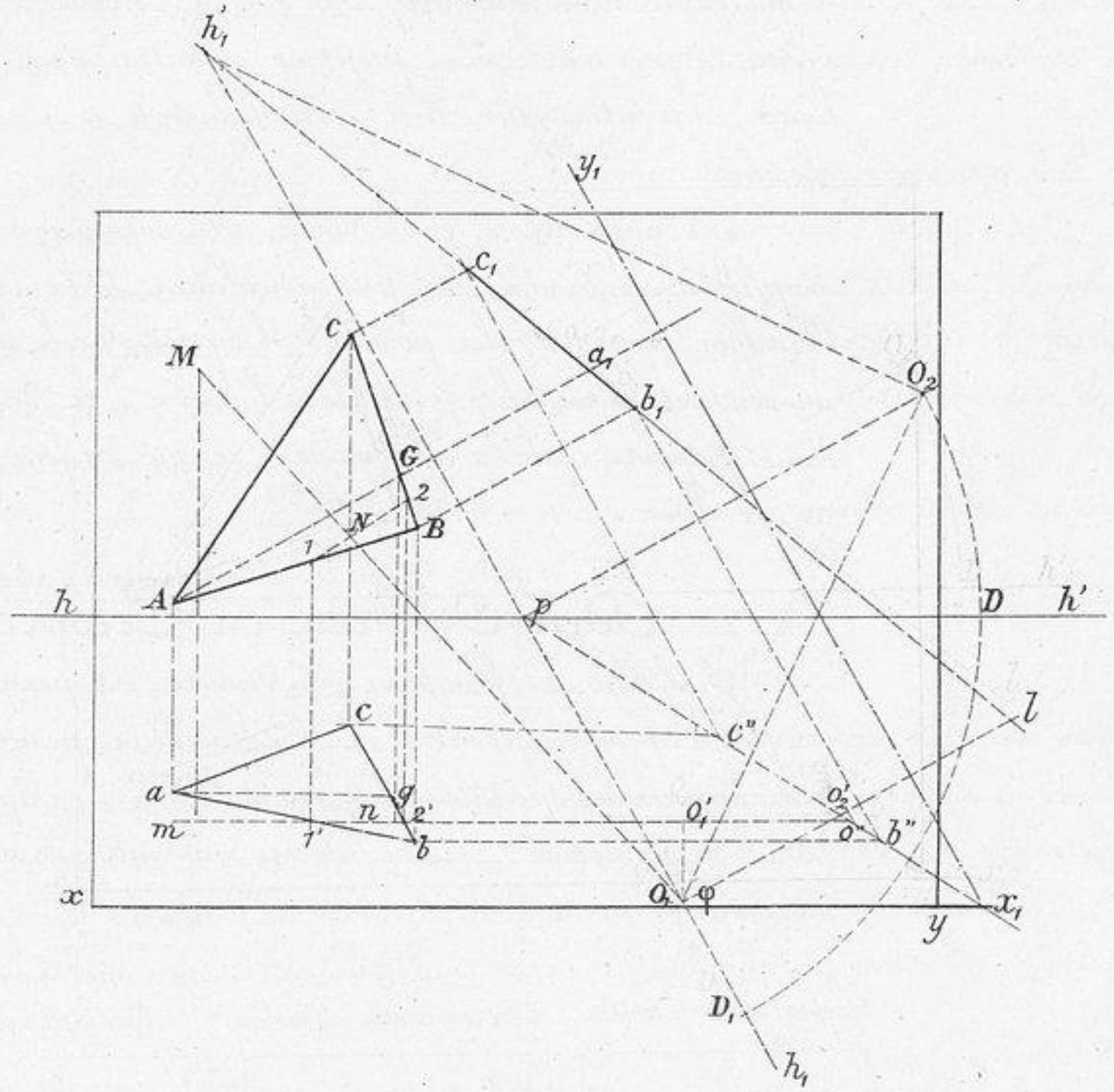
Le champ du miroir se déterminera en construisant le cône AO'B qui aurait O' pour sommet et pour base le contour de ce miroir. Tout point tel que M', situé dans l'intérieur de ce cône, sera vu par réflexion.

Cela posé, soit ABC, abc, un miroir triangulaire. — Cherchons: le champ de ce miroir. — Menons une ligne de front AG — ag du triangle. — Prenons un nouveau géométral $x_1 y_1$ perpendiculaire à cette ligne de front. — Déterminons en D_1 le point de distance principal de ce géométral, situé sur sa ligne d'horizon $h_1 h'_1$, laquelle, on le sait, passe par p. L'intersection des deux géométraux est px_1, (x_1 étant le croisement des deux lignes de terre.)

Par des lignes de rappel telles que $bb''b_1$ et par des projetantes telles que Bb_1, nous obtenons en b_1, a_1, c_1, situées en ligne droite, la projection du triangle sur le nouveau géométral. Cette ligne est la trace du plan du miroir sur le nouveau géométral. — Nous obtenons en h'_1 le point de fuite de cette trace. —

Nous faisons le rabattement de l'œil en O_2 sur une perpendiculaire à la nouvelle ligne d'horizon $h_1 h'_1$. — Nous joignons $h'_1 O_2$; nous menons à cette droite une perpendiculaire $O_2 \varphi$ qui nous donne en φ le point de fuite des normales au miroir.

D'après ce qui précède, φ est aussi la perspective du symétrique de l'œil par rapport au miroir.



Menons φl perpendiculaire sur $h_1 h'_1$; prenons le milieu o'_2 de la portion de cette ligne comprise entre $h_1 h'_1$ et $a_1 b_1$ prolongé, et nous aurons en o'_2 la projection du symétrique de l'œil sur le nouveau géométral. — On aura sa projection o'_1 sur l'ancien géométral à l'aide des lignes de rappel $o'_2 o'' o'_1$.

Nous avons donc au point double $o_1 \varphi$: 1° le point de fuite des perpendiculaires au miroir ; 2° la perspective du symétrique de l'œil, et,

en o'_1 la perspective de la projection sur le géométral ancien de ce symétrique. Cela posé, nous aurons le champ du miroir en joignant O_1 aux 3 points de l'espace ABC, et o'_1 aux trois points du géométral, a b c. Tout point tel que M m situé dans ce champ, aussi bien dans l'espace qu'en projection géométrale, fera image. — Cherchons cette image: Appliquons ce qui a été dit en commençant. — Joignons le point M m au symétrique de l'œil $O_1 o'_1$, ce qui donne la droite $MO_1 - m o'_1$. Cherchons, par la méthode connue, c'est-à-dire en prenant le plan projetant géométralement cette droite pour plan auxiliaire, son intersection N n avec le miroir, et nous aurons en N l'image cherchée.

Remarque. Si le miroir est une nappe d'eau, le problème se simplifiera. — Toutes les perpendiculaires à la nappe seront verticales. — Il suffira de projeter les points de l'espace sur le miroir, considéré comme un nouveau géométral, parallèle à l'ancien, et de prolonger chaque projetante d'une longueur égale à elle-même, ce qui se fera en la doublant, puisqu'elle est de front.

Des Ombres en Perspective. — Flambeau.

Si l'on a un flambeau, on donnera sa perspective F et celle de sa projection f sur le géométral. — Ce flambeau peut occuper plusieurs positions par rapport au spectateur et au tableau. — Supposons-le toujours au-dessus du géométral. — Les figures suivantes se rapportent à ces positions diverses.

Fig. 1. *Flambeau derrière le tableau.* Fig. 2 *Entre le spectateur et le tableau.* Fig. 3. *Dans le plan objectif.* Fig. 4. *Derrière le spectateur.*

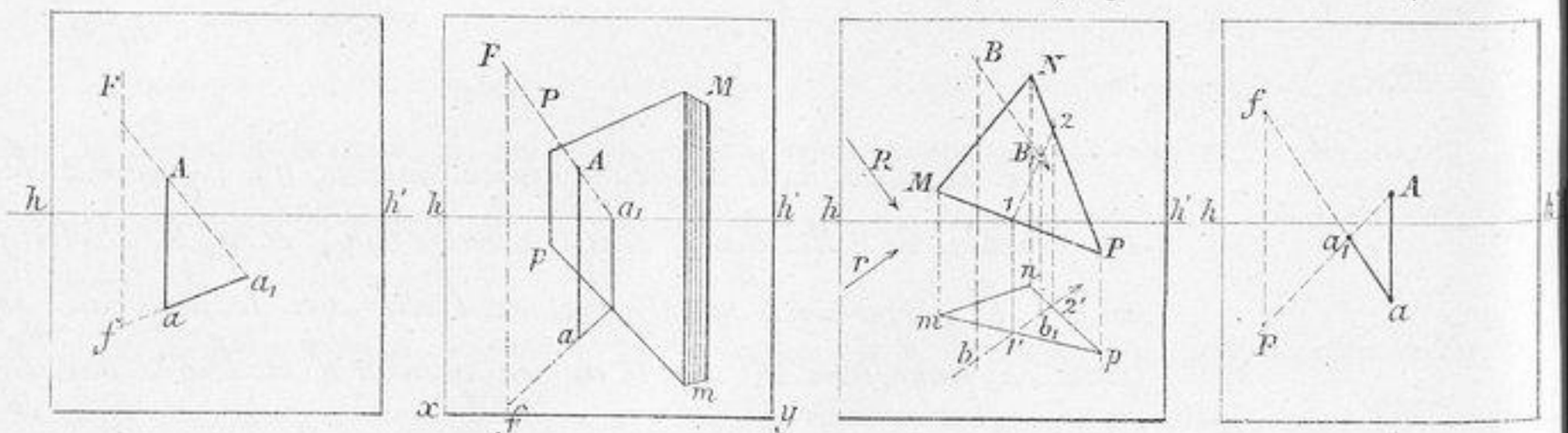


Fig. 1 — Flambeau situé derrière le tableau.

Fig. 2 — Entre le tableau et le spectateur.

Fig. 3 — Dans le plan objectif. — Dans ce cas les deux perspectives

du flambeau sont à l'infini, et l'on doit donner les directions R et r des rayons lumineux en perspective. — Ainsi, dans ce cas les rayons lumineux sont en réalité convergents, mais en perspective ils sont parallèles à R dans l'espace et à r en projection géométrale.

Fig. 4. —— Le flambeau est derrière le spectateur.

Dans la fig. 1, on a cherché l'ombre portée par une verticale Aa sur le géométral. — A cet effet, le rayon lumineux du point A est FA dans l'espace et fa en projection géométrale. — a, est sa trace géométrale et aa, l'ombre de la droite.

Dans la fig. 2, on a cherché l'ombre portée par une verticale Aa sur un mur vertical. Mm — Pp. — (Solution évidente).

Dans la fig. 3, on a cherché l'ombre d'un point Bb sur le plan d'un triangle MNP — m n p. — On a mené le rayon BB_1 — bb_1 parallèle à R et à r, et on a pris, par la méthode connue son intersection b_1 B_1 avec le plan du triangle.

Enfin dans le 4e Cas, on a encore cherché l'ombre portée en a a, sur le géométral par une verticale Aa.

Des Ombres au Soleil.

Le soleil sera donné par sa perspective S, ce sera le point de fuite des rayons lumineux dans l'espace, et par celle de sa projection géométrale, s, située sur la ligne d'horizon — S sera le point de fuite des rayons lumineux en projection géométrale. On se servira ensuite des points S et s comme on vient de le faire dans le cas du flambeau, pour les points F et f.

Fig. 1.
Soleil
derrière le spectateur

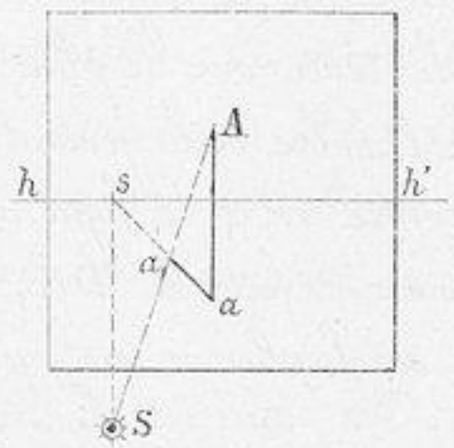


Fig. 2
Soleil
devant le spectateur

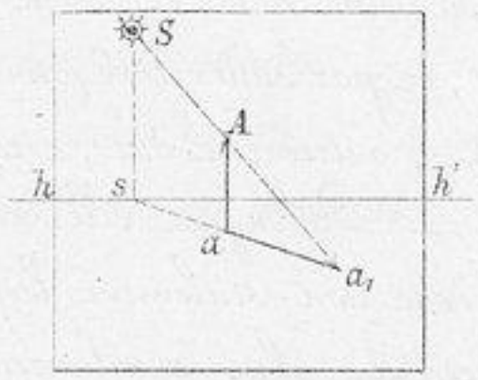
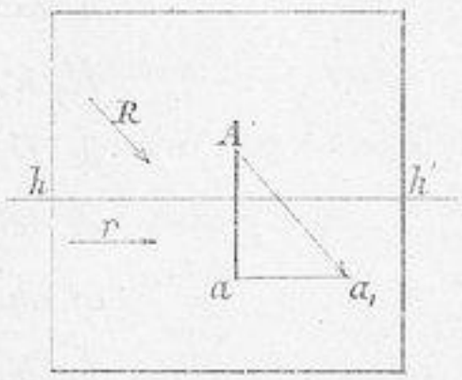


Fig. 3.
Soleil
dans le plan objectif.



Supposons toujours le soleil au-dessus du géométral. Les rayons qu'il envoie peuvent venir d'arrière en avant par rapport au spectateur. C'est le cas de la figure 1; — ou d'avant en arrière, c'est celui de la figure 2. — Enfin ils peuvent être de front. Dans ce cas (fig. 3) ils seront parallèles en perspective aux deux droites de front R dans l'espace et r en projection géométrale.

Les problèmes d'ombre se résolvent en perspective comme en descriptive, en employant les 3 méthodes générales. — Celle des projections obliques est la plus facile à appliquer. —

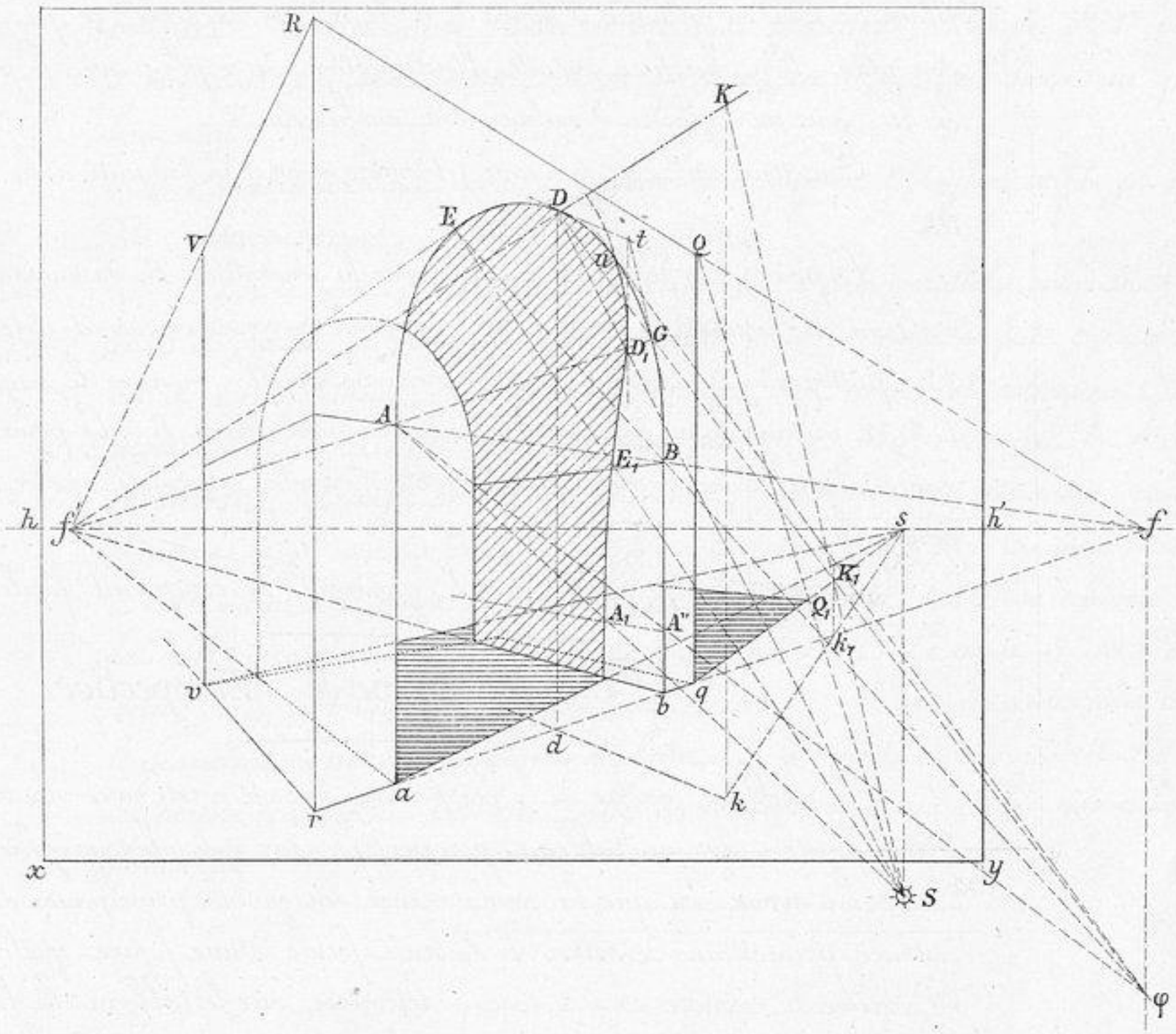
Application. — Ombre portée dans l'intérieur d'un berceau.

Soit un berceau ayant sa courbe de tête dans le mur vertical fuyant $Rr - Qq$, et limité, pour l'autre tête, au plan vertical parallèle au précédent et passant par la verticale Vv. — Soit ADB la courbe de tête. — On veut trouver l'ombre portée dans l'intérieur du berceau par cette courbe et par l'arête Aa du piédroit. — Soit S le soleil dans l'espace, et s sa projection, située à l'infini, sur le géométral, c'est-à-dire sur la ligne d'horizon. Le problème revient à trouver l'intersection de deux cylindres ayant une même base, qui est la ligne $aADBb$. (Nous considérons les piédroits comme formant un même cylindre avec le berceau). — Le premier cylindre est le berceau; ses génératrices fuient en f'; le second est le cylindre d'ombre de la directrice $aADBb$, ses génératrices sont des rayons lumineux et fuient en S dans l'espace et en s sur le géométral.

On coupe les 2 cylindres par des plans parallèles à la fois à leurs 2 génératrices, c'est-à-dire par les plans d'ombre des génératrices du berceau.

Soit $DK - dk$ une génératrice du berceau. Menons le rayon lumineux du point Kk. — Soit $SK - sk$, ce rayon. Il perce le mur de tête en $K_1 k_1$, et par suite DK_1 est la trace sur le plan de tête, du plan d'ombre de DK_1, autrement dit, c'est l'ombre de la génératrice DK sur le plan de tête. — Prolongée, elle rencontre en φ la ligne de fuite de ce plan de tête, — φ est donc non-seulement le point de fuite de DK_1 mais encore celui de toutes les traces des plans auxiliaires sur le plan de tête, puisque les rayons lumineux sont parallèles.

Cela posé, cherchons l'ombre du point D. — Le plan auxiliaire dont la trace sur le plan de tête est Dφ, recoupe la directrice du berceau en G. — Ce plan auxiliaire détermine donc une nouvelle génératrice Gf' du berceau, et le point D porte ombre en D_1 à l'intersection de cette génératrice et du rayon lumineux de l'espace DS.



Tangente. Le plan tangent au cylindre d'ombre au point D, a pour trace de tête, la tangente Dt à la courbe de tête. — Le plan tangent au berceau en D_1 a pour trace de tête la tangente Gt, au point G. — Ces 2 traces se coupent en t, et la tangente est tD_1.

Point d'origine. Du point φ menons la tangente φu à la courbe

de tête ; si nous appliquons au point u la construction précédente, nous reconnaissons que ce point porte ombre sur lui-même. C'est le point d'origine de la courbe d'ombre portée. Nous savons que cette dernière est plane et que c'est une conique (Ombre du Pont).

La construction donnée pour la tangente ne s'applique pas ici car en ce point les plans tangents aux deux cylindres sont confondus. — On aura la tangente en u en se basant sur ce que la courbe d'ombre portée est plane. — On en prendra 3 points, u D_1 E_1 par exemple, ce qui déterminera son plan. On cherchera ensuite l'intersection de ce plan avec le plan tangent en u, soit au cylindre d'ombre, soit au berceau.

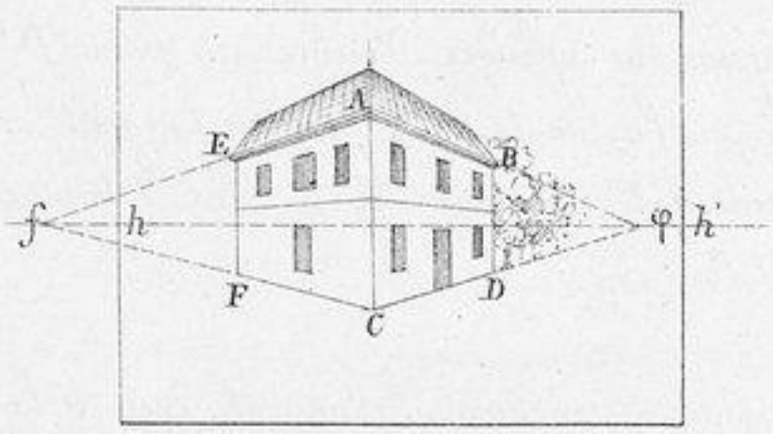
En tout cas, au point u, l'ombre n'est pas tangente à la courbe de tête.

Le point E_1 de l'ombre situé sur la génératrice B, de naissance à droite, s'obtient en faisant la construction en sens inverse, c'est-à-dire en joignant φB, prolongeant jusqu'en E sur la courbe de tête, menant le rayon lumineux ES et prenant son intersection E_1 avec la génératrice B. Le point A, de naissance à gauche porte ombre en A_1 obtenu comme on a fait pour l'ombre D_1 du point D.

Enfin, l'ombre portée sur le géométral se comprend facilement.

Problème inverse de Perspective.

Le problème inverse de la perspective consiste à retrouver la vraie forme d'une figure, sur un tableau perspectif, sur une photographie, par exemple. — Nous avons vu que la connaissance des points principaux de fuite et de distance permettait de retrouver la vraie forme d'une figure quelconque ; le Problème à résoudre consiste donc à retrouver sur le tableau la ligne d'horizon et les points principaux de fuite ou de distance.



Si ce tableau représente une nappe d'eau indéfinie, la mer, par exemple, sa limite sera la ligne d'horizon. — S'il existe des édifices, les corniches sont horizontales et en prolongeant jusqu'à leur intersection, 2 horizontales parallèles telles que EA et EC,

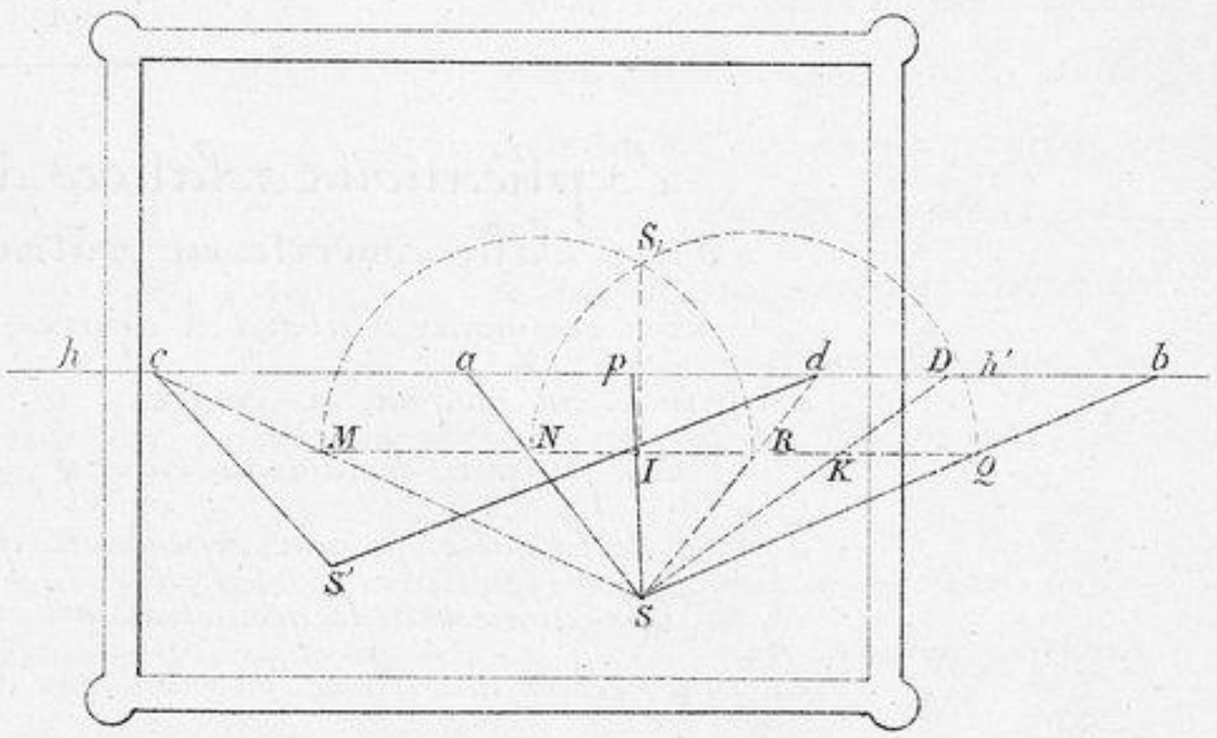
on aura leur point de fuite f; faisant de même pour deux autres, $AB - CD$, on aura un nouveau point de fuite φ. La ligne d'horizon s'obtiendra en joignant les points f et φ.

Recherche des points principaux de fuite et de distance.

Dans presque tous les tableaux il est possible de trouver deux droites que l'on sait être dans un plan horizontal, et à angle droit l'une sur l'autre. Par exemple, dans le croquis précédent, l'angle FCD des 2 murs de la maison figurée en perspective, est droit, et dans un plan horizontal.

Imaginons que dans le tableau nous ayons 2 angles aSb et $cS'd$, dans ces conditions.

Par le point S menons deux droites $Sc - Sd$ parallèles aux droites cS' et $S'd$, c'est-à-dire concourant aux mêmes points de fuite c et d. L'angle cSd est également droit dans le géométral. Opérons le relèvement de ce géométral. A cet effet prenons une charnière MQ, coupant les 4 droites en $MNRQ$. L'angle MSR qui est droit, se relèvera et aura son sommet S relevé en S_1 sur la demi-circonférence déduite sur MR comme diamètre. — De même, le point S, sommet de l'angle droit NSQ se relèvera sur la demi-circonférence dont NQ est le diamètre. — Le point S sera donc relevé en S_1 à l'intersection des deux cercles. — Si maintenant nous remettons le géométral en place, la perpendiculaire IS_1 deviendra IS du géométral. Elle est perpendiculaire au Tableau; elle donne donc en p sur hh' le point de fuite principal

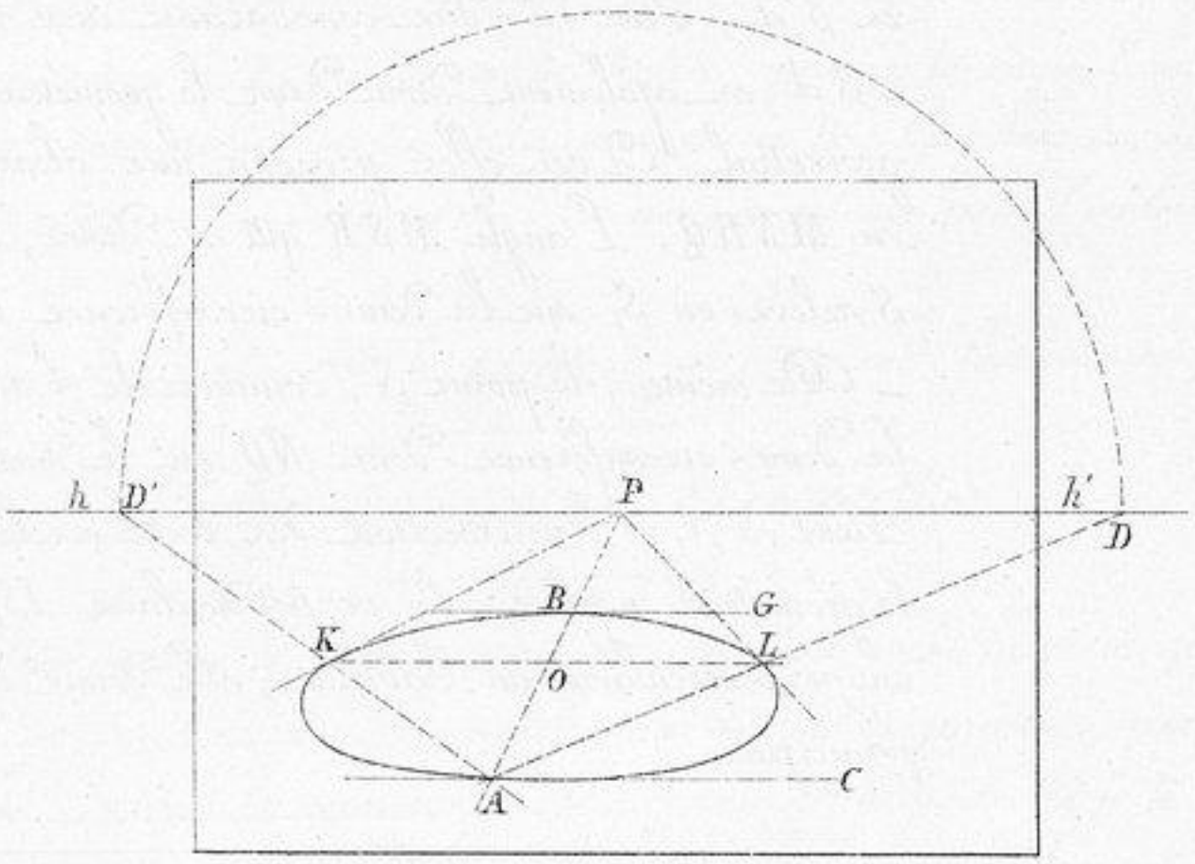


Portons sur la ligne de front IQ une distance IK = I,S, = I,S du géométral, et joignons SK ; cette droite prolongée donne par son intersection D avec la ligne d'horizon, le point de distance.

Autre Méthode. — La connaissance d'une figure que l'on sait être la perspective d'un cercle horizontal, permet de déduire les deux points de distance principaux.

Deux tangentes AC, BG parallèles à la ligne d'horizon donnent une ligne de contact AB, perpendiculaire au tableau, qui fuie au point principal p et qui le détermine. — Deux tangentes PK et PL, menées du point p donnent une corde de contact KL ; passant par le centre o.

En joignant AK, ou AL, on a par rencontre avec la ligne d'horizon les deux points de distance D et D'.



Explications relatives à la 3e Epure. — Perspective d'une Salle couverte en voûtes d'arêtes. —

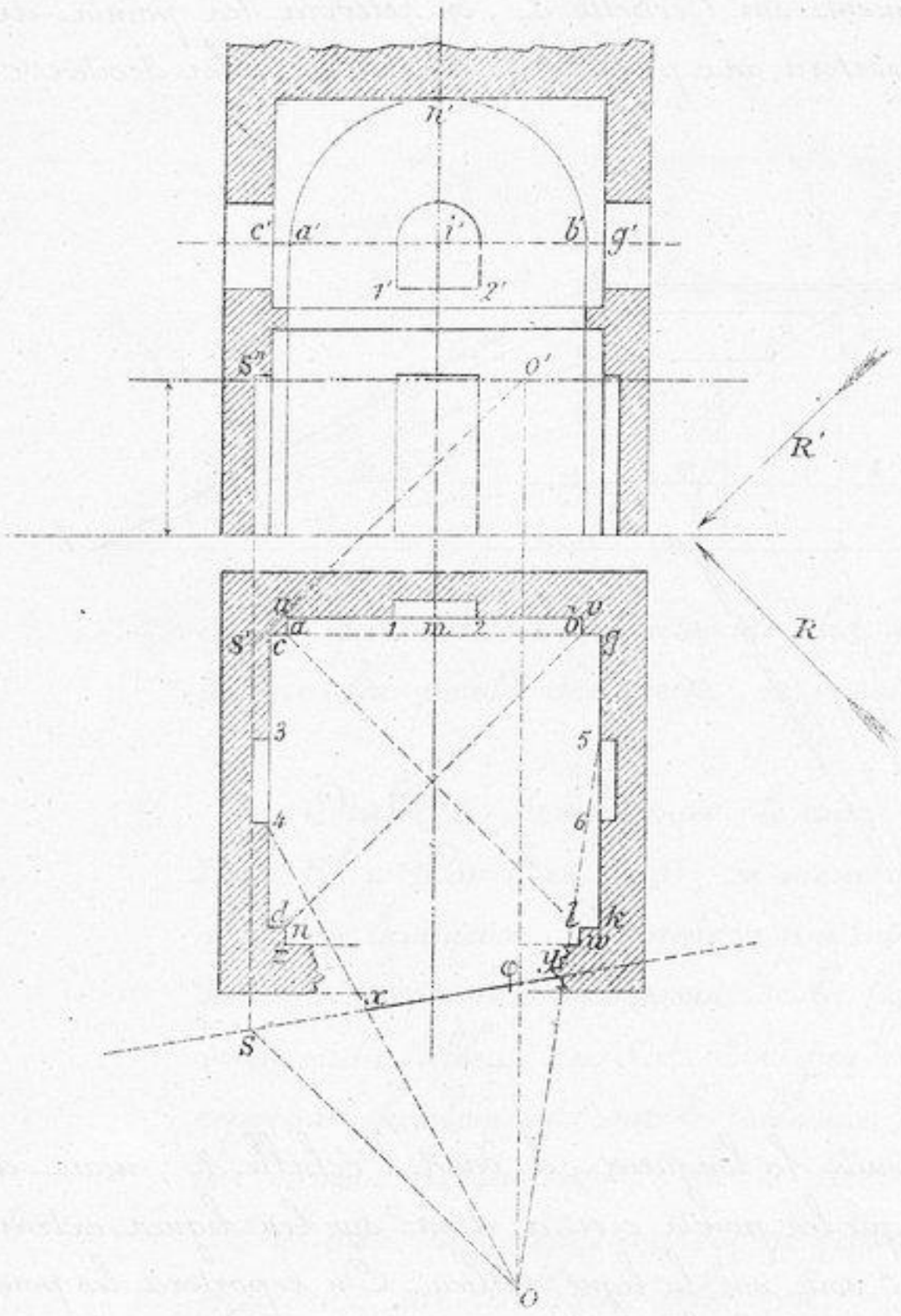
On dessinera d'abord l'Epure, c'est-à-dire le plan et la coupe conformes au croquis ci-contre.

On placera le tableau en xy, l'œil étant en o, de manière à voir 3 faces de la salle, sans cependant qu'aucune d'elles soit de front.

On abaissera le géométral et on fera, comme il a été dit plus haut, la perspective auxiliaire du plan sur ce géométral abaissé.

On sera bien de prendre comme fuyantes principales les droites telles que cd, kg, ... dont le point de fuite est en φ. — Les droites telles que ab, cg, seront déterminées chacune par les 2 points où elles coupent les lignes kg et cd, prises comme échelles de profondeur.

Le tableau sera amplifié et fait aussi grand que possible. Supposons-le quadruplé. — On se servira des 1/4 de profondeur, et des points de quart de distance.



On remontera du géométral abaissé aux perspectives des points de l'espace en se servant, comme il a été dit, d'un plan fuyant auxiliaire. Tous les points les plus importants de l'épure seront ainsi relevés directement.

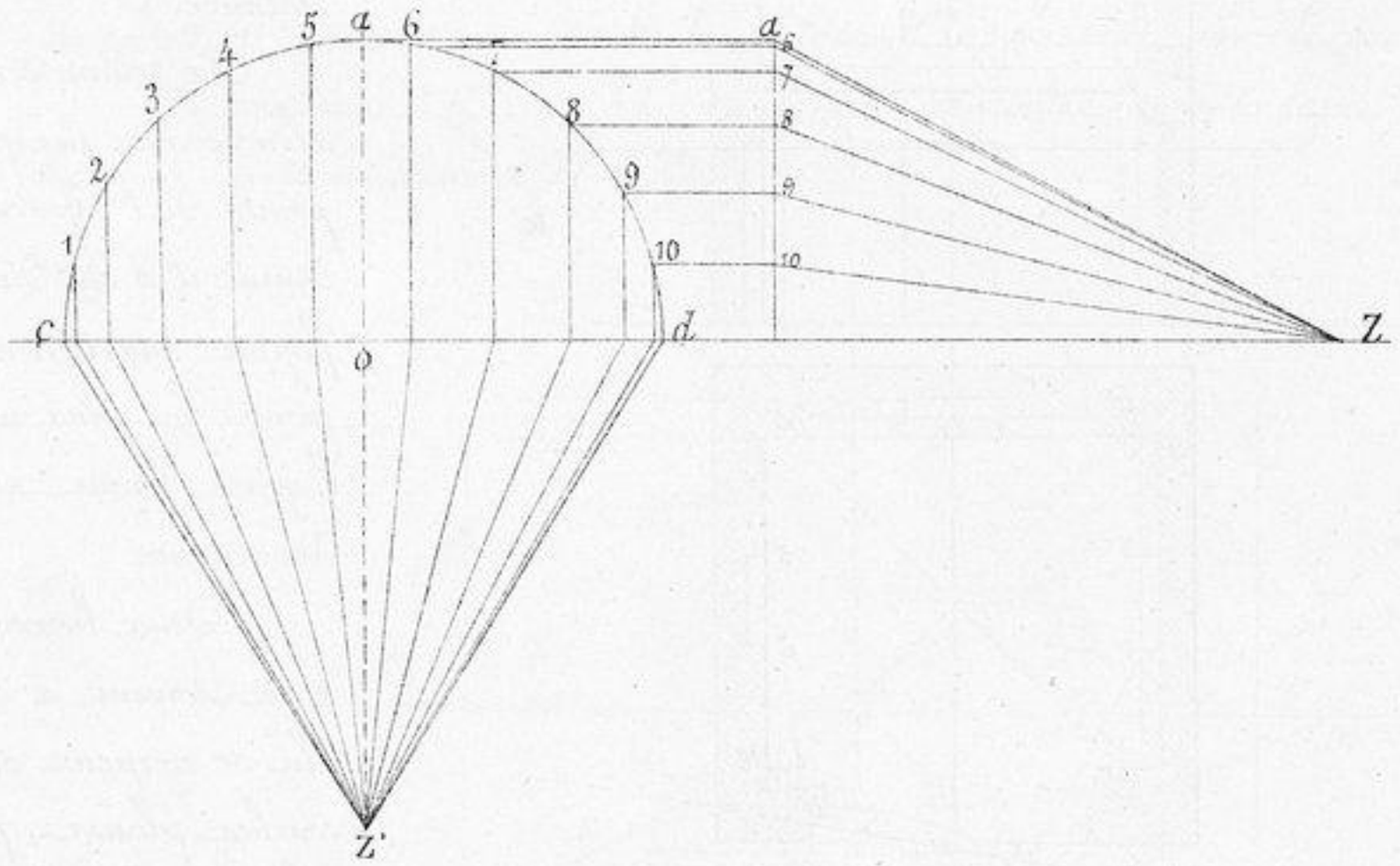
Deux berceaux à angle droit servent à couvrir la salle. Ils se coupent suivant deux courbes planes, projetées horizontalement suivant les diagonales nb et al. Ils ont pour courbes de tête sur les murs de la salle, le premier, les cercles projetés en uv et xw sur le plan, et le second, les cercles cd et gk. Ce sont ces 4 cercles que l'on mettra d'abord en perspective, de la manière suivante. — Prenons le cercle cd.

Le diamètre horizontal cd, le centre o, et le rayon vertical o∝ auront été mis directement en perspective. — Cela fait: si nous joignons ∝ au point de fuite φ de la ligne cd, nous aurons en c c' d d', la

perspective du demi-carré circonscrit au demi-cercle.

On supposera le berceau divisé en 11 assises de voussoirs, et l'on construira, à part, deux échelles convergentes comme celle décrite plus haut ; l'une Z répondant aux hauteurs, l'autre Z', aux largeurs.

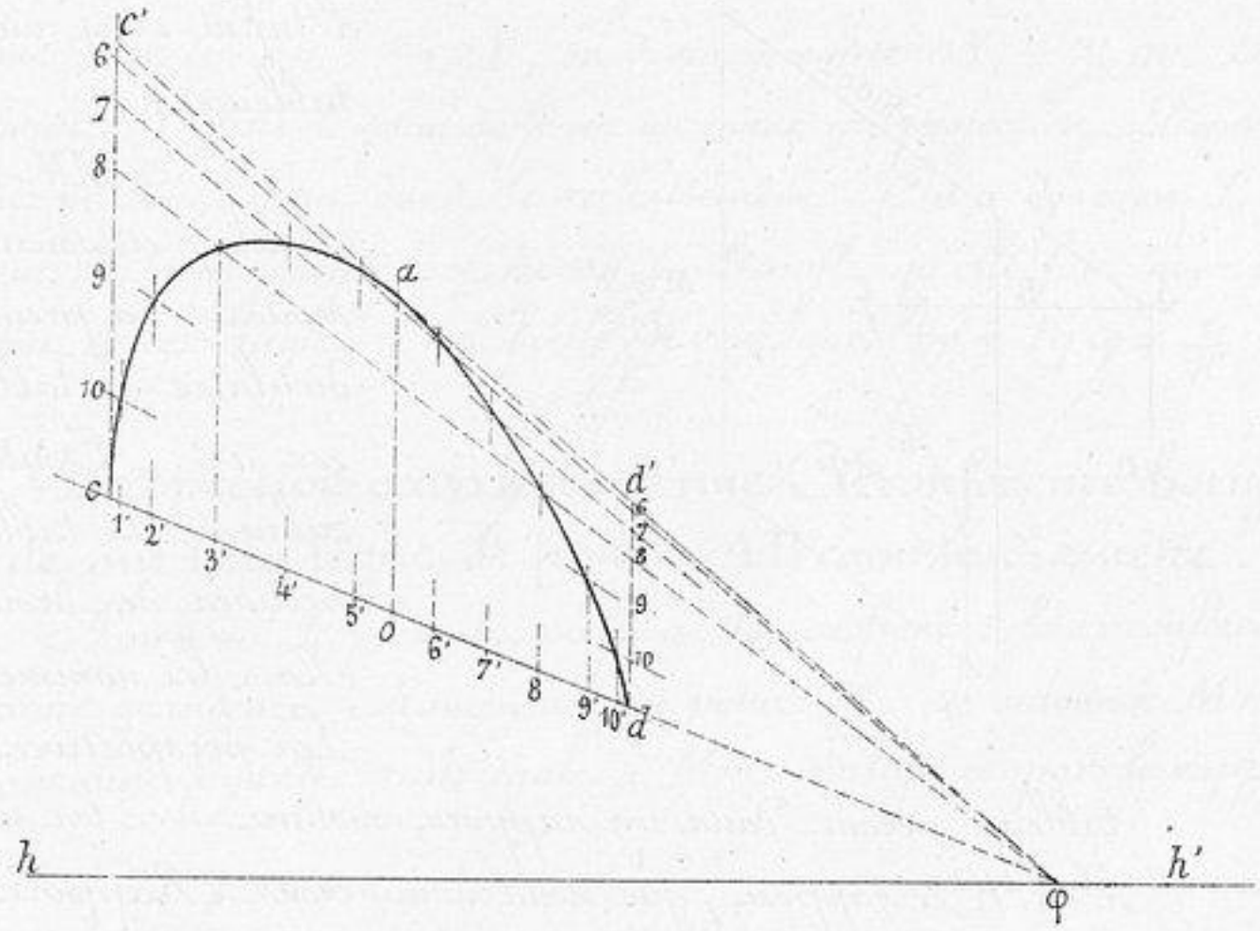
On prendra sur une bande de papier les hauteurs cc' et dd' ; on les inscrira verticalement sur l'échelle Z, on relèvera les points de rencontre et on les reportera aux points 6.7.8.9.10, sur les droites cc' et dd' du tableau.



On inscrira ensuite la longueur cd dans l'échelle Z', mais en biais, et de telle sorte que les points c et d étant sur les lignes extrêmes de l'échelle, le point o soit sur la ligne milieu. On reportera les points trouvés en 1'2'3'4'.... sur la ligne cd du tableau. Puis, par recoupement des fuyantes 66 – 77 – 88.... et des verticales 1'.2'.3'.... on aura les points du cercle.

On fera de même pour les quatre autres cercles. Menant ensuite les génératrices des 2 berceaux, ces droites se recouperont en des points de l'arête.

Remarque : Cette arête est projetée géométralement en ligne droite,



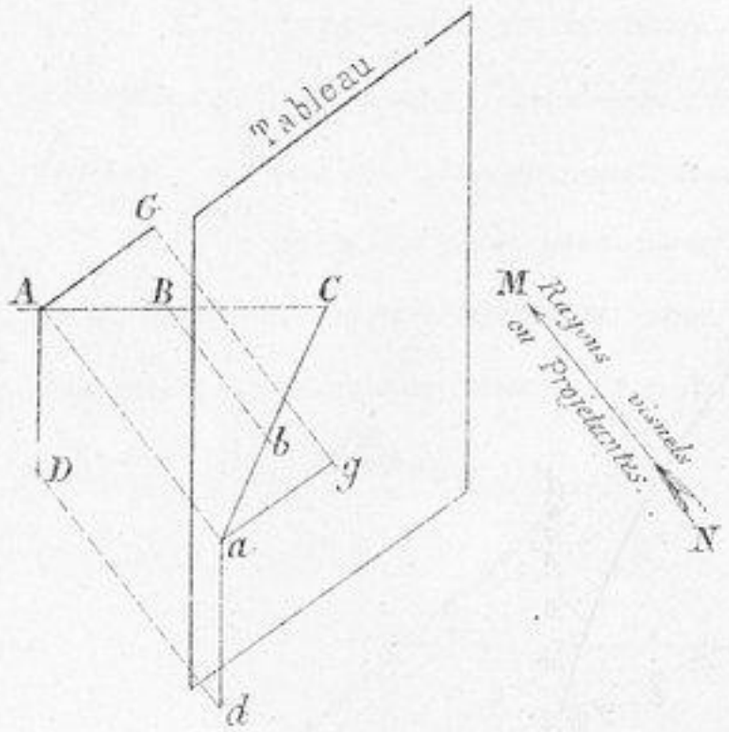
ce qui permettra, connaissant les génératrices d'un seul berceau, d'en déduire les pointe de l'arête, et ensuite les génératrices de l'autre berceau.

Ombres. Sur l'Epure, le rayon est donné par ses projections à 45° R et R'. – Par l'œil, oo', on menera sur l'Epure une parallèle oS, oS' au rayon lumineux. On prendra son intersection S, S' avec le tableau. La distance de ce point au dessous de la ligne d'horizon est S'S''; sa distance au bord x du tableau est Sx. On quadruplera ces longueurs et on les reportera facilement sur le tableau, ce qui donnera le point de fuite des rayons lumineux, c'est-à-dire la perspective du Soleil, dans l'espace. – On aura sa perspective sur le géométral en projetant le point de fuite précédent sur la ligne d'horizon.

Il n'y aura que la fenêtre de droite, celle dont le centre est en g' sur la coupe, qui portera lumière sur le mur du fond, u v.

Perspective Cavalière ou Projections obliques.

Dans la perspective cavalière, les rayons visuels sont parallèles, mais obliques au tableau, c'est donc une perspective faite en supposant



que le spectateur se soit éloigné à l'infini dans une direction oblique au tableau.

Soit MN la direction des rayons visuels, et soient AC – AG – AD trois droites. La première, AC, est perpendiculaire au tableau. Sa perspective est aC. – Toutes les droites perpendiculaires au tableau auront pour perspectives des droites parallèles à aC. Nous les nommerons des fuyantes.

Les perspectives de ces normales au tableau seront dans un rapport constant avec les normales de l'espace. Soit K ce rapport, que nous nommerons Rapport de Réduction.

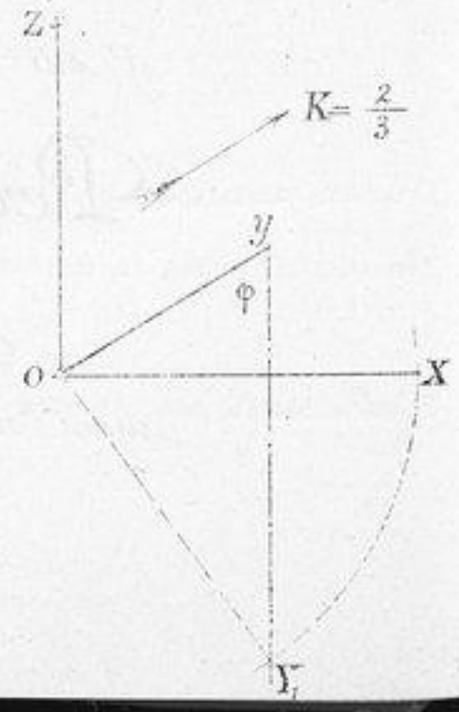
La droite AG est de front et AD est verticale. Ces deux droites se perspectivent en vraie grandeur, et il en sera de même pour toute figure de front.

Une perspective cavalière est déterminée lorsque l'on se donne : — 1° Une direction fuyante, c'est-à-dire la direction des droites suivant lesquelles se projettent obliquement les normales au tableau ; et 2° Le rapport de réduction K suivant lequel les normales sont réduites ou amplifiées par la perspective. – Ordinairement K est plus petit que l'unité.

Rabattement des projetantes. – Angle qu'elles font avec le Tableau.

Soit oX – oY – oZ, 3 axes coordonnées, formant pour plus de clarté les 3 arêtes d'un cube, et mis en perspective cavalière. – Les deux axes de front ox et oz sont projetés en vraie grandeur et parallèlement à eux-mêmes ; le 3e axe oY, est projeté suivant la fuyante oy et réduit dans un rapport K, que nous prendrons, par exemple, égal à 2/3.

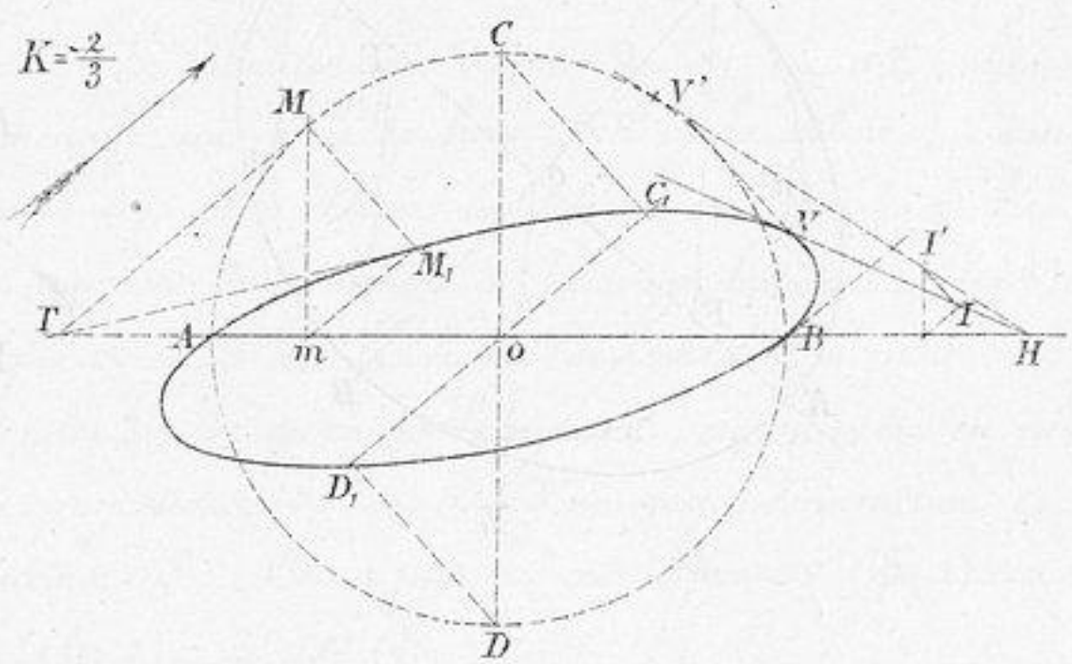
Rabattons le plan qui projette oY sur le plan de front XoZ. Sa trace sur le plan de front est précisément la projection oy, et ce



sera la charnière. La ligne o Y de l'espace, étant perpendiculaire au plan de front se rabattra suivant o Y_1 perpendiculaire sur la charnière oy, et comme l'on a $oy = \frac{2}{3}\, oY$, on devra prendre $oY_1 = \frac{3}{2}\, oy$. La projetante du point Y perce le plan de front au point y, projection oblique de Y. Ce point ne bouge pas dans le rabattement. On a donc en $Y_1 y$, le rabattement de la projetante, et en $oy\, Y_1$ l'angle qu'elle fait avec le tableau. — Soit φ cet angle, il est facile de voir que l'on a $tg\, \varphi = \frac{1}{K} = \frac{3}{2}$.

Perspective cavalière d'une Circonférence horizontale décrite sur une ligne de front AB comme diamètre.

Amenons le plan du cercle à être de front ; la circonférence se projette alors en vraie grandeur. Ramenons un point M. L'ordonnée M m se rabat suivant une fuyante m M_1 égale à Mm multipliée par le rapport K.



La tangente en M_1 est le rabattement de la tangente en M. — Soit T le point où cette dernière perce la charnière ; la tangente sera TM_1.

Les deux diamètres à angle droit AB et CD donnent en perspective deux diamètres conjugués de l'Ellipse.

Tangente passant par un point I.

On considère I comme la perspective d'un point du plan du cercle. On relève ce point en I' ; du point I' on mène une tangente au cercle relevé et on remet cette tangente en place en se servant du point H où elle rencontre la charnière.

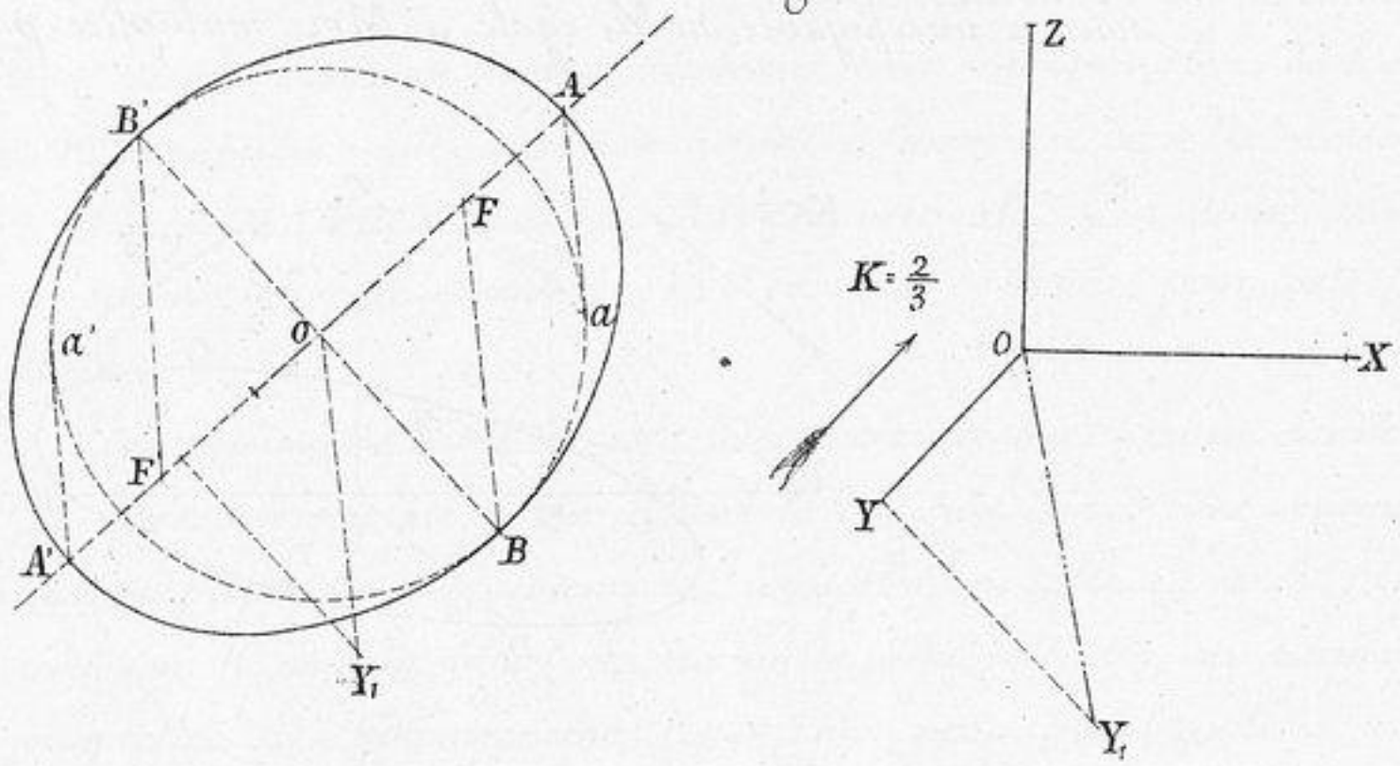
Tangente parallèle à une droite donnée.

Parallèlement à cette droite relevée, on mènera une tangente à la circonférence de front. — Puis on replacera la tangente ainsi menée, en se servant du point sur la charnière.

Contour apparent d'une Sphère.—

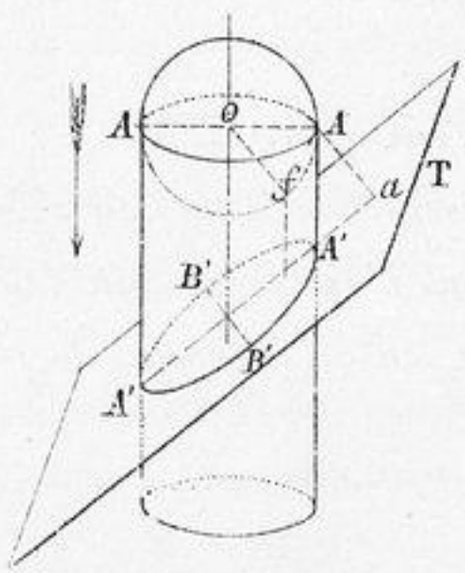
Je trace d'abord le grand cercle, section de la sphère par un plan de front. Je considère le cylindre ayant ses génératrices parallèles aux projetantes et circonscrit à la sphère. Sa trace sur le plan du tableau ou sur tout plan de front, le plan de front du cercle précédent, par exemple, sera le contour apparent cherché.

Fig. 1.



D'après le théorème de Dandelin (fig. 2) lorsqu'un plan T coupe un cylindre circonscrit à une sphère, le grand axe A'A' de l'ellipse de section s'obtient en menant 2 tangentes AA' et AA' au grand cercle de la sphère dont le plan passe à la fois par l'axe et par une normale Aa au plan sécant, et prenant les intersections A' et A' avec le plan sécant. Le petit axe B'B' est perpendiculaire au précédent, et égal au Diamètre de la sphère.

Fig. 2.



Dans la perspective cherchée, le plan du grand axe (fig. 1) est le plan AA' parallèle aux fuyantes et passant par le centre o. _ On le ramène de front en le rabattant sur le tableau. Son grand cercle de section avec la sphère se rabat suivant le grand cercle de front pris à priori. Le rayon visuel a été rabattu comme ci-dessus suivant oy_1. _ On mène au grand cercle 2 tangentes a A et a'A' parallèle à oy_1 et les points A et A' sont les extrémités du grand axe. _ Le petit axe est le diamètre BB' du grand cercle, perpendiculaire sur AA'

En menant par les points B et B', des parallèles à la projetante rabattue oy_1, on aura en F et F' sur le grand axe, les deux foyers.

Ombre propre d'une sphère, son ombre portée dans une niche.

Soit I le centre de la sphère, - BB' son diamètre. On a construit (fig. 2) en ox, oy, oz, les 3 axes coordonnés. _ oy est la direction des fuyantes. _ Le rapport $K = \frac{2}{3}$. Le rabattement de front de oy est oY_1, obtenu comme ci-dessus. En menant au cercle de front BB' de la sphère, 2 tangentes aA et a'A' parallèles à oy_1 on a obtenu en AA' et en BB' (fig. 1) les 2 axes de l'ellipse contour apparent de la sphère. Le rayon lumineux (fig. 3) fait en projection 2 angles α et β avec la ligne de terre. On prend un point o quelconque SS' (fig. 3) de ce rayon lumineux, et on met en perspective (fig. 2) les deux projections os' et os d'un rayon lumineux et le rayon lumineux lui-même oS. _ On a pris, à cet effet $os'' = \alpha s''$ (fig. 2) $= \alpha s''$ (fig. 3). $s's'' = s's''$ et ss'' (fig. 2) $= \frac{2}{3}\ ss''$ (fig. 3).

On aura besoin du rabattement du rayon lumineux sur le plan de front xoz. La trace du plan projetant le rayon lumineux sur le plan xoz, est la projection verticale os'.

On prend $s'S_1'$ = perpendiculaire sur os' et égal à $\frac{3}{2}$ de ss'' et l'on a en oS_1 le rayon lumineux rabattu sur un plan de front. Cela posé, pour obtenir des points de l'ombre propre de la sphère employons la méthode des plans sécants.

Coupons (fig. 1) par un plan MN, parallèle aux plans projetant verticalement les rayons lumineux. Sa trace sur le plan de front de la sphère est MN, parallèle à os'. Il coupe la sphère suivant un petit cercle rabattu en vraie grandeur avec MN pour diamètre. On mène à

Fig. 1.

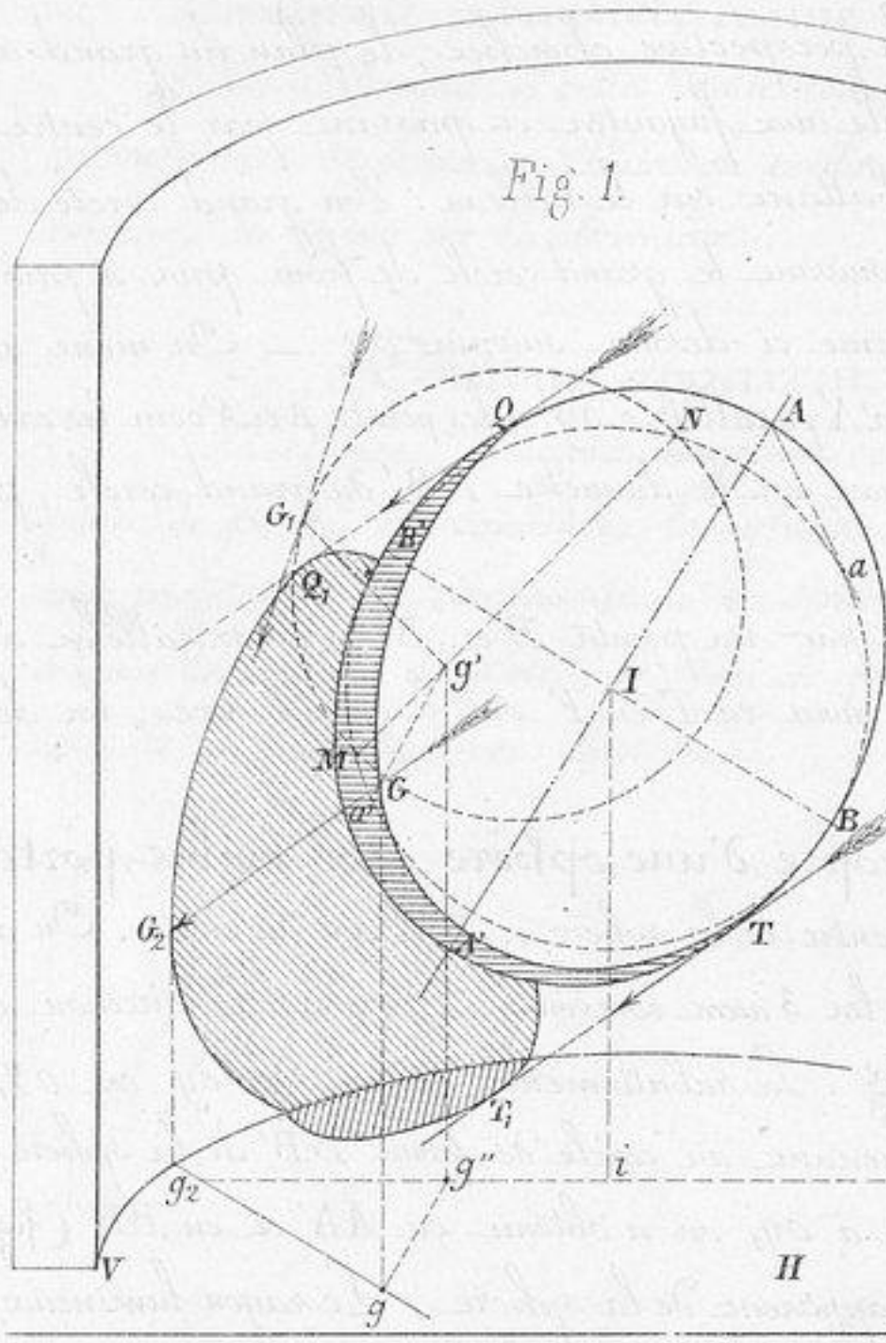


Fig. 3.

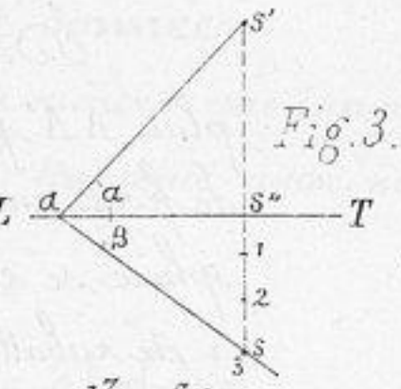
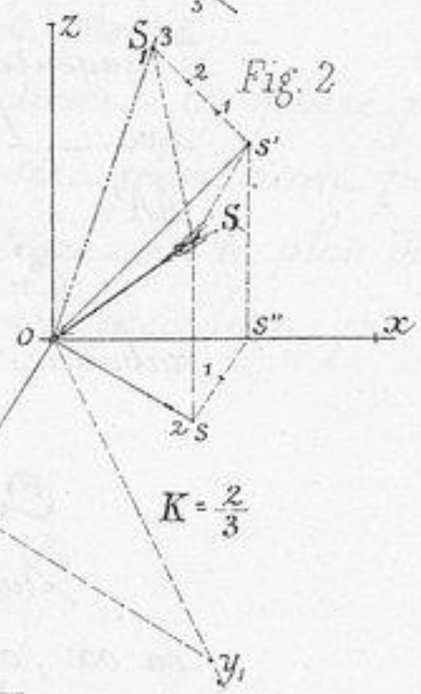


Fig. 2



ce petit cercle deux tangentes parallèles au rayon lumineux rabattu oS_1 : le point de tangence G_1 est un point d'ombre propre, mais rabattu. Pour le ramener, je mène la perpendiculaire $G_1 g'$ sur la charnière ; elle se relève suivant une fuyante $g'G = \frac{2}{3} G_1 g'$, ce qui donne en G un point de l'ombre propre.

Les points T et Q situés sur le contour apparent s'obtiennent en menant à ce contour deux tangentes parallèles au rayon de l'espace oS.

Ombre portée dans l'intérieur de la Niche.

Soit V W la base de cette niche sur un plan horizontal H.

On projette G et g' en g et g'' sur ce plan H ; gg'' est une fuyante égale et parallèle à GG'. — On mène gg_2 parallèle à la projection horizontale oS (fig. 2) du rayon lumineux, puis GG_2 parallèle au rayon de l'espace et l'on obtient en G_2 un point de l'ombre portée.

Le reste de la courbe d'ombre portée n'a pas été tracé avec exactitude sur le croquis ci-joint. — On remarquera que l'ombre portée doit être tangente aux 2 rayons TT_1 et QQ_1 menés tangentiellement au contour apparent de la sphère

---

Les questions qui précèdent permettront de résoudre les problèmes qui se présenteront dans la 4e. épure (Ombres d'une niche et d'un cylindre surmonté d'une sphère) sans qu'il soit nécessaire de donner à ce sujet de nouvelles explications.

Perspective axonométrique.

Dans les édifices et les machines on distingue en général trois directions principales parallèles aux arêtes d'un trièdre trirectangle. Dans la perspective axonométrique, on place ce trièdre des axes coordonnés, dans une position quelconque, puis on le projette orthogonalement et non pas obliquement, sur le plan de projection.

Voyons d'abord si trois droites quelconques Sx, Sy, Sz, issues d'un même point peuvent être prises pour projections des trois arêtes d'un trièdre trirectangle, et cela étant possible, dans quel rapport chacune d'elles sera réduite par le fait de sa projection.

Coupons le trièdre par le plan de projection ; soient a. b. c, les traces de ses trois arêtes. — Nous remarquerons d'abord que les droites $ab - bc - ca$, traces des faces, doivent être perpendiculaires aux projections des arêtes opposées : Sc, Sa et Sb.

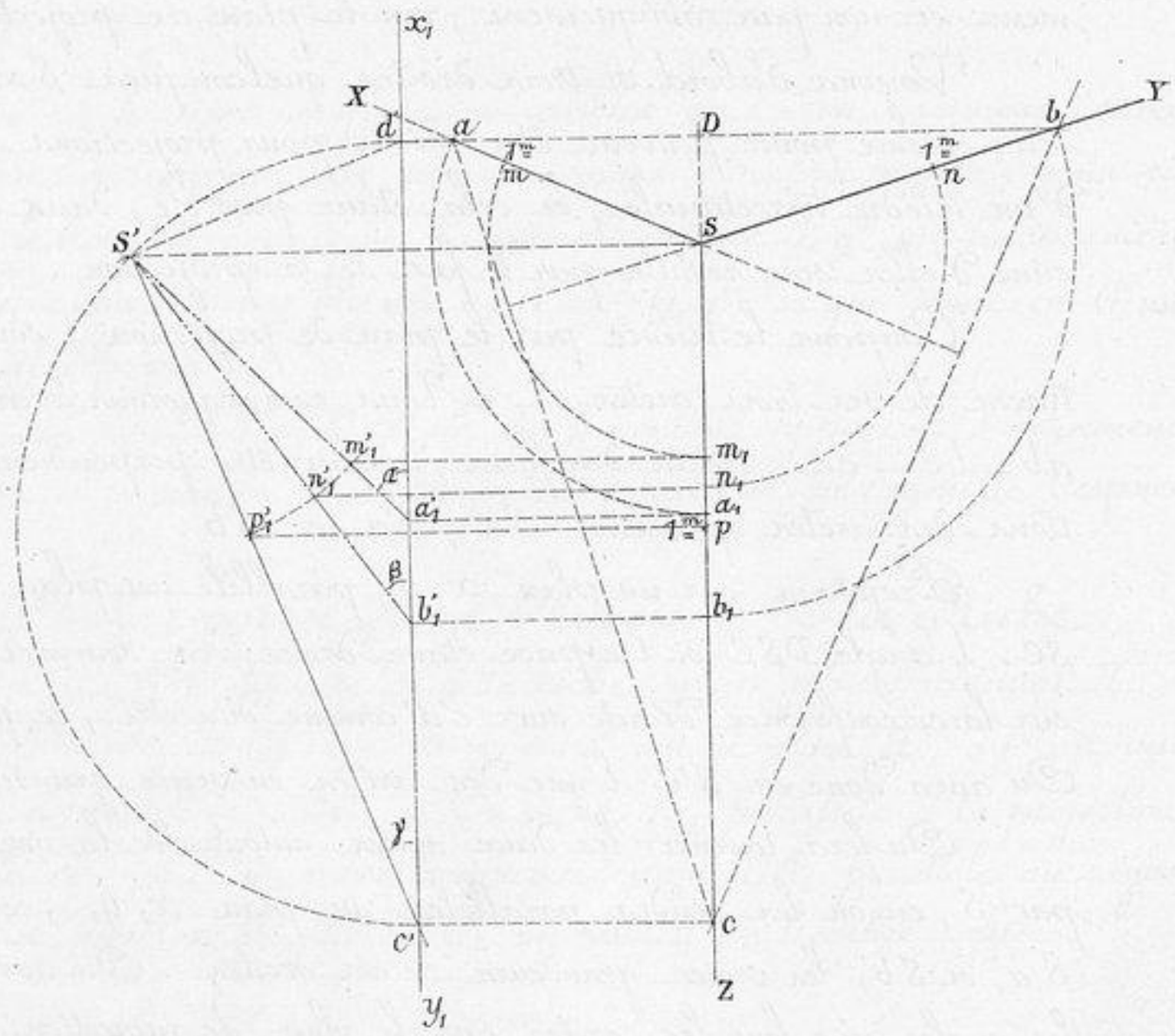
Projetons sur un plan $x_1 y_1$ parallèle au plan projetant l'arête SC. L'angle DSC de l'espace étant droit, son sommet S' se projettera sur la circonférence décrite sur $c'd'$ comme diamètre, ce qui le déterminera. On aura donc en $S'C'$ l'une des arêtes en vraie grandeur.

On fera tourner les deux autres autour de la verticale passant par S, et on les rendra parallèles au plan $x_1 y_1$, ce qui donnera en Sa'_1 et Sb'_1 les vraies grandeurs de ces droites. On aura donc en α, β, γ les angles que font les arêtes avec le plan de projection ; puis, en portant

sur chacune d'elles en $S'm'_1$ – $S'n'_1$ – $S'p'_1$ trois longueurs égales à 1 mètre mesuré à l'échelle du dessin, projetant et ramenant les points ainsi obtenus en m, n et p, on déduira en Sm – Sn – Sp la grandeur réduite de 1 mètre comptée sur les 3 échelles.

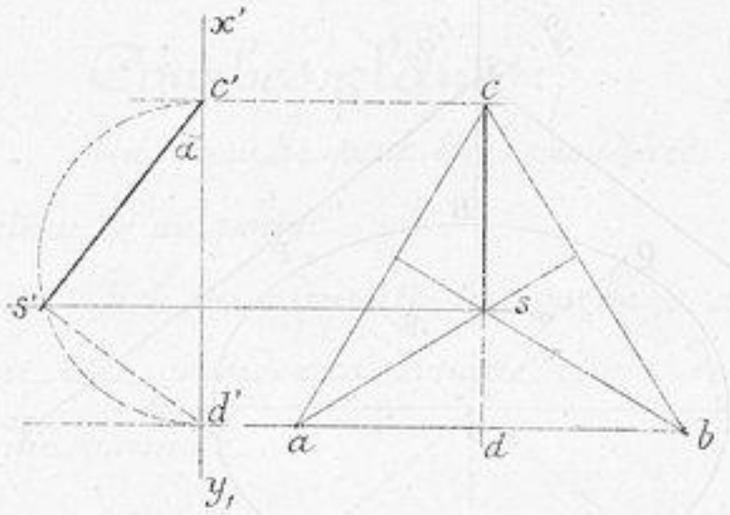
On voit donc que trois droites quelconques peuvent être prises, pour les trois projections des axes, seulement, pour trouver les échelles de réduction on doit faire la construction précédente, et prendre comme traces des faces sur le tableau, 3 droites ab – bc – ca perpendiculaires aux projections de ces axes.

On convient souvent d'emplifier la figure de l'espace avant la projection, dans un rapport tel que les longueurs mesurées sur les trois arêtes soient les longueurs de l'espace; alors il n'y a pas de réduction d'échelles; mais on voit alors qu'il a fallu pour cela amplifier les trois arêtes dans un rapport différent, ce qui entraîne une déformation de l'objet. Avec cette convention, si l'on projetait une sphère, la figure que l'on obtiendrait serait, en réalité, la projection d'un ellipsoide à 3 axes inégaux.



Cet inconvénient n'aurait plus lieu si les trois arêtes faisaient le même angle avec le plan de projection, c'est ce qui a lieu dans la perspective isométrique.

Perspective Isométrique.



C'est une perspective axonométrique, dans le cas particulier où les trois arêtes du trièdre sont également inclinées sur le tableau. — Le triangle a b c formé par les traces des faces est équilatéral.

Faisons la même figure que ci-dessus.

On aura :

$$\text{Cos. } \alpha = \frac{sc}{s'c'}, \text{ mais}$$

$$\overline{s'c'}^2 = sc \times dc, \text{ donc élevons Cos } \alpha \text{ au carré :}$$

$$\text{Cos}^2\alpha = \frac{\overline{sc}^2}{\overline{s'c'}^2} = \frac{sc}{dc} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \text{Cos } \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

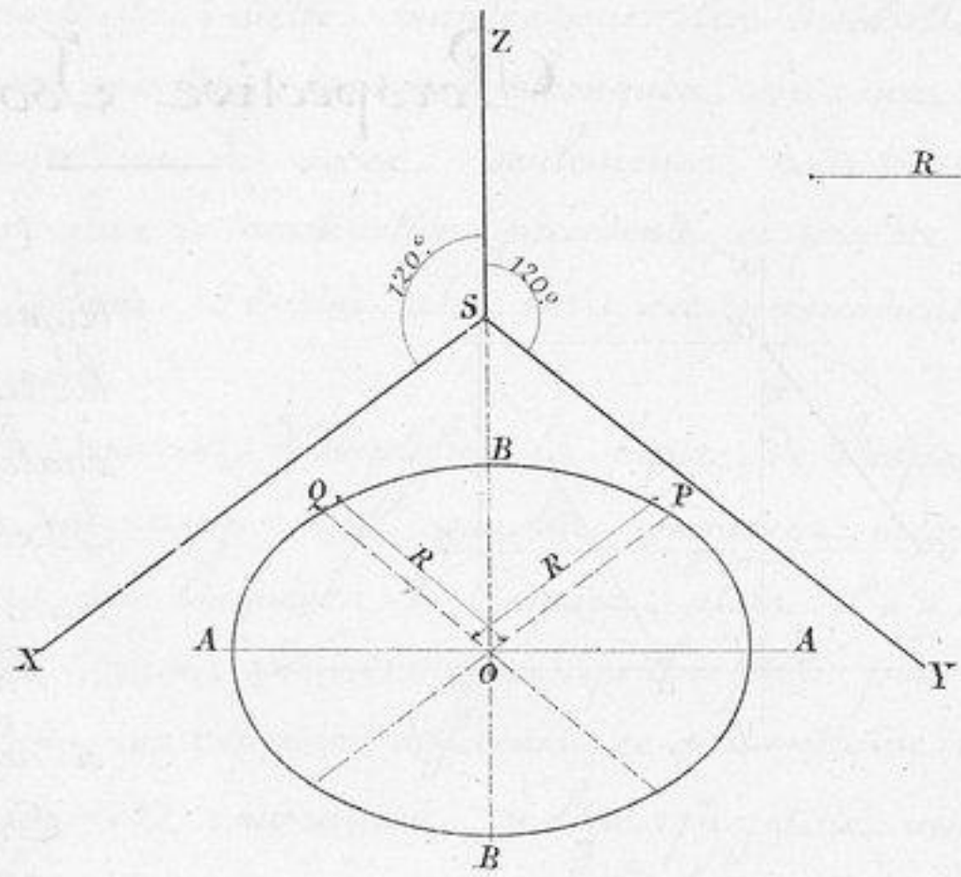
Il faudra donc amplifier les dimensions, dans le rapport de $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ pour les avoir en vraie grandeur, ou du moins à l'échelle non réduite, sur la projection.

Perspective d'une Circonférence isométrique.

Toutes les circonférences situées dans des plans isométriques (parallèles aux faces du trièdre) se projettent suivant des ellipses semblables. Soit, par exemple, une circonférence dans le plan des xy. — Soit R son rayon et O son centre. Le grand axe AA sera parallèle à la trace du plan XY sur le tableau, c'est-à-dire perpendiculaire à la bissectrice de l'angle XOY. — Sa grandeur sera $2R \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, d'après la convention ; — Le petit axe sera égal à $\frac{2R\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \text{Sin } \alpha$. On pourra le calculer facilement.

On peut tracer plus facilement cette ellipse. Les deux demi-diamètres OP — OQ parallèles à ox et à OY seront égaux à R. — Ce seront 2 diamètres conjugués, comme projections de deux diamètres à

angle droit du cercle ; — ce qui permettra de tracer l'ellipse.



Rapporteur isométrique. — Il se compose d'une série de circonférences isométriques et concentriques. En réalité, il est donc formé d'Ellipses semblables. On s'en sert en plaçant le petit axe des ellipses parallèle à la bissectrice de la face dans laquelle on opère.

Il est gradué angulairement à l'aide du rabattement d'une des circonférences, et permet, soit de construire des angles donnés, soit de porter une longueur donnée sur une ligne oblique.

Fin de la 1ère Partie.

2.e Partie.

Notions élémentaires sur la Théorie des Surfaces.

Courbes planes:

Une courbe peut être considérée comme engendrée par le mouvement continu d'un point.

Si l'on rapporte la courbe à deux axes, ses coordonnées x et y peuvent être considérées comme étant des fonctions continues $f(t)$ et $\varphi(t)$ d'une même variable.

Tangente. — Une tangente est la limite d'une sécante qui a tourné autour d'un des points de sécance, jusqu'à ce que le 2.e point soit venu se confondre avec le 1.er

Des infiniments petits dépendant d'une Courbe plane.

Soient A et B, deux points infiniment voisins; nous prendrons pour infiniment-petit principal, ou du 1.er ordre, la longueur de l'arc de courbe AB; nous le désignerons par θ

On sait que l'on nomme infiniment petit du 2.e ordre, celui qui est de la forme $K\theta^2$. — K étant un coefficient quelconque, fini.

Est infiniment petit du 3.e ordre, celui de la forme $K'\theta^3$

— id ——— id ——— 4.e id ——— id ——— $K''\theta^4$, etc. . . .

Théorème fondamental sur les infiniments petits.

Ce théorème, démontré en analyse, est le suivant:

Dans toute limite de rapports ou de sommes d'infiniments petits, on peut substituer l'un à l'autre deux infiniments petits qui ne diffèrent l'un de l'autre que d'un infiniment petit par rapport à chacun d'eux. —

Autrement dit: — On peut négliger les infiniments petits d'un

ordre supérieur à ceux qui entrent dans les rapports ou dans les sommes dont on cherche les limites.

Remarque. — Les infiniment petits que l'on substitue l'un à l'autre doivent donc être du même ordre ; mais cela ne suffit pas ; il faut en outre que la limite de leur rapport soit l'unité.

Théorème. — La limite du rapport ou du produit de deux variables est égale au rapport ou au produit des limites de ces variables.

Théorème. La limite d'une somme de variables est égale à la somme des limites de ces variables.

Infiniments petits du 1.er ordre dans les courbes.

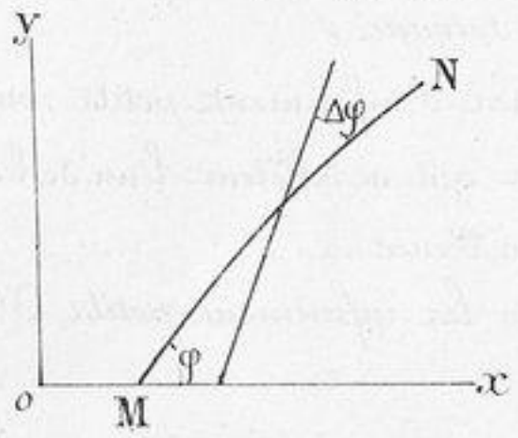
1.° La longueur θ de l'arc de courbe qui sépare 2 points infiniment voisins, est prise pour infiniment petit du 1.er ordre.

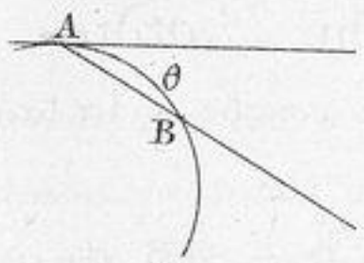
2.° Les différences Δx et Δy des coordonnées de ces 2 points ; sauf dans le cas particulier où la courbe aurait pour tangente en A, une parallèle à l'axe des x ou à l'axe des y, sont des infiniments petits du premier ordre.

3.° Si une 2.e courbe $A'B'$ a les coordonnées de ses points définies par des fonctions continues de la même variable t, dont dépendent les coordonnées de la première, et si les points infiniment voisins A' et B' correspondent aux points A et B de la 1.ère, l'arc $A'B'$ est un infiniment

petit de même ordre que AB ou que θ ; il est donc aussi du 1.er ordre.

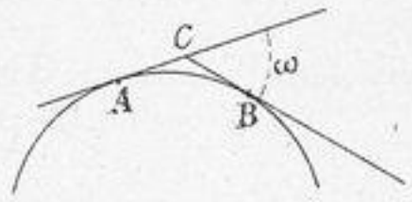
4.° Si une droite MN se déplace d'une manière continue en faisant avec l'axe des x un angle variable φ, et si son déplacement est réglé par la variable indépendante t, l'angle infiniment petit $\Delta\varphi$, formé par deux positions voisines de la droite, est infiniment petit du 1.er ordre.





5°. L'angle formé par la tangente au point A et la sécante AB est infiniment petit du 1er ordre, c'est-à-dire du même ordre que l'arc AB, ou θ.

6°. L'angle ω formé par la tangente en A et la tangente en B, est un infiniment petit du 1er ordre.

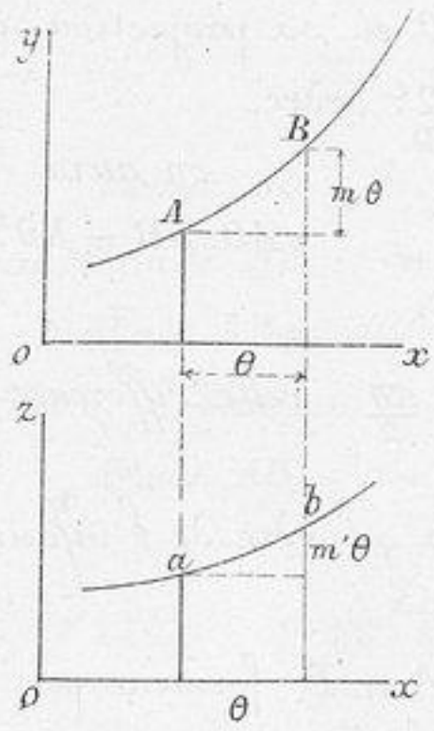


7°. Les deux tangentes CA, CB menées d'un point extérieur C à deux points infiniment voisins, A et B, sont de même ordre et tous deux du 1er.

Théorème sur les infiniment petits d'ordre supérieur.

Lorsqu'une fonction s'accroît d'une quantité mθ infiniment petite du premier ordre, tous les infiniment petits liés à cette fonction s'accroissent de quantités infiniment petites par rapport à eux, et de l'ordre immédiatement supérieur.

Soit y une fonction de x, représentée par la courbe AB : et soit $z = K\theta^n$, un infiniment petit du n^e ordre, lié à la variable x. Divisons la quantité z par θ^n pour la rendre finie ; elle deviendra : $z' = K$, K étant une fonction continue de x représentée par la courbe ab. Faisons croître x de la quantité θ du premier ordre. Lorsque l'on passera de A en B, y croîtra d'un infiniment petit mθ du premier ordre. La quantité K, fonction de x, croîtra aussi d'un infiniment petit m'θ également du premier ordre et sera devenue $(K + m'\theta)$.



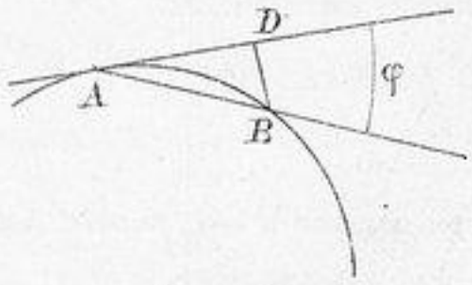
Par suite, z, qui est égale à $K\theta^n$, sera devenue :

$$(K + m'\theta)\theta^n = K\theta^n + m'\theta^{(n+1)} ;$$

c'est-à-dire, aura cru d'une quantité de l'ordre $(n+1)$;
C. Q. F. D.

Infiniment petits du 2e. ordre.

1°. La distance d'un point d'une courbe à la tangente à cette courbe est un infiniment petit du 2e. ordre.



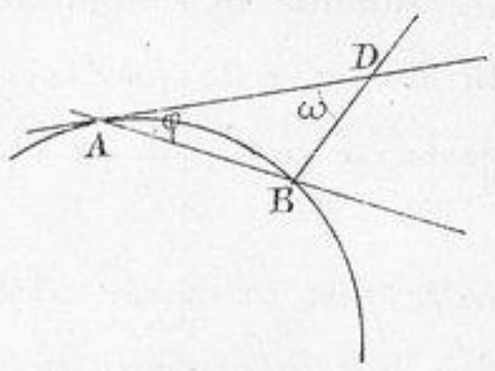
On a : $BD = AB \sin\varphi$.

AB est du 1er. ordre et de la forme $K\theta$

$\sin\varphi$ est du 1er. ordre et de la forme $K'\theta$.

donc $BD = K''\theta^2$.

2°. La distance d'un point d'une courbe à la tangente à cette courbe, comptée suivant une oblique à cette tangente est du 2e. ordre ; à moins que cette oblique ne tende à devenir, à la limite, parallèle à la tangente.



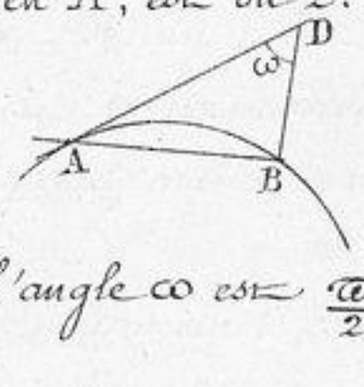
$$\frac{BD}{AB} = \frac{\sin\varphi}{\sin\omega}$$

Mais $\sin\varphi = K\theta$, et $\sin\omega$ a une limite finie, $\sin\omega'$, par exemple, et $AB = K'\theta$.

Donc :

$$BD = \frac{KK'\theta^2}{\sin\omega'}$$, qui est du 2ème ordre.

3°. La différence entre l'arc θ et sa projection oblique sous l'angle ω, faite sur la tangente en A, est du 2e. ordre



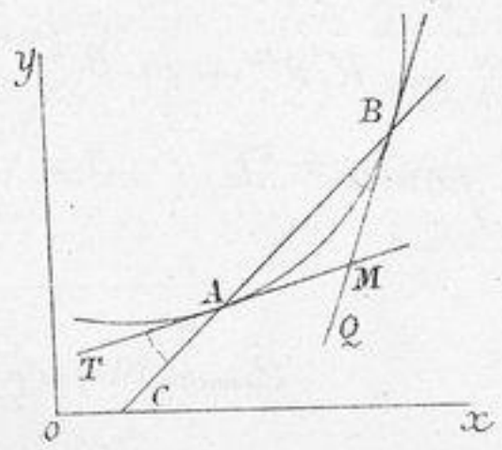
on aura

$AD - AB = K\theta^2$.

Si la limite de l'angle ω est $\frac{\varpi}{2}$, cette différence devient du troisième ordre.

Si la limite de l'angle ω est 0, l'ordre de l'infiniment petit s'abaisse. (Sera démontré plus loin)

4°. La différence des angles A et B formés par la sécante d'un arc et les tangentes aux deux extrémités de cet arc, est du 2e. ordre.



En effet, soit AB la sécante, AT la tangente en A et BQ la tangente en B. — L'angle TAC est infiniment petit du 1er ordre, ainsi que l'angle CBQ. — Lorsqu'on passe du point A au point B, la variable

indépendante s'est accrue d'un infiniment petit du 1er ordre, et tous les infiniment petits du 1er ordre se sont accrus de quantités du 2e ; par conséquent les angles A et B diffèrent d'une quantité du 2e ordre.

5° Les longueurs des deux tangentes MA et MB issues d'un même point, diffèrent d'une quantité du 2e ordre.

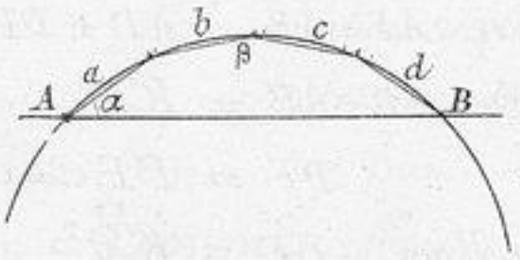
On a : $\frac{MA}{MB} = \frac{\sin B}{\sin A}$ et $\frac{MA - MB}{MB} = \frac{\sin B - \sin A}{\sin A}$

Or, $\sin B - \sin A$ est du 2e ordre, d'après ce qui précède ; $\sin A$ est du 1er, MB est du 1er ; donc $MA - MB$ est du 2e.

On dit : que les tangentes infiniment petites issues d'un même point sont égales ; c'est-à-dire, égales à un infiniment petit près d'ordre supérieur au leur.

Infiniment petits du 3e ordre.

1° La différence entre un arc et sa corde est du 3e ordre.



Décomposons l'arc AB en arcs plus petits. — La longueur de l'arc AB est, par définition, la limite de la somme des cordes a, b, c . . . .

Soient $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ les angles de ces petites cordes et de la grande corde AB ; on aura

$$\text{Corde } AB = a \cos\alpha + b \cos\beta + c \cos\gamma + \ldots .$$

Mais $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; d'où

$$\text{Corde } AB = a + b + c + \ldots . - 2\left(a \sin^2\frac{\alpha}{2} + b \sin^2\frac{\beta}{2} + \ldots .\right).$$

Soit φ un angle moyen, tel que :

$$a \sin^2\frac{\varphi}{2} + b \sin^2\frac{\varphi}{2} + \ldots . = a \sin^2\frac{\alpha}{2} + b \sin^2\frac{\beta}{2} + \ldots .$$

On aura :

$$\text{Corde } AB = a + b + c \ldots . - 2 \sin^2\frac{\varphi}{2}\left(a + b + \ldots .\right).$$

Mais, $a + b + c \ldots .$, c'est l'arc AB ou θ. — φ est infiniment petit du 1er ordre, — $\sin\varphi$ est de la forme $K\theta$, et son carré est de la forme $K\theta^2$; on aura donc finalement

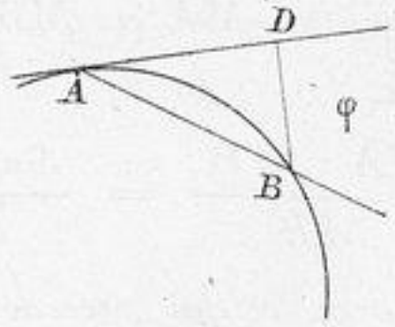
$$a + b + c \ldots . - \text{Corde } AB = 2 \sin^2\frac{\varphi}{2}\left(a + b + c \ldots .\right)$$

ou

$$\text{arc } AB - \text{Corde } AB = K\theta^2 \times \theta = K\theta^3$$

C.Q.F.D.

2°. La différence entre un arc et sa projection droite sur la tangente est du 3e. ordre.



On a $AD = \text{Corde } AB \cdot \text{Cos.} \varphi$

$= \text{Corde } AB \left(1 - 2 \cdot \text{Sin}^2 \frac{\varphi}{2}\right)$

Mais on peut remplacer dans cette expression, Corde AB, par arc AB, qui n'en diffère que d'un infiniment petit du 3e. ordre, et par suite

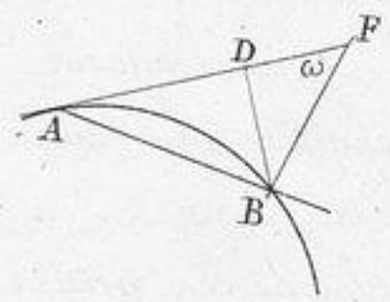
$AD = \text{arc } AB \left(1 - 2 \text{Sin}^2 \frac{\varphi}{2}\right)$

D'où

$\text{arc } AB - AD = \text{arc } AB \times 2 \text{Sin}^2 \frac{\varphi}{2}$

$= K\theta^3$ C. Q. F. D.

Remarque. Si la projection est oblique au lieu d'être droite, et si l'angle ω des projetantes avec la tangente n'a pas pour limite 90°, cette différence n'est plus que du 2e. ordre. En effet:



$AF = AD + DF$

et $AF - AB = AD + DF - AB.$

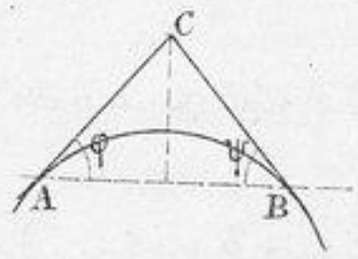
Or, $AD - AB = K\theta^3$

$DF = BF \cos \omega$;

Mais $BF = K'\theta^2$

Donc: $AF - AB = K\theta^3 + K'\theta^2$ qui est du 2e. ordre.

3°. La différence entre un arc et la ligne brisée formée par les deux tangentes aux extrémités de l'arc est du 3e. ordre.



$\text{Corde } AB = AC \cos \varphi + CB \cos \Psi$

Soit φ_1 un angle intermédiaire entre φ et Ψ

$\text{Corde } AB = (AC + CB) \cos \varphi_1 = (AC + CB)\left(1 - 2 \text{Sin}^2 \frac{\varphi_1}{2}\right)$

On remplacera la corde AB par l'arc et l'on aura

$(AC + CB) - \text{arc } AB = (AC + CB) \times 2 \text{Sin}^2 \frac{\varphi_1}{2}$

$= K\theta \times K'\theta^2 = K''\theta^3,$ C. Q. F. D.

4°. La différence entre les longueurs de deux normales infiniment voisines, est du 3e. ordre.

Soient OA et OB, deux normales.

On a:

On a : $\frac{OA}{OB} = \frac{\sin\beta}{\sin.\alpha}$ et $\frac{OA-OB}{OB} = \frac{\sin.\beta - \sin.\alpha}{\sin.\alpha}$

$$OA - OB = \frac{OB}{\sin\alpha}\left(\sin.\beta - \sin\alpha\right)$$

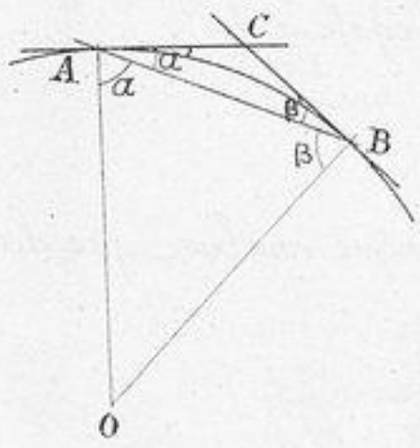
OB est fini ; $\sin\alpha$ a pour limite l'unité. Il suffit donc de prouver que :

$\sin\beta - \sin\alpha$ est de la forme $K\theta^3$.

Or, $\sin\beta = \cos\beta' = 1 - 2\sin^2\frac{\beta'}{2} =$

$\sin\alpha = \cos\alpha' = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha'}{2}$

$\sin\beta - \sin\alpha = 2\left(\sin^2\frac{\alpha'}{2} - \sin^2\frac{\beta'}{2}\right)$.



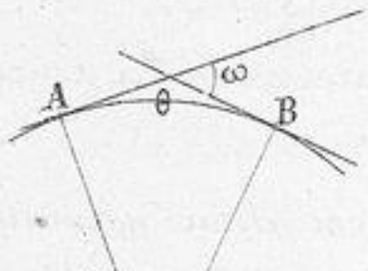
Mais à la limite les 2 tangentes AC et AB sont égales, et par suite, à la limite $\alpha' = \beta'$ et $\sin\alpha' = \sin\beta'$; à un infiniment petit du 2e ordre près.

Les deux quantités du 2e ordre, $\sin^2\frac{\alpha'}{2}$ et $\sin^2\frac{\beta'}{2}$, ayant zéro pour limite de leur différence, cette différence est au moins du 3e ordre. C. Q. F. D.

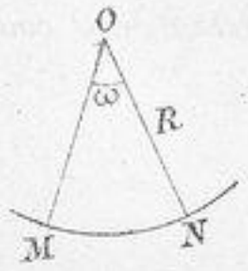
Résumé. — Dans la recherche d'une limite de rapport ou de sommes on pourra remplacer l'arc : 1° par sa corde ; 2° par sa projection droite ou oblique sur la tangente ; 3° par la somme des deux tangentes menées à ses extrémités ; 4° par le double de l'une des deux tangentes précédentes. &a ....

Courbure.

Angle de Contingence. — C'est l'angle ω formé par les deux tangentes menées aux extrémités d'un arc AB. C'est aussi l'angle formé par les deux normales aux points A et B.



On rappellera qu'un angle ω est un rapport. — C'est le rapport de l'arc de cercle MN au rayon R.



Courbure moyenne.

La courbure moyenne de l'arc de courbe AB est le quotient de l'angle de contingence ω, par la longueur de l'arc θ.

Courbure en un point.

C'est la limite de la courbure moyenne. C'est donc $\text{Lim.}\frac{\omega}{\theta}$

Courbure d'un arc de cercle.

Pour un arc de cercle on aura toujours

$$MN = \omega R \quad , \quad \text{ou} \quad \theta = \omega R \; ;$$

d'où

$$\frac{\omega}{\theta} = \frac{1}{R}.$$

La courbure d'un cercle est constante et égale à $\frac{1}{R}$.

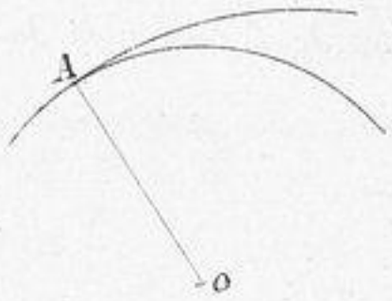
Rayon de Courbure.

C'est le rayon d'un cercle qui aurait la même courbure que la courbe au point considéré.

Soit ρ ce rayon de courbure, on aura donc

$$\rho = \text{Lim.}\frac{\theta}{\omega}.$$

Centre de Courbure. — Cercle osculateur.



C'est le centre d'un cercle qui serait tangent en A à la courbe et qui aurait même rayon de courbure qu'elle.

Ce cercle se nomme le Cercle osculateur ou le Cercle de Courbure de la courbe.

Position du Centre de Courbure.

Théorème. — Le centre de courbure est à la rencontre de deux normales infiniment voisines.

En effet, soit O la rencontre de ces deux normales,

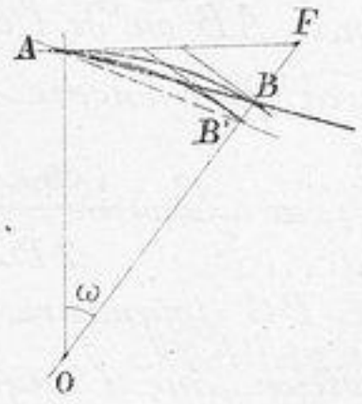
AB la courbe

AB' le cercle décrit de O comme centre avec OA pour rayon,

et AF', la tangente.

Par définition, on a :

$$\rho = \text{Lim } \frac{AB}{\omega} .$$



Mais AB et AB' ont tous deux même projection oblique AF sur la tangente, et à la limite, l'angle en F est droit. Donc AB et AB' ne diffèrent de AF et par suite ne diffèrent l'un de l'autre que d'un infiniment petit du 3e ordre ; on peut donc remplacer AB par AB' et par suite écrire :

$$\rho = \text{Lim } \frac{AB'}{\omega} .$$

Mais $\frac{AB'}{\omega}$ c'est AO, donc

$$\rho = \text{Lim } \overline{AO}$$

1ère Expression du rayon de courbure.

Dans le cercle AB' on a

$$\overline{AF}^2 = FB' \times (2R + FB') \quad , \text{ d'où}$$

$$R \text{ ou } \rho = \frac{\overline{AF}^2}{2\overline{FB'}} - \frac{FB'}{2}$$

On négligera $\frac{FB'}{2}$ qui est infiniment petit devant S qui ne l'est pas.

D'un autre côté on a vu que deux normales voisines avaient une différence qui était du 3e ordre, donc BB' est du 3e ordre et peut être négligé en présence de FB', qui est du 2e.

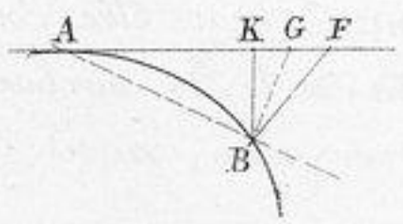
On aura donc

$$\rho = \text{Lim.} \frac{\overline{AF}^2}{2FB}$$

D'où la conséquence suivante : — D'un point voisin de la tangente, on abaisse une normale sur la courbe, et le rayon de courbure a pour expression le carré de la tangente divisé par deux fois cette portion de normale.

2e Expression.

Au lieu d'abaisser une normale sur la courbe, prenons le point B sur la courbe et abaissons une perpendiculaire sur la tangente, ce qui est plus facile. Soit BK cette perpendiculaire.



L'angle en F ayant pour limite un droit, les 2 lignes BK et BF sont égales à la limite et peuvent

être remplacée l'une par l'autre. On aura donc :

$$\rho = Lim \frac{\overline{AK}^2}{2\overline{BK}}$$

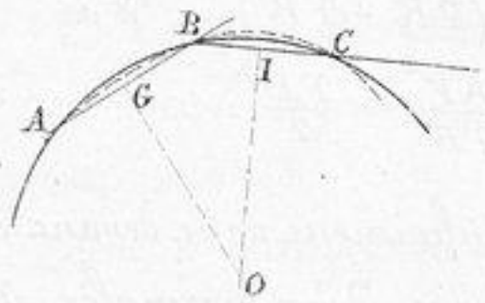
La tangente AK diffère de la corde AB ou de l'arc AB, d'un infinimeur petit du 3e ordre. On aura donc encore :

$$\rho = Lim. \frac{(Corde\,\overline{AB})^2}{2\,\overline{BK}} = Lim \frac{(Arc\,AB)^2}{2\,\overline{BK}}$$

Enfin, menons toute autre droite BG joignant le point B de la courbe à la tangente ; mais à la condition que l'angle AGB tende vers un droit, et l'on aura encore

$$\rho = Lim \frac{\overline{AG}^2}{2\,\overline{BG}}$$

Théorème. — Le Cercle de Courbure est la limite du cercle qui passe par 3 points infiniment voisins.



En effet, à la limite, les deux perpendiculaires OI et OG deviennent deux normales infiniment voisines et, par suite, O est le centre de Courbure.

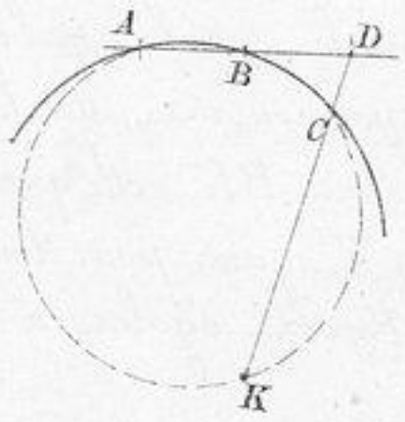
Théorème : — Le Cercle de Courbure est un cercle qui est tangent à la courbe en un point et qui passe par le point infiniment voisin.

Ce théorème fait bien comprendre que le cercle de courbure traverse la courbe, tout en lui étant tangent.

AB — Cercle
CD — Courbe.

3e. Expression du rayon de courbure.

Soient ABC, trois points infiniment voisins.



Prolongeons la corde AB, d'une longueur BD égale à elle-même ; joignons DC et prolongeons jusqu'en K, rencontre avec le cercle de courbure.

Le point C peut être considéré comme étant sur le cercle de courbure, et l'on aura :

$$\overline{DA} \times \overline{DB} = DC \times (DC + CK)$$

à la limite $\quad DC + CK = 2\rho$.

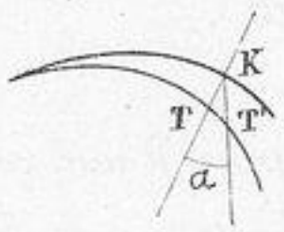
et $\quad DA \times DB = 2.\overline{DB}^2$; donc

$$2\rho = \frac{2.\overline{DB}^2}{DC}, \text{ et } \rho = \frac{\overline{DB}^2}{DC},$$

Expression commode, et dont on se servira plus loin.

Remarque. On a vu que la distance TK qui séparait un point d'une courbe, du point du cercle osculateur situé sur la même normale était du 3e ordre.

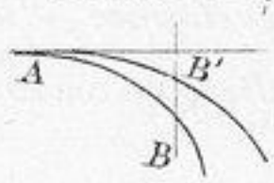
Si cette distance était comptée, non plus en TK sur la normale, mais en T'K sur une ligne oblique à cette normale, pourvu que l'angle α ainsi formé n'ait pas pour limite 1 droit, elle serait encore du 3e ordre.



C'est ce qui arrivera si l'on compte cette distance sur une perpendiculaire à la tangente, en BB', par exemple, –

BB' est du 3e ordre;

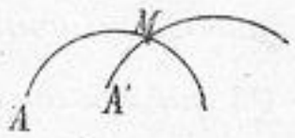
ou sur une parallèle aux axes des coordonnées.



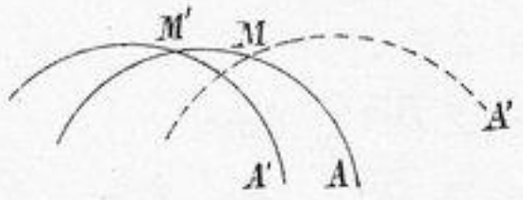
Conséquences. – Deux courbes, tangentes au même point à une même droite et dont les distances à la tangente different entre elles de quantités du 3e ordre, auront le même cercle de courbure. – Ces distances peuvent être comptées suivant une perpendiculaire ou suivant une oblique à la tangente, pourvu que l'angle de cette oblique et de la tangente n'ait pas pour limite zéro.

Courbes enveloppes.

La courbe enveloppe d'une courbe mobile, A, est le lieu géométrique des points d'intersection M, de la courbe A dans deux positions infiniment voisines, A et A'. – La courbe A est dite: enveloppée.



Théorème. – La Courbe enveloppe est tangente à la courbe enveloppée, aux points dont elle est le lieu géométrique.



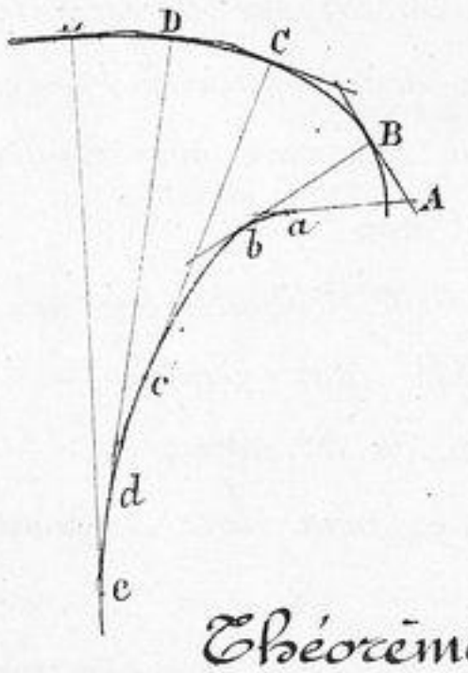
Soit A la courbe mobile,

A et A', cette même courbe dans les deux positions infiniment voisines.

A la limite M' et M" seront deux points du lieu, qui seront confondus en un seul. — La droite M'M" est aussi bien une sécante de la courbe A que du lieu des points M.

A la limite elle devient une tangente non-seulement de la courbe mobile, mais de son enveloppe. C.Q.F.D.

Une courbe est l'enveloppe de ses tangentes.

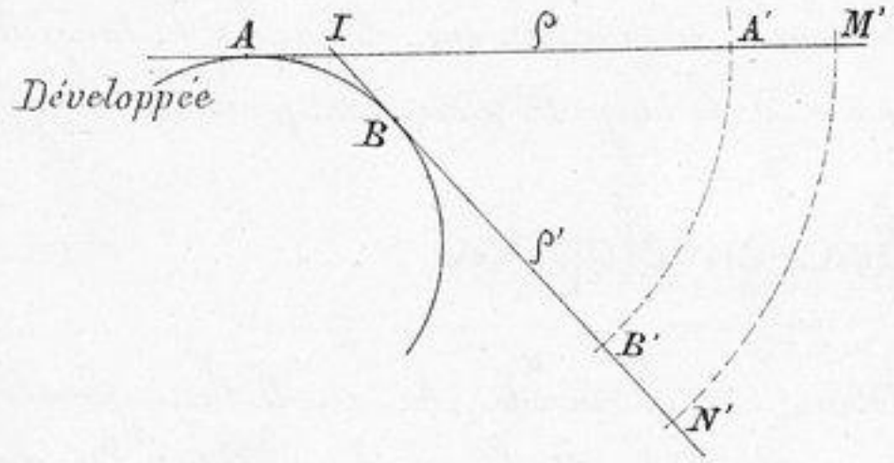


Développée.

On nomme développée d'une courbe, l'enveloppe des normales aux différents points de cette courbe.

On voit que la développée d'une courbe est le lieu géométrique des centres de courbure de cette courbe.

Théorème. — L'accroissement de l'arc de développée, est égal à l'accroissement du rayon de courbure.



Soient A'B' la courbe, et AB sa développée,

ρ et ρ' les 2 rayons de courbure, on a:

$$AA' = \rho \qquad BB' = \rho'$$

Evaluons $\rho - \rho'$, ou $AA' - BB'$.

On a, en négligeant les infiniments petits du 2e ou du 3e ordre, ce que l'on peut faire, puisque nous évaluons ici la limite du rapport de l'arc AB qui est du 1er ordre à $\rho - \rho'$ qui est du même ordre

$$B'I = A'I \;,\; BI = AI \;, \text{ et } AI + BI = \text{Arc}AB$$

$$\text{Donc: } AA' - BB' = \underbrace{A'I + AI}_{AA'} - \underbrace{(B'I - BI)}_{BB'} = AI + BI = \text{arc}AB \text{, C.Q.F.D.}$$

Conséquences. – La courbe $A'B'$ peut être engendrée par un point de la tangente à la développée AB, en supposant que cette tangente roule, sans glisser, sur la courbe AB.

Développante d'une Courbe.

C'est la courbe engendrée par un point d'une droite qui roule, sans glisser, sur une courbe.

Ainsi, $A'B'$ est une développante de AB.

Un autre point M', de la tangente engendrera une autre développante.

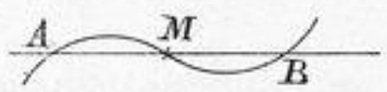
1°. Une courbe donnée, AB, a donc une infinité de développantes.

2°. La droite mobile est normale à toutes les développantes; autrement dit: – Une développante d'une courbe est la trajectoire orthogonale de toutes les tangentes à cette courbe.

3°. Une courbe est la développée de toutes ses développantes.

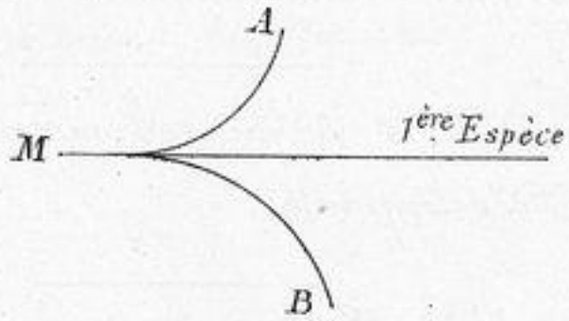
Points singuliers d'une Courbe.

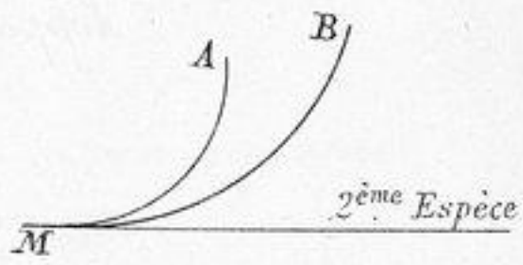
Point d'inflexion. – En ce point la tangente est la limite d'une sécante dont 3 points se sont confondus en un seul.



Dans ce cas, le cercle osculateur devient une droite: le rayon de courbure est infini.

Point de rebroussement de 1re Espèce. – En ce point M, 2 branches de courbe sont tangentes à la même droite et situées de part et d'autre de cette droite.





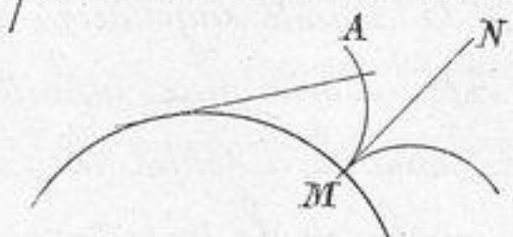
Point de rebroussement de 2e Espèce. – Les deux branches de courbe sont situées d'un même côté de la tangente.

Un Sommet est un point pour lequel le rayon de courbure est maximum ou minimum.

Le cercle osculateur, au lieu de traverser la courbe est tout entier soit en dedans, soit en dehors. Il a 4 points de communs avec elle.

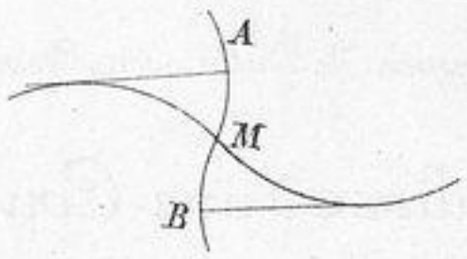
Rebroussements d'une développante.

Une développante d'une courbe rencontre cette courbe, en présente au point M de rencontre un rebroussement de 1ère Espèce.

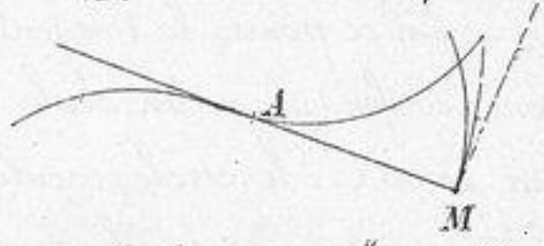


La tangente est la normale MN à la courbe

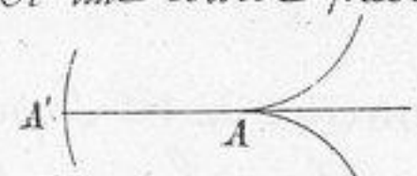
Cependant si au point de rencontre M, la courbe présente une inflexion, il en sera de même de la développante, qui, de plus, traversera la courbe.



Si une courbe présente une inflexion en A, sa développante présentera en M un rebroussement de deuxième Espèce.



Si une courbe présente en A un rebroussement de 1ère Espèce sa développante présentera en A' un sommet.



Réciproquement Si une courbe présente en A' un sommet, sa développée présentera en A, un rebroussement de 1ère Espèce.

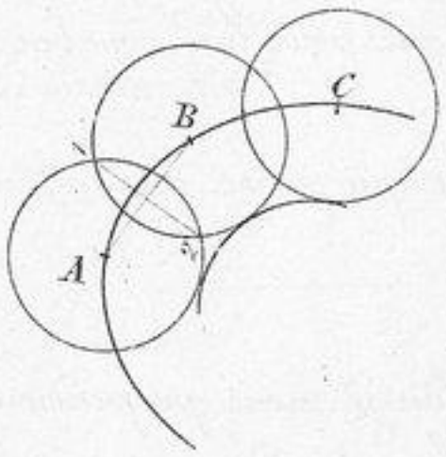
Si la courbe présente en A, un rebroussement de 2e Espèce, il en sera de même de sa développante.

Courbes enveloppes de cercles égaux.
Leurs rebroussements.

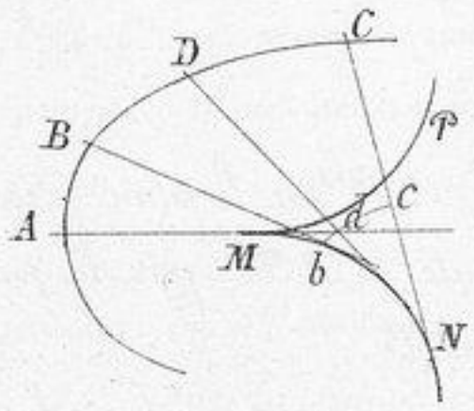
Soit une courbe directrice ABC, et un cercle mobile, dont le centre se déplace sur cette courbe.

Lorsque deux cercles se coupent, les points d'intersection 1 et 2 sont sur une même perpendiculaire à la ligne des centres AB.

A la limite, cette perpendiculaire devient la normale à la courbe ABC ; si le cercle mobile a un rayon constant, les points de la courbe enveloppe seront sur les normales à la courbe directrice et à des distances constantes de cette courbe. — L'enveloppe sera donc formée par deux développantes de la développée de la directrice.



Soit NMP cette développée, et c, d, b, la développante. Cette dernière présentera un rebroussement au point b où elle rencontre la développée.



Mais Bb est égal à R, rayon du cercle; R est aussi le rayon de courbure de la directrice au point B. — Donc : Une enveloppe de cercles égaux présente des rebroussements aux points pour lesquels le rayon de courbure de la courbe décrite par le centre du cercle est égal au rayon de ce cercle.

Développée de l'Ellipse.

On fera bien de s'exercer à tracer les développées de certaines courbes usuelles et les développantes de ces développées.

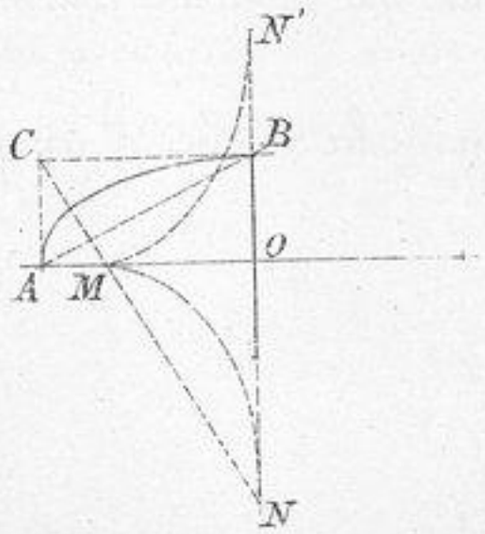
Le rayon de courbure de l'Ellipse, à l'extrémité du grand axe a pour expression : $\rho_1 = \frac{b^2}{a}$,

et à l'extrémité du petit axe : $\rho_2 = \frac{a^2}{b}$

En un point quelconque, le rayon de courbure a pour expression

$$\rho' = \frac{b'^3}{ab}$$

b' étant le demi-diamètre parallèle à la tangente au point considéré.



On obtient les deux centres de courbure correspondant aux sommets en M et N, en construisant le rectangle OABC sur les deux demi-axes, menant la diagonale AB et abaissant du point C une perpendiculaire CMN sur cette diagonale.

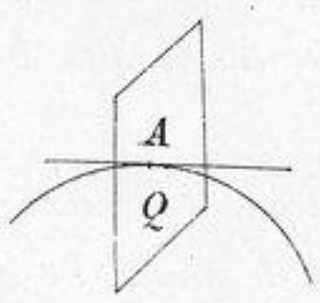
Courbes - gauches.

On nomme ainsi les courbes qui ne sont pas planes.

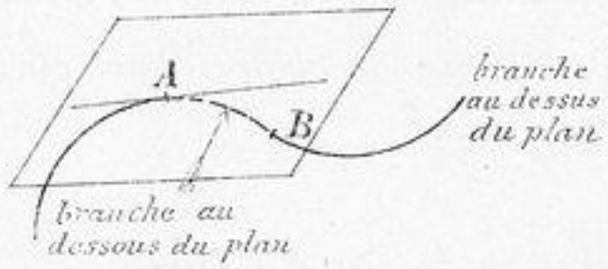
Tangente. Même définition que pour les courbes planes.

Plan tangent. — C'est celui qui passe par la tangente. — Il y en a une infinité.

Plan normal. — C'est le plan Q mené perpendiculairement à la tangente, par le point de contact. — Il contient toutes les perpendiculaires à la tangente, c'est-à-dire, toutes les normales à la courbe. — Il est unique.



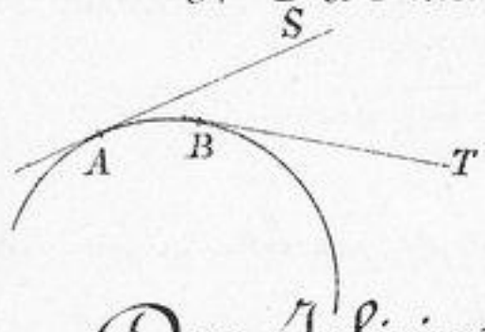
Plan osculateur. — 1° C'est le plan passant par la tangente en A et par le point infiniment voisin B.



Remarque. — Le plan osculateur est tangent à la courbe, mais cette dernière le traverse.

2° C'est encore le plan passant par 3 points infiniment voisins.

3° C'est encore le plan passant par la tangente AS en A, et parallèle à la tangente BT, au point infiniment voisin.



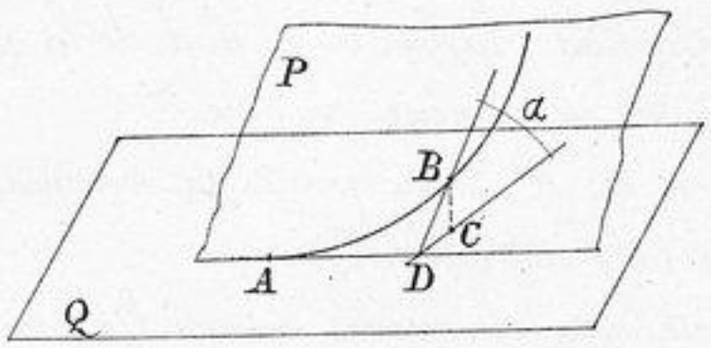
Des Infiniments petits relatifs à une courbe-gauche.

Ce sont, d'abord, les mêmes que pour les courbes planes, et en plus, ceux qui suivent :

1° La distance d'un point de la courbe à un plan tangent quelconque, est du 2e ordre.

Soit AD la tangente, Q le plan tangent. - Abaissons la perpendiculaire BC sur le plan tangent, et menons BD, CD perpendiculaires sur la tangente.

On sait que BD (distance à la tangente), est du 2e ordre, et de la forme $K\theta^2$.



Soit α l'angle BDC, on aura $BC = BD \sin\alpha$, et par suite BC est du 2e ordre; - à moins que l'angle α n'ait pour limite zéro.

Mais si nous menons le plan P passant par la tangente AD et par le point B, c'est-à-dire le plan osculateur, α est l'angle des 2 plans P et Q, et puisque nous supposons que le plan Q est un plan tangent quelconque, il ne se confond pas avec le plan osculateur, et par suite, l'angle α n'a pas pour limite zéro.

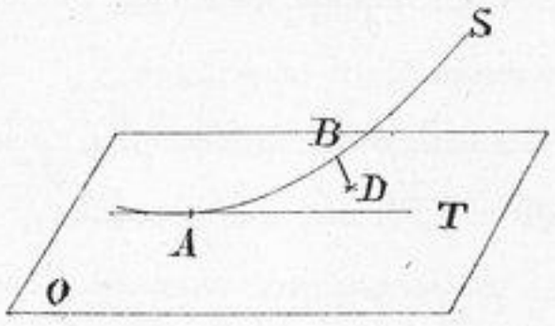
2°. La distance d'un point de la courbe au plan osculateur est au moins du 3e ordre.

Sur la figure précédente, si l'angle α tend vers 0, le plan Q devient le plan osculateur, et l'expression

$$BC = BD \sin\alpha \text{ , en y faisant}$$
$$BD = K\theta^2 \text{ et } \sin\alpha = K'\theta,$$

devient de la forme $K''\theta^3$.

3°. **Théorème.** La plus courte distance de 2 tangentes infiniment voisines d'une courbe gauche est au moins du 3e ordre.



En effet, soient AT et BS, deux tangentes infiniment voisines. On sait que la plus courte distance s'obtiendra en menant par la droite AT un plan Q parallèle à la droite BS, (Ce sera précisément le plan osculateur -) et prenant la distance BD du point B à ce plan. -

Nous venons de reconnaître que cette distance était, au moins, du 3e ordre. C.Q.F.D.

Théorème.

Théorème réciproque. — Si une droite mobile se déplace de telle sorte que l'angle γ formé par deux droites infiniment voisines étant du 1er ordre, la plus courte distance de ces deux droites soit toujours du 3e ordre, cette droite sera constamment tangente à une même courbe gauche.

Cette courbe sera le lieu des points centraux des droites, en appelant point central d'une des droites, la limite du pied de la perpendiculaire commune à cette droite et à son infiniment voisine.

En effet : soient A et A' deux positions voisines de la génératrice. (Nous désignerons ainsi la droite mobile).

CC' leur plus courte distance, menée comme l'on sait, et γ leur angle (du 1er ordre).

Soit B la génératrice précédant immédiatement A, et M la position limite du pied de la perpendiculaire commune à A et B, c'est-à-dire, le point central de A.

Soit B' la génératrice suivant immédiatement A', et soit M' son point central, défini comme le précédent.

Je dis que les droites A et A' sont toutes deux tangentes au lieu des points M et M'.

D'après ce qui a été dit sur les infiniment petits, cela sera prouvé si nous démontrons :

1° Que MM' est de même ordre que l'angle γ. (L'on sait en effet que l'angle de 2 tangentes infiniment voisines doit être du même ordre que l'arc de courbe qui sépare les deux points de tangence.

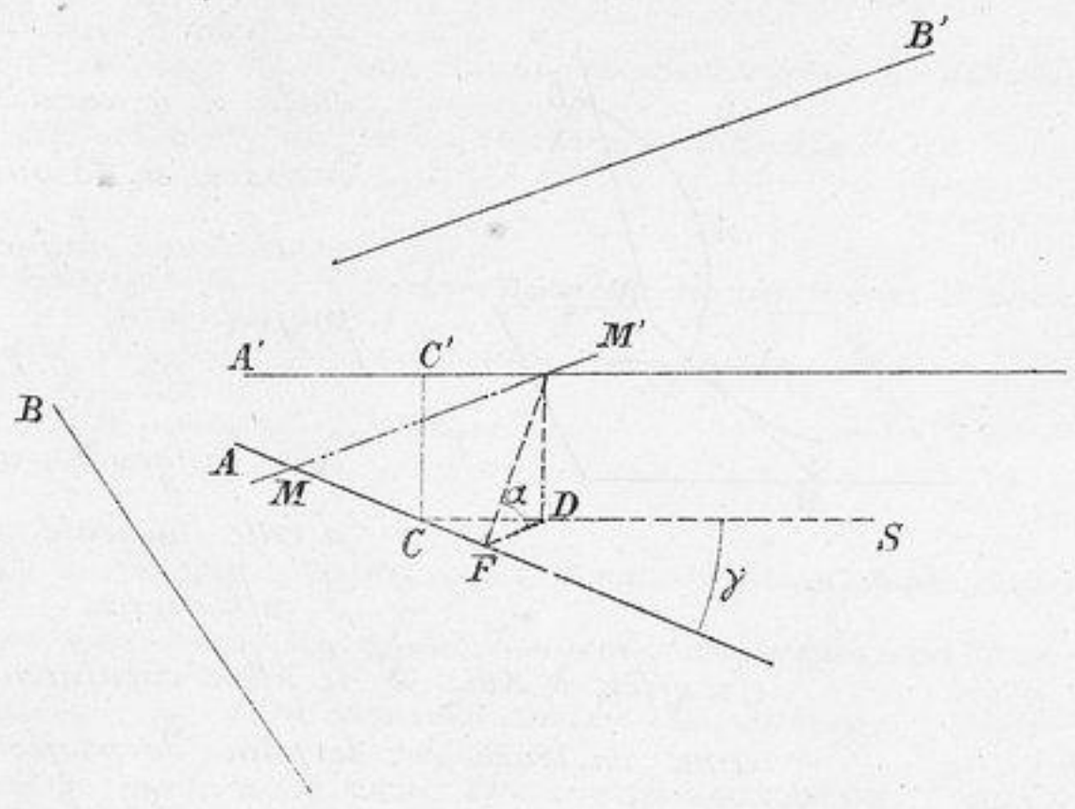
2° Que la distance du point M' à la droite A est du 2e ordre (puisque la distance d'un point d'une courbe à sa tangente doit être du 2e ordre).

Démontrons ces deux parties.

1° MM' ne peut être, du moins pour toutes les génératrices, d'un ordre supérieur à celui de γ, c'est-à-dire au premier, car cela voudrait dire que toutes les génératrices passeraient par un même point central, et par suite formeraient un cone, — Donc MM' est du 1er ordre.

2° On aura la distance du point M' à la droite A en abaissant MD perpendiculaire sur le plan S, puis DF perpendiculaire sur A et joignant M'F.

Par hypothèse M'D est du 3e ordre et de la forme KO^3.



Le triangle rectangle CFD donne :

$$DF = CD . \sin \gamma .$$

CD est au moins du 1er ordre, ainsi que $\sin \gamma$; donc DF est du 2e ordre.

Dès lors dans le triangle rectangle $M'FD$, les deux côtés de l'angle droit sont l'un du 2e, l'autre du 3e ordre, et par suite l'hypothénuse $M'F$ est au moins du 2e ordre, ce qui restait à prouver.

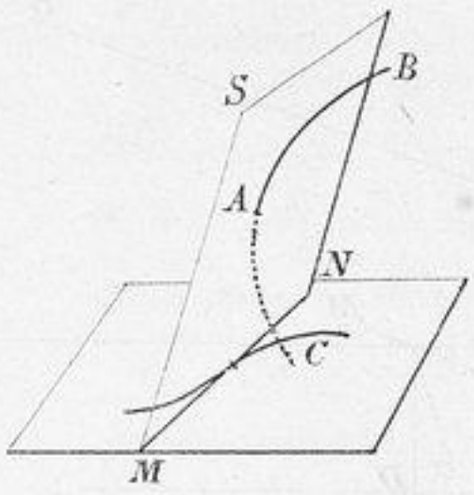
Remarque. Si $M'D$ eût été du 2e ordre au lieu d'être du 3ème, le triangle rectangle $M'DF$ aurait eu également son hypothénuse $M'F$ du 2e ordre, les conclusions précédentes subsisteraient et les droites $A'M'$, AM seraient tangentes à une même courbe gauche.

Mais nous avons vu plus haut, que la distance de 2 tangentes à une courbe gauche, est du 3e ordre par rapport à l'angle de ces deux tangentes, donc $M'D$ ne peut être que du 3e ordre. — D'où nous concluons: Lorsqu'une droite se déplace d'une manière continue, si la distance de 2 droites infiniment voisines n'est pas du 1er ordre par rapport à leur angle, elle est forcément du 3ème.

Projections diverses d'une courbe gauche.

1° Si l'œil est situé dans le plan osculateur, la courbe, en projection ou en perspective, présente un point d'inflexion.

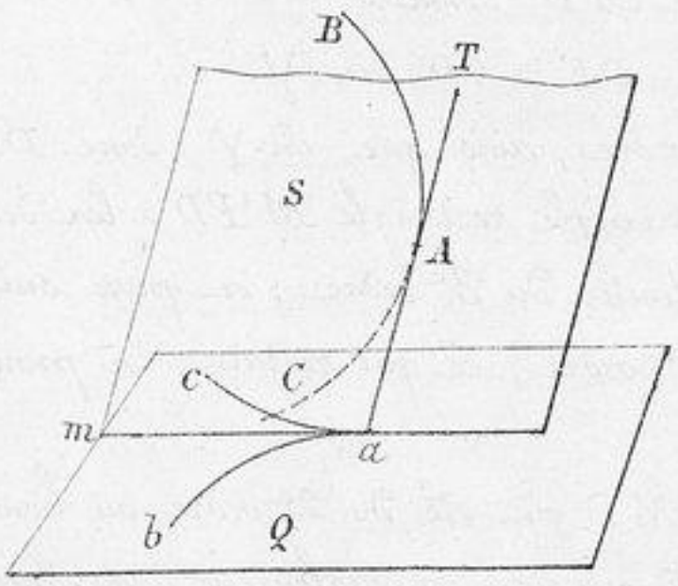
En effet, le plan osculateur, S, traverse la courbe. — La tangente



à la courbe est dans le plan osculateur ; par suite il y aura des points situés en projection de part et d'autre de la trace MN du plan osculateur, laquelle sera d'ailleurs tangente à la projection.

2°. Si l'œil est situé sur le prolongement de la tangente, ou si les projetantes sont parallèles à cette tangente, la courbe présente un point d'inflexion.

En effet : soit S le plan osculateur traversé en A par la courbe ;
am sa trace sur le plan de projection ;
TA la tangente, contenant l'œil, à distance finie ou infinie ;



En projection, la trace, am, du plan osculateur sera la tangente ; — il y aura des points situés, en projection, de part et d'autre de am.

De plus il n'y aura pas de points au delà du point a. Donc, la courbe, en projection, présentera un rebroussement de 1ère Espèce.

Remarque. — La projection abc est la base du cône perspectif ou du cylindre projetant de la courbe BAC.

Ce cylindre ou ce cône présentent donc un rebroussement tout le long de la génératrice TA.

Surfaces.

Nous considérerons une surface, soit comme le lieu géométrique d'une ligne (droite ou courbe) appelée génératrice, assujettie à se mouvoir suivant une loi déterminée ; soit comme l'enveloppe d'une surface mobile.

Dans ce dernier cas, la surface enveloppe est le lieu géométrique de la courbe d'intersection de la surface mobile dans deux de ses positions infiniment voisines.

Cette intersection de deux surfaces enveloppées infiniment voisines se nomme la caractéristique de la surface enveloppe.

Plan tangent. – Le plan tangent en un point d'une surface, est le lieu géométrique des tangentes à toutes les courbes tracées, par ce point, sur la surface. (Démontré en Analyse).

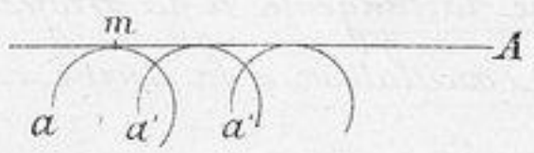
Surfaces circonscrites. – Deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre lorsqu'elles ont des plans tangents communs en tous les points d'une même courbe, que l'on nomme courbe de contact.

Une surface quelconque peut être considérée comme l'enveloppe de toutes les surfaces que l'on voudrait lui circonscrire.

Par exemple : Une sphère est l'enveloppe de ses cônes circonscrits. – Un cône de révolution est l'enveloppe de ses sphères inscrites.

Théorème. – La surface enveloppe est tangente à son enveloppée, tout le long de la caractéristique.

En effet, si l'on coupe par un plan quelconque Q, on obtiendra dans les surfaces mobiles, une série de courbes, a, a', a''... qui auront pour enveloppe la courbe A obtenue comme section dans la surface enveloppe. – La courbe A sera tangente à la courbe a au point m ; et comme il en sera de même pour tout autre plan passant également par le point m, il en résulte que la surface mobile et son enveloppe auront les mêmes tangentes pour toutes les sections passant par m, et par suite auront même plan tangent au point m de la caractéristique.
C. Q. F. D.



Contours apparents perspectifs ou projectifs des Surfaces. — Lignes d'ombres propres, et d'ombres portées.

On ne fera qu'énoncer les théorèmes qui suivent, sans les démontrer.

Définitions. – Le contour apparent projectif ou perspectif d'une surface sur un tableau, est l'enveloppe des traces sur ce tableau, de tous

les plans tangents menés à la surface, soit par l'œil du spectateur, soit parallèlement aux projetantes.

Dans le cas des ombres, les rayons lumineux peuvent être considérés comme des projetantes obliques, et ce contour apparent devient l'ombre portée par la surface.

Théorème I. *Le contour apparent ou l'ombre d'une surface sur un tableau est la base d'un cône ou d'un cylindre circonscrit à la surface et dont les génératrices passeraient par l'œil du spectateur (ou par le flambeau), situé à distance finie ou infinie.*

Théorème II. *Le contour apparent, dans l'espace, (ou la ligne d'ombre propre) est la ligne de contact du cône précédent et de la surface.*

Théorème III. *Quand une courbe est tracée sur une surface, sa projection, sa perspective, ou son ombre portée sont tangentes au contour apparent perspectif ou projeté, ou à la ligne d'ombre portée de cette surface.*

Exception, dans le cas où la tangente à la courbe de l'espace, au point où elle rencontre le contour apparent dans l'espace, où la ligne d'ombre propre serait un rayon visuel ou un rayon lumineux

Dans ce cas, on a vu que la tangente à la projection était la trace, sur le plan du tableau, du plan osculateur à la courbe. — La courbe projetée présente un rebroussement.

Théorème IV. *Lorsqu'une surface est l'enveloppe d'une surface mobile, le contour apparent, projeté ou perspectif de la surface enveloppe est l'enveloppe des contours apparents de la surface mobile. — L'ombre portée est l'enveloppe des ombres portées par la surface mobile.*

Surfaces réglées.

On nomme ainsi toute surface dont les génératrices sont des droites. On les divise en deux classes : les surfaces gauches et les surfaces

développables. — Cette classification résultera de l'étude des variations de position du plan tangent à une surface réglée.

Variations du plan tangent à une surface réglée. — Théorème de Chasles.

Soit une série de droites, variant d'une manière continue et formant une surface réglée.

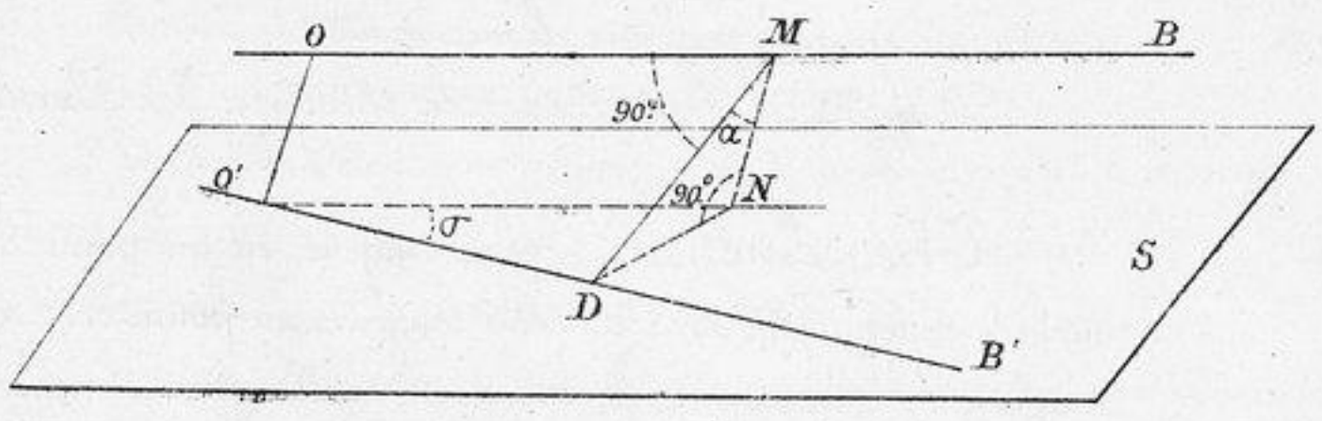
Soit M un point pris sur une génératrice. — Le plan tangent en ce point contiendra évidemment, la génératrice. — Si nous prenons un autre point sur la **même** génératrice, le plan tangent, tout en contenant cette génératrice, ne sera pas le même qu'en M.

On se propose d'étudier la loi de variation des angles que ces divers plans tangents forment entre eux.

A cet effet, cherchons la plus courte distance OO' des deux génératrices infiniment voisines OB, O'B'.

On connaît la construction usitée pour cette recherche.

Soit M un point de la génératrice OB. — Abaissons MN, perpendiculaire sur le plan S, qui a été mené par O'B' parallèle à OB, et menons MD perpendiculaire sur OB.



Soit α l'angle DMN. — La ligne MD devient, à la limite, une tangente à une courbe qui, sur la surface, passerait par M; et par suite le plan tangent en M est défini par la droite DM et par la génératrice OM.

Au point O, que nous nommerons le point central de la génératrice OM, le plan tangent est défini par la génératrice et par la droite OO', ou, ce qui revient au même, par la parallèle MN.

Le plan tangent en O, se nomme le Plan Central.

Le plan tangent en M forme donc avec le plan central un angle mesuré en α sur la figure.

Soit x la distance OM du point M au point central, on a sur la figure, l'angle en N étant Droit :

$$tg\,\alpha = \lim. \frac{DN}{MN}.$$

Soit p la plus courte distance OO' des deux génératrices ; et σ leur angle

$$DN = O'N \sin \sigma = x \sin \sigma$$

$$MN = p$$

$$tg\,\alpha = Lim. \frac{x \sin \sigma}{p} ;$$

en remplaçant $\sin. \sigma$, par σ, puisque σ est infiniment petit,

$$tg\,\alpha = x \times \lim. \frac{\sigma}{p} = \frac{x}{\lim \frac{p}{\sigma}}$$

Soit : $K = Lim \frac{p}{\sigma}$

$$tg\,\alpha = \frac{x}{K} \text{ ; pour } x=\infty, tg\,\alpha = \infty \text{ et } \alpha \text{ égo.}$$

La quantité K se nomme le paramètre de distribution ; c'est la limite du rapport de la plus courte distance de 2 génératrices infiniment voisines à l'angle σ qu'elles forment entre elles.

On voit que ce paramètre est du 1er degré ; c'est une longueur, représentée, en épure, par une ligne droite.

D'après ce qui précède, le théorème de Chasles s'énonce ainsi :

Théorème. – Le plan tangent en un point d'une génératrice d'une surface réglée, fait avec le plan tangent au point central (plan central), un angle dont la tangente est proportionnelle à la distance du point au point central, et s'obtient en divisant cette distance par le paramètre de distribution de cette génératrice.

Remarque. – Le plan S est le plan tangent à l'infini puisqu'il est perpendiculaire au plan central. Donc : le plan tangent à l'infini est le plan mené par une génératrice, parallèlement à la génératrice infiniment voisine.

Discussion de la formule $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{K}$

$$K = \operatorname{Lim} \frac{p}{\sigma} .$$

Les deux infiniments petits p et σ peuvent être de même ordre ou d'ordre différent :

1°. S'ils sont de même ordre, la quantité K a une limite finie, et la formule précédente s'applique comme on vient de le faire voir en l'établissant.

2°. p est infiniment petit par rapport à σ.

Nous avons vu que dans ce cas, si p n'est pas du 1er ordre, il est forcément du 3ème.

Et l'on aura toujours $\operatorname{tg}\alpha = \infty$.

Dans ce cas :— Le plan tangent est le même tout le long de la génératrice, c'est le même que le plan tangent à l'infini.

Pour le point central, puisque p est du 3e ordre et de la forme $m\theta^3$, on aura K de la forme $m'\theta^2$.

On fera tendre x vers zéro, et l'on aura :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{0}{0} \quad \text{(Indéterminé)}$$

Cas particulier.— p est toujours nul. La surface est un cône. —Le plan y est le même tout le long de la génératrice, et le même qu'à l'infini;— au sommet il est indéterminé.

3°. σ est infiniment petit par rapport à p.

L'angle de deux génératrices est infiniment petit par rapport à leur distance, ce qui veut dire qu'elles sont toujours parallèles.— La surface est cylindrique.— On a toujours $\operatorname{tg}\alpha = 0$.

Le plan tangent y est le même tout le long d'une génératrice et confondu avec le plan central.

A l'infini, il est indéterminé, car on y a $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\infty}{\infty}$.

Résumé :

Les surfaces réglées se divisent en deux classes :

1°. Les surfaces développables qui ont même plan tangent tout le long d'une même génératrice,— sauf pour un point singulier qui est le point central.— Dans les cônes et dans les développables ordinaires

ce point est à distance finie ; dans les cylindres il est à distance infinie

2°. Les surfaces gauches pour lesquelles le plan tangent varie en chaque point d'après le Théorème de Chasles.

Cône Directeur.

Si par un point de l'espace on mène des parallèles à toutes les génératrices d'une surface réglée, ce cône se nomme le cône directeur de cette surface.

Théorème. – Le plan tangent au cône directeur est parallèle au plan tangent à l'infini sur la génératrice correspondante de la surface.

Puisque le plan tangent à l'infini est parallèle à la fois à deux génératrices infiniment voisines.

Surfaces développables.

Nous avons reconnu qu'elles avaient le même plan tangent tout le long d'une génératrice.

Prenons 2 génératrices infiniment voisines et leurs plans tangents.

Ces derniers se couperont et, à la limite, leur intersection sera la génératrice elle-même.

Donc : Toute surface développable peut être considérée comme l'Enveloppe d'un plan mobile.

Nous avons reconnu de plus que si la distance de 2 génératrices est infiniment petite par rapport à leur angle, cette distance est au moins du 3e ordre, et toutes les génératrices sont tangentes à une courbe gauche dans l'espace.

Donc : Dans une surface développable les génératrices sont tangentes à une même courbe gauche que l'on nomme son **arête de rebroussement**.

– De plus : Le plan tangent à une surface développable est osculateur à son arête de rebroussement ; car étant tangent à l'infini aussi bien qu'ailleurs, il est le plan mené par une génératrice (c'est-à-dire une

tangente à l'arête) parallèlement à la génératrice (tangente) infiniment voisine, – ce qui définit le plan osculateur à l'arête de rebroussement.

Dès lors, nous considérerons une surface développable, soit comme l'enveloppe d'un plan mobile, soit comme le lieu des tangentes à une courbe gauche.

Cône-directeur d'une développable.

Si par un point de l'espace on mène une série de plans parallèles aux plans tangents à la développable, ils auront une enveloppe, qui sera un cône, et précisément le cône directeur, – car deux plans ainsi menés, infiniment voisins, se couperont suivant une parallèle aux deux plans tangents correspondants de la développable, c'est-à-dire suivant une parallèle à une de ses génératrices.

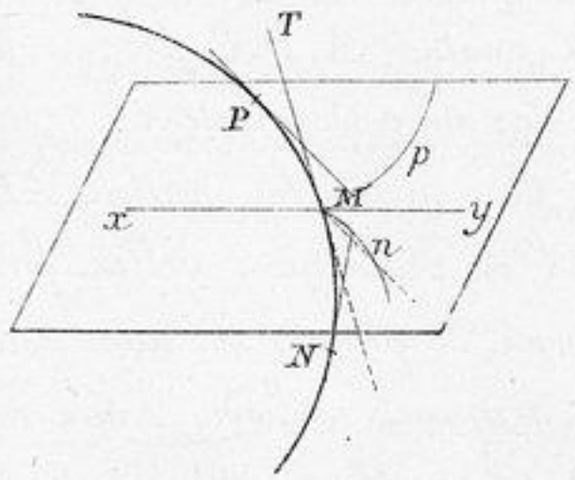
Réciproquement : si par un point les plans menés parallèlement aux plans tangents d'une surface ont une enveloppe (qui sera forcément un cône) cette surface est développable.

Arête de Rebroussement.

Le théorème qui va suivre justifie le nom donné à l'arête de rebroussement.

Théorème. – Les sections planes d'une développable présentent des rebroussements aux points où elles rencontrent l'arête de rebroussement.

Soit M ce point, xy la trace du plan osculateur sur le plan sécant, MT la tangente au point M.



On voit à priori que si nous prenons deux points N et P de part et d'autre du point M et si nous menons les tangentes Nn et Pp, les points d'intersection n et p avec le plan sécant seront d'un même côté du point M.

Joignons Mn, c'est une sécante de la courbe d'intersection, qui à la limite deviendra la tangente en M.

Mais la droite Mn est la trace sur le plan sécant, d'un plan qui passerait par la tangente Nn et par le point infiniment voisin M.

Donc, à la limite, ce plan devient le plan osculateur en M, et la sécante Mn devient la trace Xy du plan osculateur.

Il en sera de même pour la sécante Mp.

Donc, à la limite, les deux branches de courbe sont tangentes à la droite Xy et le point M est un point de rebroussement.

Projections & contours apparents d'une développable.

1°. Les génératrices de l'espace étant tangentes à l'arête de rebroussement, le seront aussi en projection.

Donc: la projection de l'arête de rebroussement formera une partie de son contour apparent.

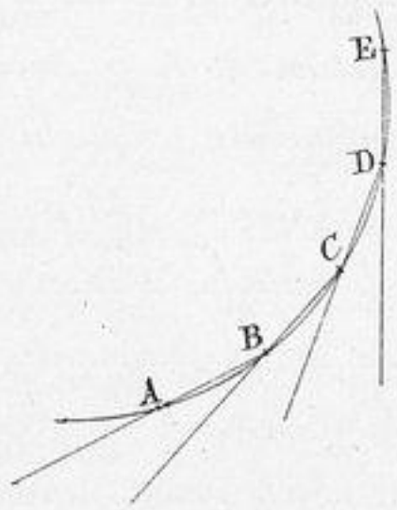
2°. S'il est possible de mener à la développable un plan tangent parallèle aux projetantes ou aux rayons visuels, comme ce plan sera tangent tout le long de la génératrice, la projection ou la perspective de cette génératrice formera une 2ème partie du contour apparent.

On généralisera facilement ce qui précède pour l'appliquer aux problèmes d'ombres.

Développement d'une développable.

De ce qu'une développable est l'enveloppe d'un plan mobile, il en résulte évidemment, qu'en repliant successivement chaque plan autour de son intersection avec le plan voisin, on pourra faire développer sur un plan la surface toute entière.

Dans la pratique, soit $ABCDE$ l'arête de rebroussement, on prend sur cette courbe des points $A.B.C.D....$ suffisamment près les uns des autres.



On mène les cordes AB, BC, CD..... que l'on prolonge. Elles forment une série de portions de plans et une sorte de polyèdre que l'on suppose confondu, sans erreur sensible, avec la développable. — On prend successivement les angles formés par les sécantes et on les développe les uns à la suite des autres. Il en résulte:

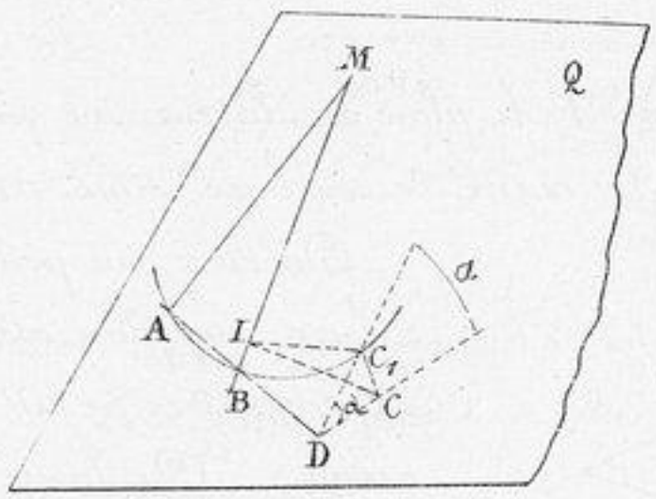
1°. Que le périmètre d'une courbe tracée sur la surface n'est par altéré pendant le développement.

2°. Que l'angle sous lequel 2 lignes se coupent n'est par altéré non plus, à la condition toutefois que cet angle ne soit par infiniment petit, parce que l'erreur qui résulte de ce que l'on remplace la surface par le polyèdre, erreur qui est Du 1er. ordre, n'est plus alors négligeable par rapport à cet angle infiniment petit.

Par conséquent, les rayons de courbure sont altérés par le développement.

Rayon de courbure d'une courbe avant et après le développement de la développable sur laquelle elle est tracée.

Soit A, B, C une courbe tracée sur une développable, et trois points de cette courbe infiniment voisins.



Le cercle de courbure dans l'espace serait celui qui passerait par les 3 points A,B,C. _ Il serait donc contenu dans le plan osculateur.

Menons les deux génératrices de la surface qui passent en A et en B.

En négligeant des quantités du 3e. ordre elles se rencontrent en M, et définissent le plan tangent en B. _ Soit Q ce plan tangent.

Développons le point C sur ce plan, en le faisant tourner autour de BM comme charnière. _ Soit C_1 son rabattement sur le plan Q.

Nous avons vu (3e. Expression du rayon de courbure) que si nous prolongeons AB, d'une longueur BD égale, et si nous joignons DC, on aura pour le rayon dans l'espace :

$$\rho = \frac{\overline{BD}^2}{CD}$$

La courbe développée passera par C_1 et son rayon de courbure sera : $\rho = \frac{\overline{BD}^2}{DC_1}$, et par suite :

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{DC}{DC_1} .$$

Mais, à la limite CC, étant l'arc de cercle décrit d'un point I de la charnière comme centre, est perpendiculaire sur le plan Q, et par suite DC_1 est la projection de DC.

Donc $DC_1 = DC \cos\alpha$

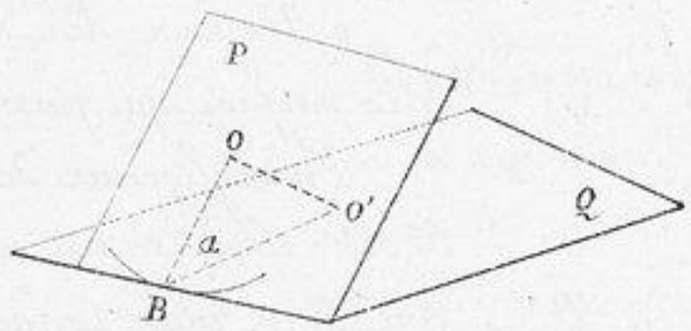
α est l'angle du plan ABC, osculateur de la courbe et du plan tangent Q.

En effet, on aurait pu prendre le point C, tel que CD fût perpendiculaire sur BD, ce qui eût également entraîné la perpendiculaire de $C_1 D$.

Donc: $\rho' = \frac{\rho}{\cos\alpha}$ et par suite

Théorème: Le rayon de courbure de la transformée est égal à celui de la courbe donnée divisé par le Cosinus de l'angle α que fait le plan osculateur de la courbe avec le plan tangent à la surface au même point.

Construction. Soit P le plan osculateur au point B d'une courbe, Q le plan tangent, – O le centre de courbure situé dans le plan osculateur.



On élève au point O une perpendiculaire au plan osculateur jusqu'à sa rencontre en O' avec le plan tangent. – On joint O'B, et l'on a le rayon de courbure $\rho' = O'B$.

Conséquences: 1° Si le plan osculateur est perpendiculaire au plan tangent, $\alpha = 90°$ et $\cos.\alpha = 0$

$\rho' = \infty$; la transformée présente une inflexion.

2° Si le plan osculateur se confond avec le plan tangent, ce qui arrive pour l'arête de rebroussement,

$\alpha = 0$, $\cos.\alpha = 1$, $\rho = \rho'$; Donc:

l'arête de rebroussement possède les mêmes rayons de courbure avant et après le développement.

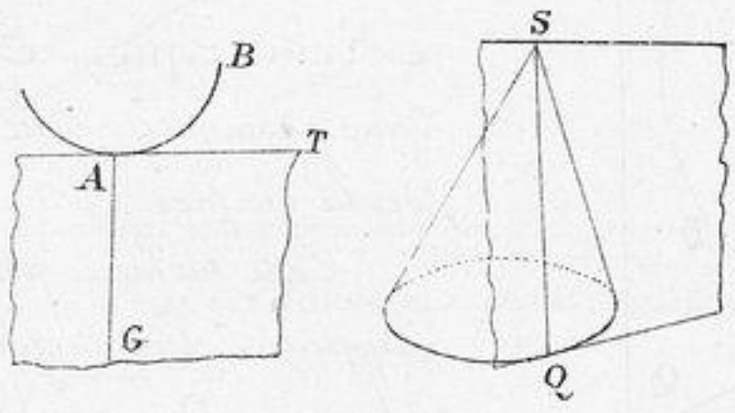
Génération des Surfaces développables.

Une surface développable est définie soit par une courbe gauche ; — dans ce cas elle est le lieu géométrique des tangentes à cette courbe ; — soit par deux directrices courbes ; soit par deux surfaces directrices.

Ces surfaces se nomment des noyaux.

Dans ces deux derniers cas, la surface est l'enveloppe des plans tangents à la fois aux deux directrices.

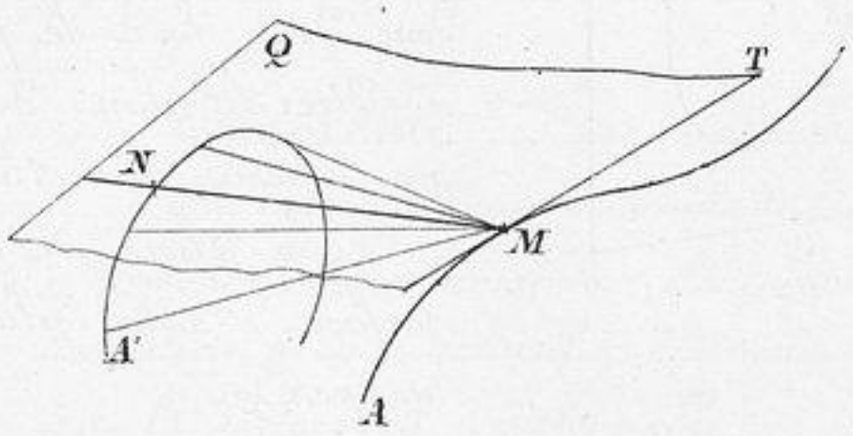
On peut également se donner une directrice AB, et le cône directeur S. On sait que ce dernier est l'enveloppe des plans menés par son sommet, parallèlement aux plans tangents à la surface.



Pour avoir un des plans tangents dont la surface est l'enveloppe, — par un point A de la directrice, on mènera une tangente AT à cette directrice. — On mènera au cône directeur un plan tangent parallèle à la droite AT et la génératrice de contact, SQ, sera parallèle à la génératrice cherchée de la surface.

Cette génératrice sera AG, parallèle à SQ, et le plan tangent sera le plan TAG.

Si l'on donne 2 courbes directrices A et A', on aura la génératrice passant par un point M de la 1ère directrice de la manière suivante.



Par M on mènera la tangente MT à la courbe A.

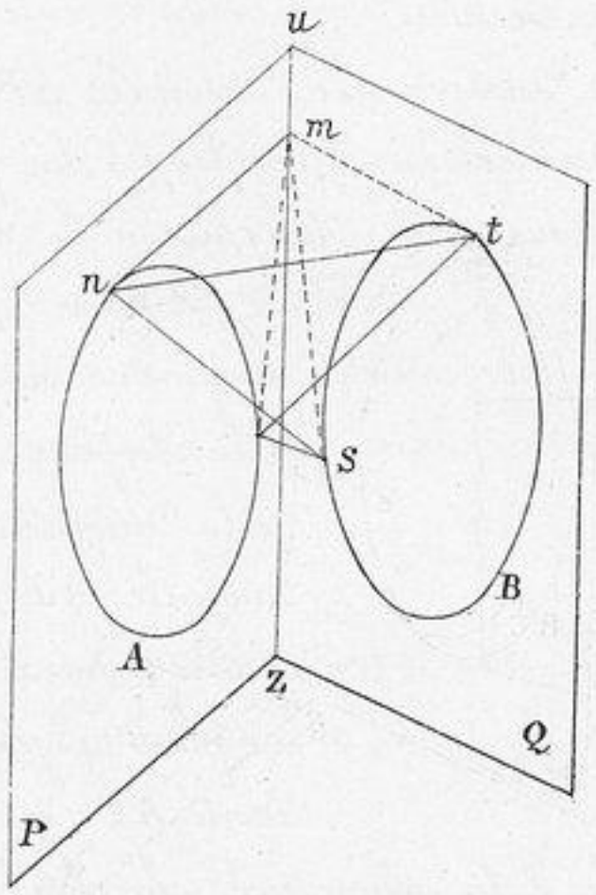
On construira le cône ayant M pour sommet et pour directrice la courbe A'.

A ce cône on mènera le plan tangent Q passant par la droite AT.

Ce plan sera le plan tangent à la surface, et la génératrice de contact, MN, sera la génératrice cherchée.

Surface développable dont les deux directrices sont deux coniques A et B situées dans deux plans différents P et Q.

Soit ZV l'intersection des 2 plans. — On prendra un point quelconque m sur ZV ; de ce point on mènera deux tangentes à chacune des coniques.

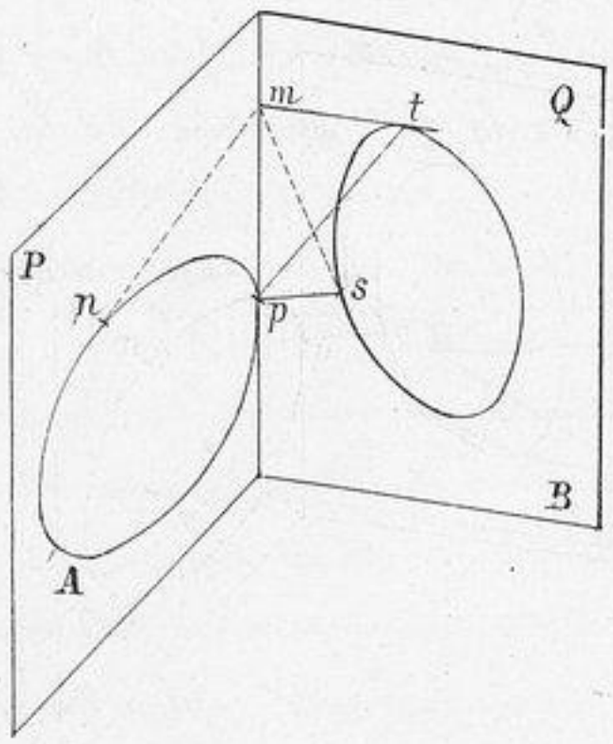


Soit mn, mp, les tangentes à la 1ère conique ; — ms, mt, les tangentes à la 2ème. En joignant les points deux à deux, on obtiendra 4 génératrices : nt, ns, tp, sp.

Remarque. On voit que les deux coniques sont deux lignes doubles de la surface.

Cette surface présentera quatre nappes, lieux géométriques de chacune des quatre génératrices trouvées plus haut.

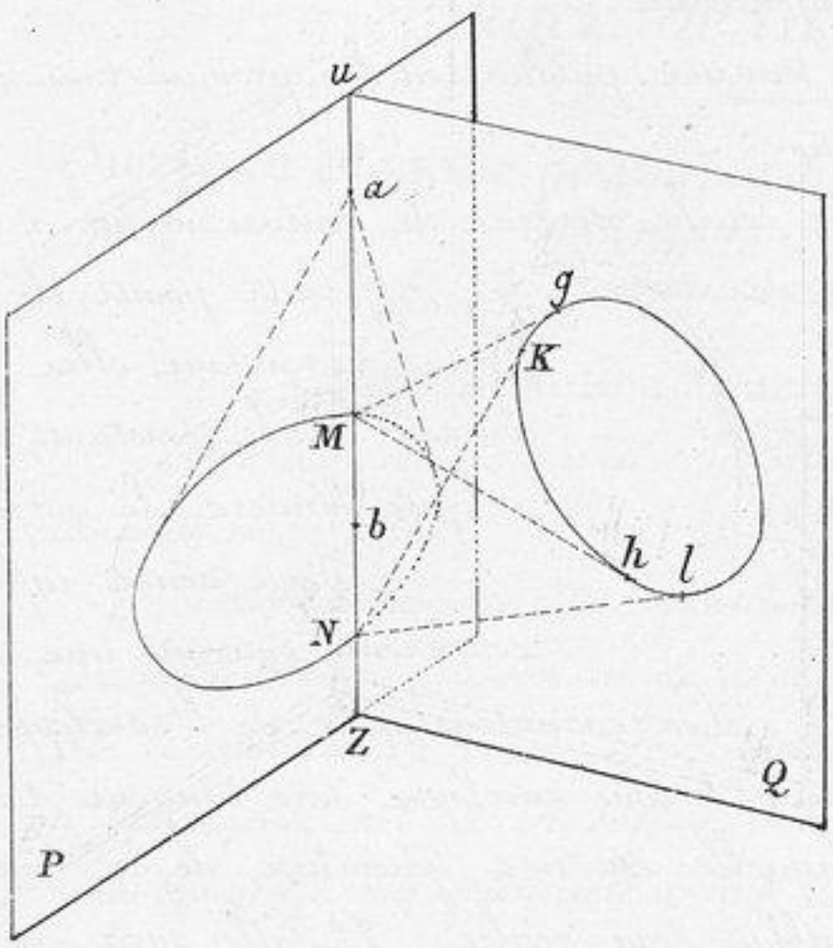
Si l'une des coniques A est tangente au plan de l'autre B, deux des génératrices ps et pt sont dans le plan Q et y seront toujours.



La développable comprendra donc deux fois le plan Q, c'est-à-dire le plan de la conique qui n'est pas tangente.

En dehors de ce plan, la surface n'aura plus que deux nappes.

Enfin si l'une des deux coniques directrices coupe le plan de l'autre aux points M & N, sa surface présentera certaines particularités.



En effet: prenons un point quelconque a, sur l'intersection ZU des deux plans.

Si le point a est en dehors des 2 points M et N, on pourra mener de ce point deux tangentes à chacune des coniques, et l'on en déduira, comme ci-dessus, 4 génératrices.

Si l'on prend le point b, entre M et N, on ne pourra plus mener de tangentes à la conique du plan P. — Aucune génératrice ne répondra à ce point.

Les derniers points utiles pris sur l'intersection seront les points M et N.

Menons les tangentes limites Mg, Mh, — Nk, Nl; les arcs kg, hl, seront des arcs parasites; aucune génératrice ne pourra s'appuyer sur ces arcs.

Surfaces d'égale pente.

On nomme surfaces d'égale pente des surfaces dont tous les plans tangents font le même angle avec le plan horizontal.

Théorème. — Les surfaces d'égale pente sont développables.

En effet, si par un point de l'espace on mène des plans parallèles à tous les plans tangents, ils auront une enveloppe qui sera un cône de révolution à axe vertical; et nous avons vu que cela suffisait pour que la surface fût développable.

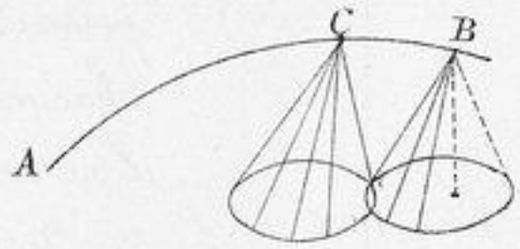
D'après cela, une pareille surface rentrera dans la classe des développables à directrice courbe et à cône directeur. Nous avons vu

comment on les engendrait.

Dans les travaux publics on les produit tout naturellement de la manière suivante.

Soit AB une courbe servant de couronnement à un remblai.

On versera des terres des différents points de la courbe AB.



En se répandant elles formeront des cônes d'angle constant, accolés, dont l'enveloppe formera la surface du remblai.

Deux cônes infiniment voisins se couperont suivant une génératrice (c'est facile à démontrer). Les caractéristiques de l'enveloppe seront des droites ; — d'ailleurs le cône enveloppé sera tangent tout le long de la caractéristique, laquelle est une génératrice de ce cône. — Donc : 1° La surface du remblai sera réglée ; 2° Elle aura même plan tangent tout le long de ses génératrices ; 3° Ces plans tangents feront un angle constant avec le plan horizontal.

Dans les chemins de fer, dans une partie en courbe, si la voie est en palier, c'est-à-dire sur plan horizontal, ordinairement cette courbe se fait sur plan circulaire et la surface de remblai forme un cône.

Mais si la voie est en pente, la courbe peut être une ellipse ou une hélice, et la surface rentre dans la classe précédente.

Enfin, si la voie, tout en étant horizontale, présente une courbe autre que le cercle ; si elle est tracée suivant une ellipse ou une parabole, par exemple, la surface du remblai sera une surface d'égale pente proprement dite.

Nous étudierons le cas où la Directrice est une Ellipse horizontale.

Sujet de la 5e Epure.

Sujet de la 5.e Epure.

Surface d'égale pente, à directrice elliptique horizontale.
(Voir le Programme)

Détermination d'une Génératrice quelconque.

Soit a b c d , a' b' c' d' , l'Ellipse directrice, m m' un point, et m t la tangente en ce point.

Construisons dans une partie libre de la feuille le cône directeur ; il est de révolution et son angle avec le plan horizontal est α. — Soit S S' le sommet de ce cône. Menons à ce cône un plan tangent parallèle à la tangente m t. — Il suffira pour cela de mener à son cercle de base une tangente n q parallèle à m t. La génératrice de la surface sera la droite m p , m' p' , menée parallèlement à la génératrice de contact s n, s' n', du cône.

On voit que : — 1.° En projection horizontale les génératrices sont normales à l'ellipse.

2.° L'enveloppe de ces normales sera la développée de l'Ellipse.

3.° L'arête de rebroussement sera dans l'espace l'intersection de la surface par un cylindre vertical qui aurait cette développée pour base.

4.° Si l'on coupe la surface par un plan horizontal, les génératrices ayant une pente constante seront coupées toutes à une même distance de l'Ellipse directrice. — On aura donc cette section en augmentant ou en diminuant les normales à l'ellipse d'une quantité constante, ce qui donnera les développantes de la développée de l'Ellipse.

Lignes doubles de la Surface.

1.° L'Ellipse directrice est une première ligne double, car on peut, par chacun de ses points, mener une génératrice projetée horizontalement soit en dedans, soit en dehors de cette Ellipse.

2.° Soit m_1 le point de l'Ellipse symétrique du point m, par rapport au grand axe ;

Les deux génératrices intérieures, menées par m et par m_1, se coupent horizontalement sur le grand axe, et par suite, dans l'espace,

Demi - Elévation.

Demi - coupe de front . 0Z.

Demi - Elévation latérale.

Demi - Coupe de profil . 0W

se coupent dans le plan de front qui a ce grand axe pour trace.

Nous aurons ainsi une 2e. ligne double dans ce plan.

Il serait facile de démontrer que cette ligne double est une Ellipse $f'1'g'g'_2f'_1$.

Dès lors, on pourrait considérer la surface développable comme étant définie par deux directrices : l'Ellipse horizontale abcd, et l'Ellipse de front $f'g'g'_2f'_1$.

Nous avons étudié les particularités de ce mode de génération, et nous avons reconnu que si l'on prend les points b' et a' où l'Ellipse horizontale coupe le plan de l'autre, en menant de ces points des tangentes b'2' et a'1' à l'Ellipse de front, on trouve deux parties parasites, en $f'_1 2$ et $f'1'$, et une partie utile 1'l'2'.

Les points 1' et 2' ont pour projection horizontale les rebroussements de la développée de l'Ellipse. — Ces points dans l'espace sont eux-mêmes des rebroussements de l'arête de rebroussement.

3º. Si nous prenons le plan de profil 3, 4, qui passerait par le petit axe, il est facile de voir que les génératrices de gauche et de droite se couperont deux à deux dans ce plan.

Il y aura donc une 3e. ligne double dans ce plan de profil (Voir la demi-coupe de profil)

On démontrerait facilement :

1º. Que c'est une hyperbole.

2º. Qu'en lui menant des tangentes par les points d'_1 et c'_1 on la divisera en une branche utile $4'_1 u'_1 3'_1$ et deux branches parasites.

3º. Que les points de passage, $3'_1$ et $4'_1$ sont les projections sur le plan de profil des points 3 & 4 de l'arête de rebroussement qui sont projetés horizontalement aux sommets de la développée.

4º. Qu'en ces points, dans l'espace, l'arête de rebroussement présente, elle-même, des rebroussements.

Enfin il existerait une 4e. Ligne double située toute entière à l'infini, car les génératrices sont deux à deux parallèles.

Enfin, on cherchera en $p\ p_1\ p_2\ p_3$ la trace de la surface extérieure sur le plan horizontal —. C'est une développante extérieure de la développée de l'Ellipse.

On aura en $vqrs$, la trace horizontale de la surface intérieure.

C'est encore une développante de la développée de l'Ellipse, mais elle présente des rebroussements et des points doubles faciles à déterminer directement.

Problème I. — Plan tangent en un point pris sur la surface.

On mène la génératrice du point, et la tangente à la directrice par le point où cette génératrice la rencontre.

Problème II. — Plan tangent par un point extérieur.

On y transporte, parallèlement à lui-même, le sommet du cône directeur. — On prend la trace de ce dernier sur le plan de la Directrice de la surface, et on mène une tangente commune à cette trace et à la Directrice.

Problème III. — Plan tangent parallèle à une droite donnée.

On mène au cône directeur un plan tangent parallèle à la droite donnée. — On détermine, sur le cône, la génératrice de contact. — On cherche, sur la surface, la droite qui est parallèle à cette génératrice du cône.

Remarque. — Les questions d'ombre se résolvent sur les développables à l'aide des problèmes qui précèdent.

Hélice Cylindrique.

On appelle hélice sur un cylindre de révolution, la courbe qui coupe toutes les génératrices sous un angle constant.

Si l'on développe le cylindre, la transformée de la courbe sera une ligne droite.

Considérons le développement. — Nous savons que les longueurs et les angles finis y sont conservés, — ce qui nous permet de dire : Que l'hélice est la courbe engendrée, sur un cylindre par un point qui, se déplaçant sur une génératrice, y décrit des longueurs x qui sont dans un rapport constant avec les arcs décrits sur la base du cylindre par

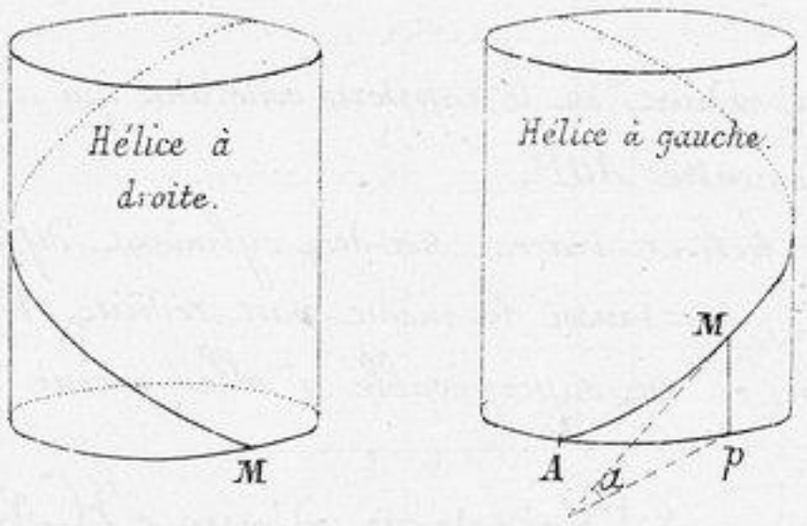
le pied de la génératrice.

$\frac{MP}{\text{arc } AP} = m = tg.\ \alpha$, en appelant α l'angle constant fait par les génératrices avec le plan horizontal.

Hélice à droite ou Dextrorsum.
Hélice à gauche ou Sinistrorsum.

En regardant le cylindre, les génératrices dirigées vers l'oeil, et voyant venir la courbe vers soi, si la projection sur la base du point décrivant semble tourner comme les aiguilles d'une montre, l'hélice est à droite ou Dextrorsum.

Dans le cas contraire elle est à gauche, ou Sinistrorsum



Spire et Pas de l'Hélice.

Lorsque l'hélice a fait un tour complet, c'est-à-dire lorsque le point décrivant est revenu sur la génératrice de départ, on dit que l'on a une Spire. — La quantité dont le point décrivant s'est déplacé sur cette génératrice se nomme le pas de l'hélice.

Soit H le pas de l'hélice, r le rayon de base du cylindre; α l'angle des tangentes à l'hélice avec le plan horizontal, on aura

$$H = 2\pi r\ tg\ \alpha \quad , \text{ et } tg\ \alpha = \frac{H}{2\pi r}$$

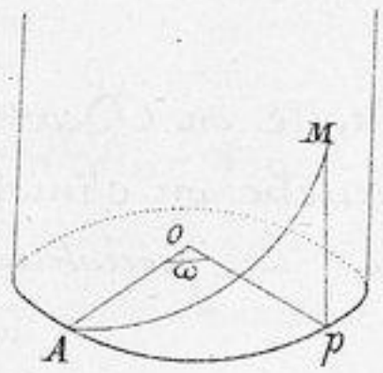
Pas réduit. — Le pas réduit est la quantité dont on monte sur la génératrice, non plus pour un tour complet, mais pour un déplacement égal à r compté sur la circonférence de base, ou, ce qui revient au même, c'est la hauteur dont monte le point décrivant pour un angle de rotation égal à 1.

Soit h le pas réduit, on aura évidemment

$$\frac{h}{H} = \frac{r}{2\pi r} \quad \text{ou} \quad h = \frac{H}{2\pi} \ .$$

Dès lors les formules précédentes deviennent, en y introduisant h:

$$h = r \operatorname{tg} \alpha .$$



On aurait encore:

$$\text{Arc } AP = r.\omega .$$

Mais: $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{MP}{\text{arc } AP} = \dfrac{\overline{MP}}{r\omega}$

Et par suite:

$$h = r.\operatorname{tg}\alpha = \frac{r \times \overline{MP}}{r\omega} = \frac{\overline{MP}}{\omega}$$

Le par réduit est le rapport constant qui existe entre l'ordonnée MP et l'angle au centre AOP.

Deux hélices tracées sur des cylindres différents, mais ayant même par total H, ont aussi le même par réduit, h.

Une hélice est superposable à elle-même dans toutes ses parties.

Projection d'une Hélice.

Considérons un cylindre de révolution à axe vertical.

Soit AA' le point de départ de l'hélice que nous supposerons sinistrorsum. — Soit H le par total.

Sur une échelle de hauteur latérale $\overline{m\,n}$ on portera le par H. On le divisera en un certain nombre de parties égales, (8 par exemple) aux points $1'.\ 2'.\ 3'. \ldots . 8' \ldots$

On divisera la circonférence de base en un même nombre de parties égales aux points $1, 2, 3, 4 \ldots .$

On mènera: 1° les génératrices du cylindre, 2° les horizontales par les points de l'échelle; et l'on aura aux intersections respectives de ces lignes, les différents points de la projection verticale de l'hélice.

Cette projection est une Sinusoïde. — Elle est tangente en A' et B' au contour apparent du cylindre. Au point C' projeté sur l'axe, elle présente une inflexion (Sera démontré plus loin)

Tangente à l'Hélice. — Sous-tangente.

La tangente fera l'angle constant α avec les génératrices. — Menons, par exemple, la tangente de front, au point CC', et —

prenona sa trace DD'.

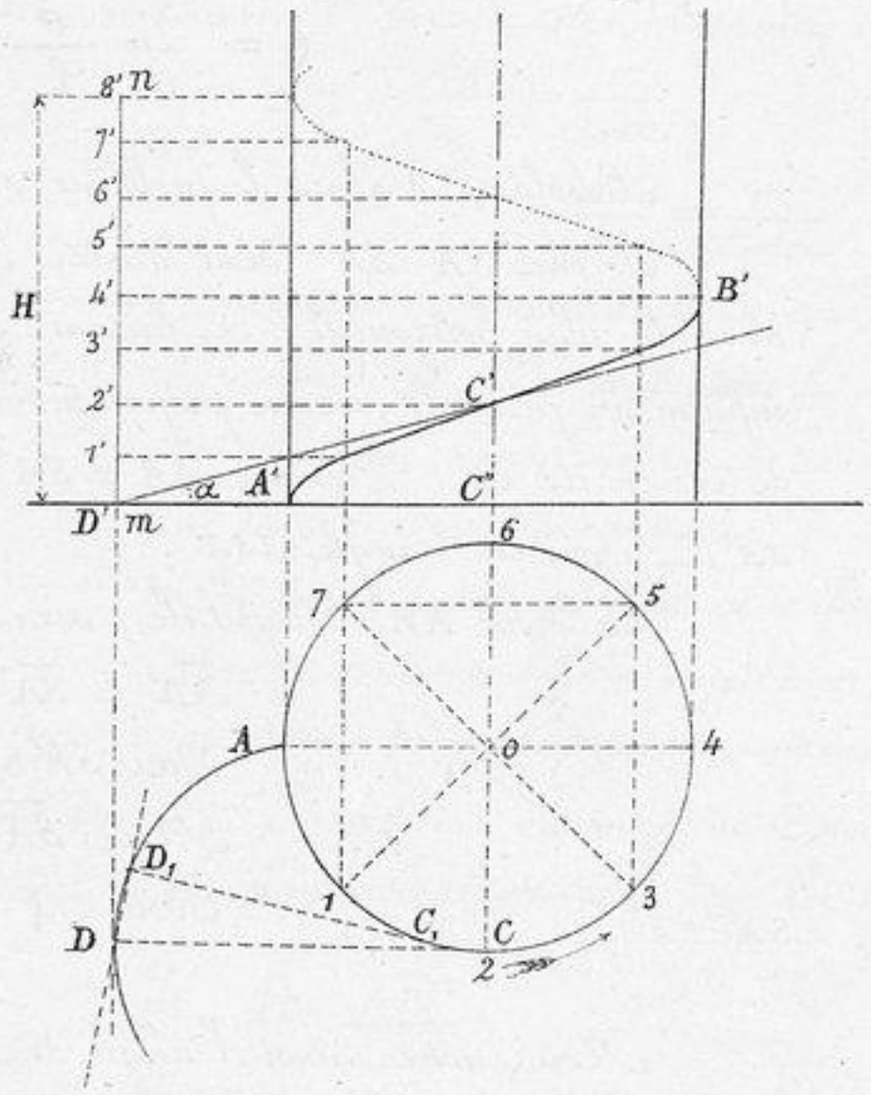
On aura $C'C'' = C''D' \operatorname{tg}\alpha$, mais d'autre part

$C'C'' = \text{arc } AC \times \operatorname{tg}\alpha$, donc

$CD = \text{arc } AC$.

Donc: Le lieu des traces des tangentes sur le plan de base du cylindre est une développante du cercle de base.

La ligne CD se nomme Sous-tangente.



Plan osculateur.

Cherchons le plan osculateur au point CC'. – C'est le plan de la tangente CD, C'D' et de la tangente infiniment voisine $C_1 D_1$.

La trace horizontale de ce plan est la droite DD_1, qui à la limite est tangente en D à la développante, c'est-à-dire, perpendiculaire à la droite C D. – Le plan osculateur est donc, au point CC' perpendiculaire au plan vertical.

Nous avons vu que lorsqu'une courbe est projetée, l'œil étant dans le plan osculateur, sa projection présente une inflexion.

Donc au point C' l'hélice présente une inflexion en projection verticale.

Ce qui précède prouve que le plan osculateur d'une hélice est le plan passant par la tangente à l'hélice et par la normale au cylindre.

Rayon de Courbure de l'Hélice.

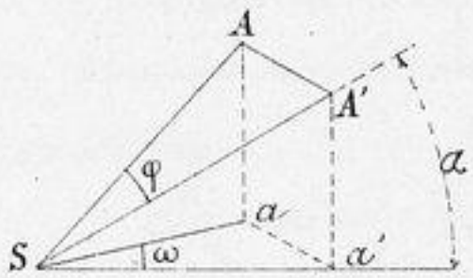
En appelant φ l'angle des 2 tangentes infiniment voisines, et θ l'arc qui sépare les points de contact, nous savons que l'on a :

$$\rho = \operatorname{Lim} \frac{\theta}{\varphi}$$

Résolvons d'abord le problème suivant :

Soient SA . SA' deux droites de l'espace faisant le même angle α avec le plan horizontal, et faisant entre elles, dans l'espace, un angle infiniment petit φ, et en projection l'angle ω. — Calculons φ en fonction de ω et de α. Prenons $SA = SA'$ et projetons horizontalement en sa et sa'. — Soit ω l'angle asa'.

La droite AA' horizontale, sera égale à sa projection aa'. On aura :



$\overline{AA'} = \overline{SA'} \times \varphi$, et $\overline{aa'} = \overline{Sa'} \times \omega$.

d'où $SA' \times \varphi = sa' \times \omega$, et $\varphi = \omega \times \frac{sa'}{SA'}$.

Mais $\overline{SA'} = \overline{SA'} \cos \alpha$

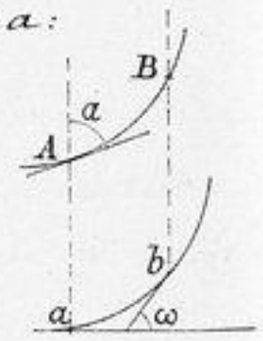
Donc : $\varphi = \omega . \cos \alpha$.

Nous avons ainsi l'angle des tangentes dans l'espace.

L'arc θ de l'espace a pour projection l'arc ab, et l'on a :

$$ab = \theta \cos \alpha \text{ , ou : } \overline{ab} = \omega r ;$$

$$\theta = \frac{ab}{\cos \alpha}$$



Donc : $\theta = \frac{r \omega}{\cos \alpha}$

D'autre part $\rho = \operatorname{Lim} . \frac{\theta}{\varphi} = \operatorname{Lim} . \frac{r . \omega}{\cos \alpha \times \omega . \cos . \alpha} = \operatorname{Lim} . \frac{r}{\cos^2 . \alpha}$

Donc : $\rho = \frac{r}{\cos^2 \alpha}$

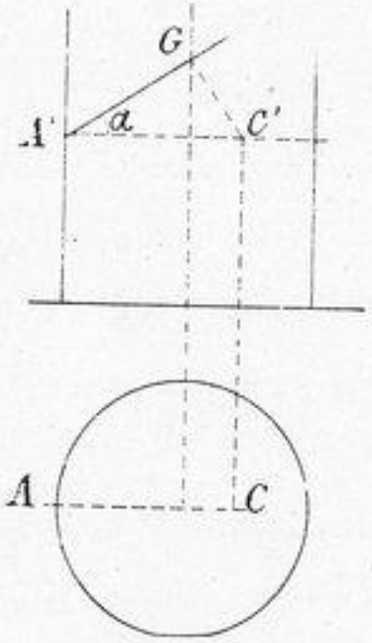
Telle est l'expression du rayon de courbure.

Normale principale. — Construction Graphique du centre de courbure.

Soit A' le point de l'hélice situé sur le contour apparent.

Le plan osculateur contient la tangente à l'hélice et la normale au cylindre ; la normale principale est donc la normale AC, $A'C'$ au cylindre.

Par A' menons la droite inclinée à l'angle α, prenons le point G où elle rencontre l'axe ; par ce point menons-lui une perpendiculaire jusqu'à la rencontre en C' avec l'horizontale du point A'.



On aura : $$AG = \frac{r}{\cos\alpha}$$

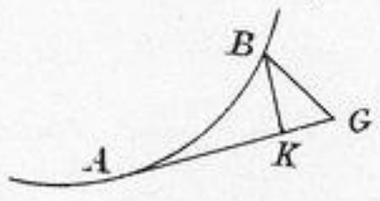
$$AC' = \frac{AG}{\cos\alpha} = \frac{r}{\cos^2\alpha}$$

Le point CC' est le centre de courbure de l'hélice ; au point AA'. En déplaçant le point CC' hélicoïdalement, nous aurons les centres de courbure en tous les autres points.

On peut encore établir cette formule autrement.

Soit A un point de l'hélice projeté en a, AT la tangente, et Bb un point infiniment voisin.

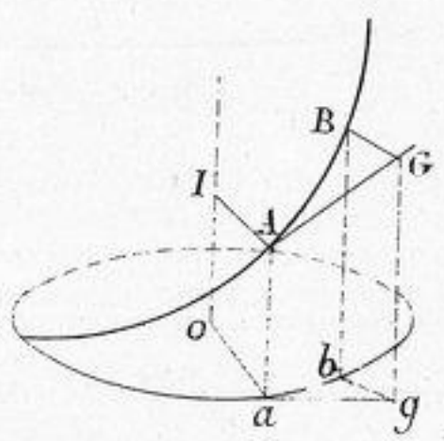
Nous avons vu (2e Expression du rayon de Courbure) que si l'on abaisse du point B la perpendiculaire $\overline{BK}$ sur la tangente on aura



$$\rho = \operatorname{Lim} \frac{\overline{AB}^2}{2\,\overline{BK}}$$

Nous avons vu également qu'on pouvait prendre, au lieu de BK toute autre droite BG, dont l'angle avec la tangente ait pour limite un droit. Cela posé :

Menons dans l'espace la droite <u>horizontale</u> BG joignant le point B à la tangente. Elle se projette horizontalement en vraie grandeur, suivant bg.



L'angle BGA a pour limite un droit.

En effet : le plan ABG est, à la limite, le plan osculateur ; BG devient à la limite, l'horizontale de ce plan menée par le point A

et nous venons de voir que c'est la normale principale AI, projetée horizontalement suivant a o ; on aura donc :

$$\rho = Lim \frac{\overline{AB}^2}{2\overline{BG}}$$

Mais, en projection horizontale, on aura aussi :

$$R = Lim. \frac{\overline{AB}^2}{2\overline{bg}}, \text{ et comme } \overline{bg} = \overline{BG}$$

$$\frac{\rho}{R} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2} \quad \frac{1}{Cos^2 \alpha}, \text{ d'où :}$$

$$\rho = \frac{R}{Cos^2 \alpha}.$$

Héliçoïde développable.

On nomme surface héliçoïde, toute surface engendrée soit par une courbe, soit par une autre surface, se déplaçant héliçoïdalement : c'est-à-dire liée invariablement à une génératrice d'un cylindre que l'on fait tourner sur ce cylindre en la faisant monter de quantités proportionnelles aux angles de rotation.

Il est facile de voir que dans un mouvement héliçoïdal, tous les points de la surface ou de la courbe entraînée décrivent, sur des cylindres concentriques, des hélices de même pas et de même sens.

Deux hélices quelconques, n'étant pas sur le même cylindre ne seront pas égales ; mais deux points situés à la même distance de l'axe décriront des hélices égales.

On nomme axe d'une surface héliçoïdale, l'axe commun à tous les cylindres sur lesquels sont décrites les hélices.

Si la surface mobile est un plan, la surface enveloppe sera développable : ce sera un héliçoïde développable.

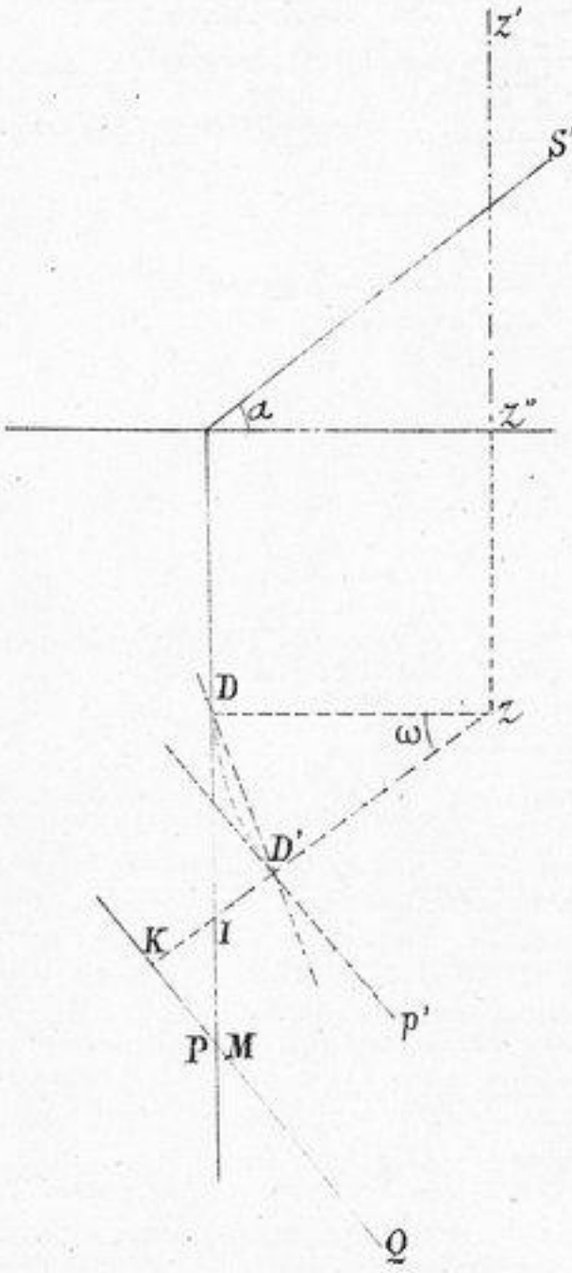
Pour en étudier les propriétés, prenons le plan mobile lorsqu'il est dans la position $P \alpha S'$, perpendiculaire au plan vertical. —

Soit $Z Z'' Z'$ l'axe de la rotation héliçoïdale.

Soit α l'angle de ce plan et du plan horizontal.

Soit h le pas réduit du mouvement héliçoïdal, c'est-à-dire la hauteur dont on s'élève pour un angle de rotation ω égal à 1.

Cherchons l'intersection du plan P et du plan infiniment voisin.



A cet effet, commençons par faire tourner le plan d'un angle ω, mais sans le faire monter. — La trace horizontale PD prendra la position P'D'.

Faisons-le monter d'une hauteur, l, répondant à l'angle ω, c'est-à-dire d'une hauteur $l = h\omega$.

La trace devra être reculée en QK parallèlement à P'D' et d'une quantité

$$KD' = \frac{l}{tg\alpha} = \frac{h\omega}{tg\alpha}$$

Les deux traces PD & KQ se coupent en M. — Par ce point passe l'intersection des 2 plans, laquelle est, à la limite, parallèle au plan vertical.

(On démontrera cette dernière assertion, par la considération du Cône Directeur, enveloppe des plans menés par un même point et parallèlement au plan mobile. — Ce cône sera de révolution, et sa génératrice répondant au plan P ∝ S' sera parallèle au plan vertical).

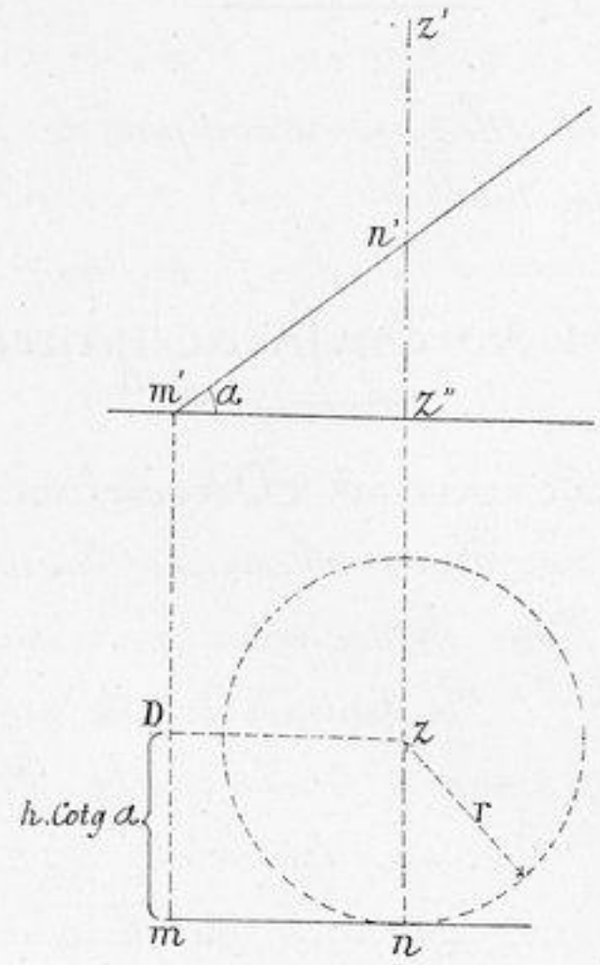
Cela posé, il faut chercher la longueur de MD.

A la limite, la corde DD' est perpendiculaire sur ZD'.

On aura donc : $MD = MI + ID = \frac{KD''}{\sin\omega} = \frac{KD'}{\omega}$.

Mais $KD' = \frac{h\omega}{tg\alpha}$, Donc : $MD = h.\cot g\,\alpha$.

Ainsi, la caractéristique a pour projections une droite m n, m'n' parallèle au plan vertical, inclinée à l'angle α sur le plan horizontal et située à une distance $h\cot g\,\alpha$ en avant de l'axe, c'est-à-dire tangente à un cylindre de rayon $r = h\,\mathrm{Cotg}\,\alpha$.



Sur ce cylindre, imaginons une hélice passant par le point de tangence n n' et inclinée à l'angle α sur le plan horizontal; calculons le pas réduit h' de cette hélice. — C'est la hauteur dont elle monte pour un déplacement égal à r compté sur la base du cylindre.

On aura donc :

$$h' = r.\,tg\,\alpha\ ;$$

mais $r = h\ cotg.\ \alpha$,

donc : $h' = h$.

Il résulte de là :

1° Que la caractéristique de front entraînée par le mouvement héliçoïdal avec le plan mobile, donnera successivement toutes les autres caractéristiques.

2° Que cette caractéristique sera toujours tangente à une hélice de même pas réduit que celui du mouvement héliçoïdal, et tracée sur un cylindre de rayon $r = h.\ Cotg.\ \alpha$

L'arête de rebroussement est donc cette hélice.

L'héliçoïde développable peut donc être considérée comme le lieu géométrique des tangentes à une même hélice.

Développement.

Dans le développement, le rayon de courbure de l'hélice de rebroussement ne variera pas.

Cette hélice se développera donc suivant un cercle dont le rayon sera

$$R = \frac{r}{Cos.^2\alpha}$$

Les sections de la surface par des plans perpendiculaires à l'axe du cylindre, sont les trajectoires orthogonales des génératrices.

Elles se développeront donc suivant les développantes du cercle précédent.

Surfaces gauches.

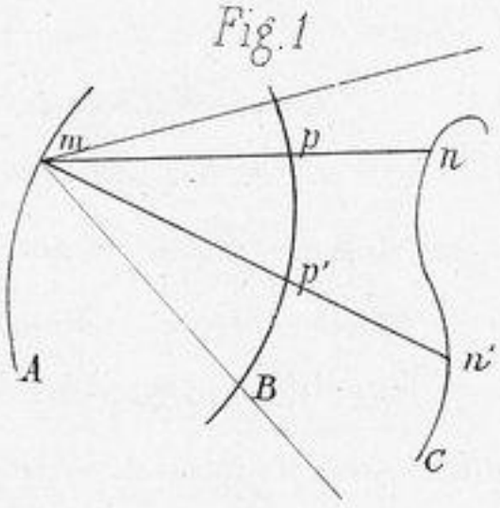
Nous avons ainsi défini celles qui n'ont pas le même plan tangent tout le long d'une même génératrice.

Génération des Surfaces gauches.

I. Surfaces définies par 3 Directrices, A, B, C.

Pour obtenir une génératrice quelconque, soit m un point pris sur A.

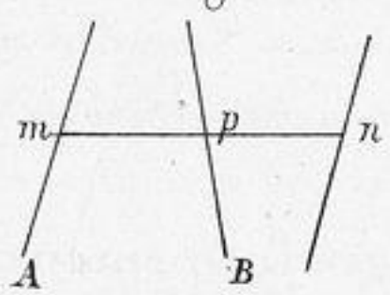
Fig. 1



Construisons le cône ayant m pour sommet, et la courbe B pour directrice. — Prenons les points n, n' .... où ce cône est rencontré par la courbe C, et nous aurons en m p n — m p' n' .... des génératrices de la surface.

Hyperboloïde. — Si les 3 directrices sont 3 droites non parallèles à un même plan, la surface devient un hyperboloïde à une nappe, (Fig. 2).

Fig. 2



II. Surfaces à 3 noyaux. — On peut se donner comme directrices 3 surfaces noyaux A, B, C, et assujettir la génératrice à être tangente à ces noyaux.

III. Surfaces à 1 courbe directrice et 2 noyaux.

IV. Surfaces à 2 courbes directrices et 1 noyau.

V. Surfaces à Cône Directeur, et à 2 directrices.

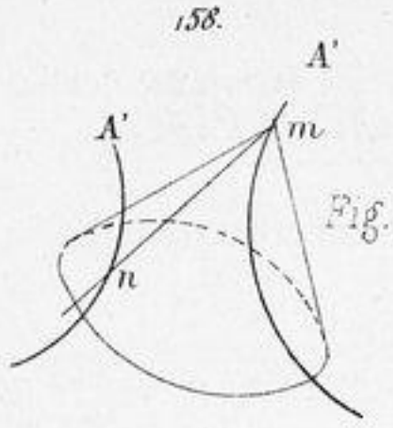


Fig. 3.

Pour construire une génératrice quelconque de la surface, soit m, un point de la 1ère Directrice (fig 3). Transportons, parallèlement à lui-même et ayant son sommet en ce point, le cône directeur (fig. 3bis). Il coupera en n, la 2e. Directrice. La droite m n sera une génératrice de la surface.

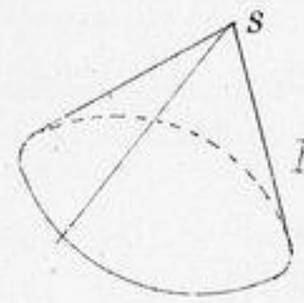
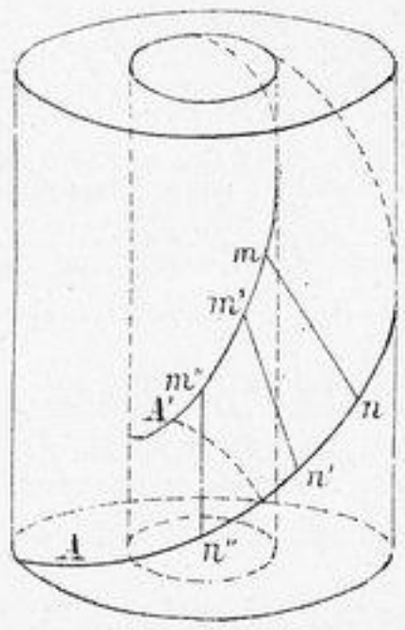


Fig. 3bis

Exemples de surfaces à 2 directrices et un cône directeur:

(a) Hélicoïde gauche quelconque (fig. 4) —

Fig. 4.



Deux hélices, A et A', de même pas, sont tracées sur deux cylindres concentriques. — On assujettit une droite à glisser sur ces deux directrices en ayant pour directeur S un cône de révolution dont l'axe est parallèle à l'axe des deux cylindres, ou, ce qui revient au même, en faisant un angle constant α, avec le plan horizontal.

(b) Surface de vis à filet triangulaire

(Fig. 5)

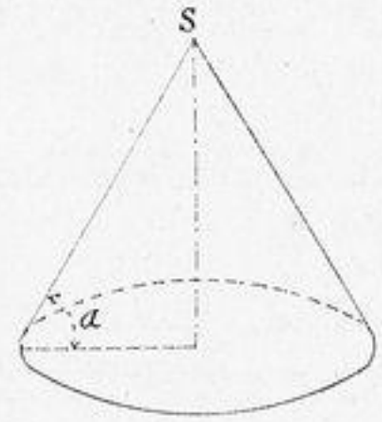
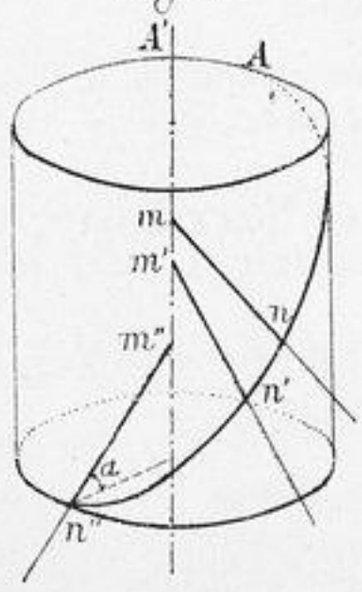


Fig 5



Les deux directrices sont: 1°. une hélice A; 2°. L'axe du cylindre sur lequel est tracée l'hélice.

Le cône directeur est de révolution; son axe est parallèle à l'axe du cylindre de l'hélice.

On voit facilement que cette surface est un cas particulier de l'hélicoïde gauche quelconque. —

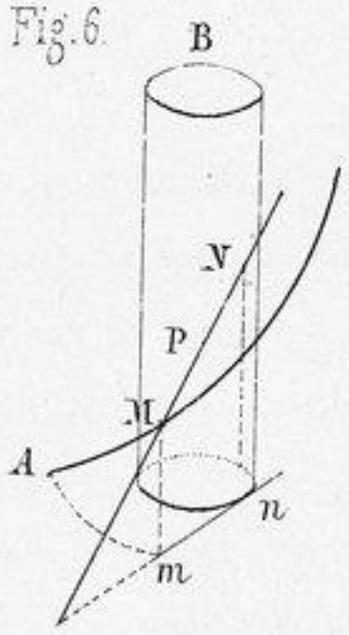
Elle répond au cas où la 2e directrice A' serait tracée sur un cylindre de rayon nul.

VI. Surface à 1 Directrice, 1 noyau. et 1 cône directeur.

Exemple: Hélicoïde gauche quelconque (2e Définition) (Fig. 6).

La Directrice est une hélice A. Le noyau est un cylindre B ayant même axe que l'hélice.

Fig. 6



Le cône est de révolution; les génératrices feront un angle constant avec le plan de base du cylindre, tout en étant tangentes au noyau cylindrique B.

On voit facilement que cette définition de l'hélicoïde gauche rentre dans la précédente, en remarquant qu'un point quelconque P de la génératrice entraîné dans le mouvement hélicoïdal décrit, une hélice de même pas que l'hélice A, que l'on peut prendre ces deux hélices pour directrices et se passer du noyau.

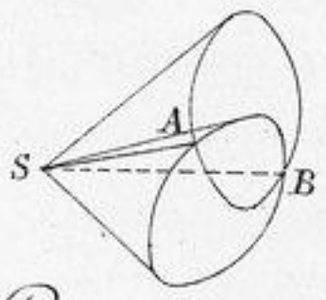
Si l'on prend un 3e point N, sur la génératrice, il engendrera, lui aussi, une hélice ayant même axe et même pas que les deux autres; on peut donc dire encore:

(3e Définition) L'hélicoïde gauche est engendré par une droite qui glisse sur 3 hélices de même axe et de même pas.

VII. Surfaces à deux cônes directeurs et une directrice.

Fig. 7

(Fig. 7)



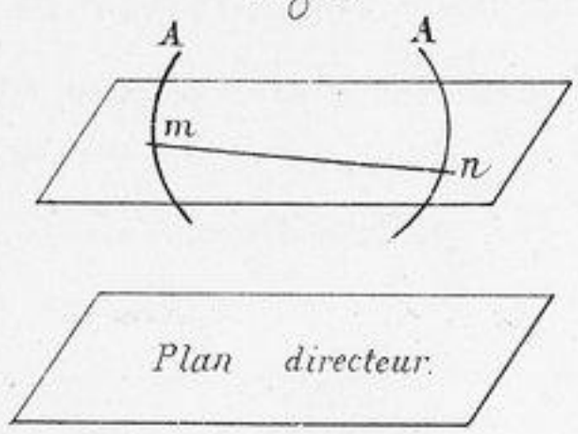
Les génératrices devant être parallèles à la fois aux deux cônes, seront parallèles aux droites SA, SB..... d'intersection de ces deux cônes.

Dans ce cas la surface est formée de 1, 2, 3.... cylindres.

VIII. Surfaces à 1 Plan Directeur, et deux Directrices (Courbes ou Noyaux).

La génératrice est assujettie à rencontrer les deux directrices courbes ou à être tangente aux 2 Directrices noyaux; tout en restant

Fig. 8.



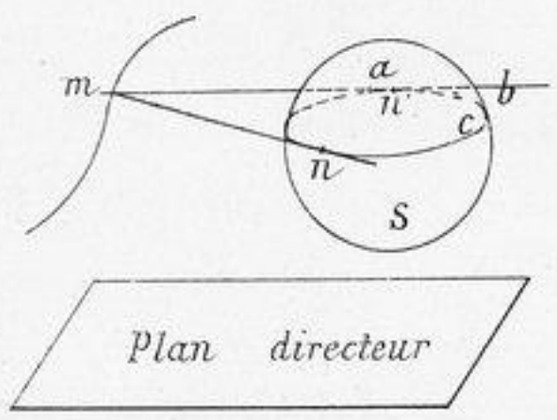
parallèle au plan directeur.

Ces surfaces se rencontrent souvent en construction. Le plan directeur est ordinairement horizontal.

Pour obtenir une génératrice, soit m un point de la 1ère directrice courbe (fig. 8).

On mène par ce point un plan parallèle au plan directeur. Il rencontre la 2e directrice en un point n. — La droite m n est la génératrice.

Fig. 9

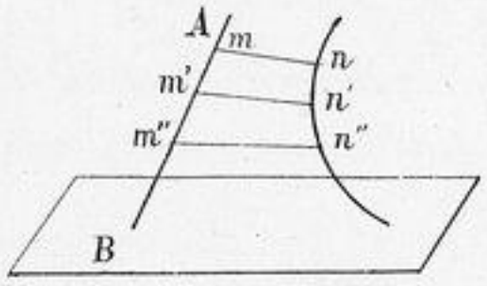


Si la 2e Directrice est un noyau, S, le plan auxiliaire le coupera suivant une courbe a. b. c. (fig. 9). — Du point m on mènera une ou plusieurs tangentes à cette courbe et l'on aura autant de génératrices.

Enfin, si l'on a 2 noyaux, le plan auxiliaire déterminera une courbe dans chacun d'eux et les tangentes communes aux deux courbes seront les génératrices cherchées.

IX. Conoïde. (Fig. 10).

Fig. 10.



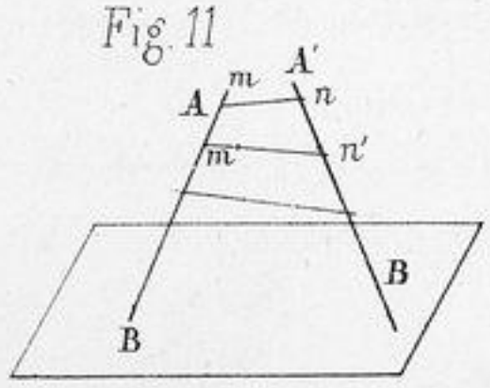
Si l'une des deux directrices est une ligne droite AB, la surface est un Conoïde.

Le Conoïde est <u>oblique</u> si la directrice rectiligne est oblique sur le plan directeur ; il est <u>droit</u> si elle est perpendiculaire.

Dans le Conoïde, la directrice courbe peut être remplacée par un noyau.

X. Paraboloïde. (Fig. 11)

Fig. 11



Si les deux directrices sont deux droites non parallèles, le Conoïde devient un paraboloïde.

Si l'une d'elles est en outre perpendiculaire au plan directeur, le paraboloïde est droit.

Le paraboloïde est la plus simple de toutes les surfaces gauches.

Exemples de surfaces à plan directeur.

(a) Héliçoïde gauche à plan directeur. (fig. 12).

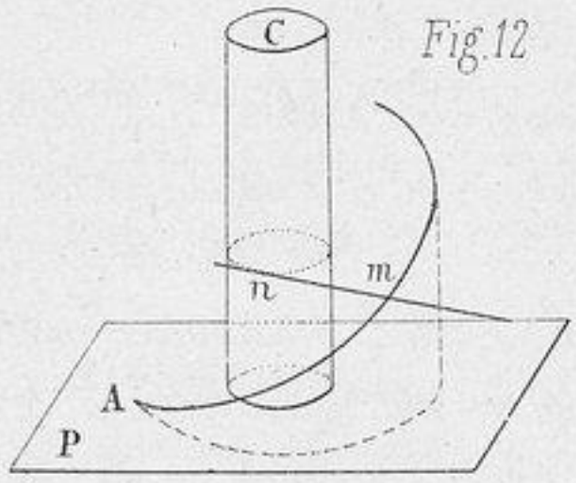


Fig. 12

La directrice est une hélice A. Le plan directeur P est perpendiculaire à l'axe du cylindre. — et l'on a, de plus, un noyau cylindrique C, ayant même axe que l'hélice.

(b) Surface de vis à filet carré (fig. 13).

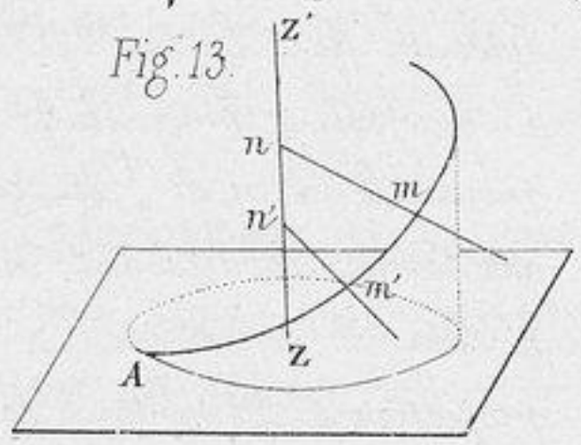


Fig. 13.

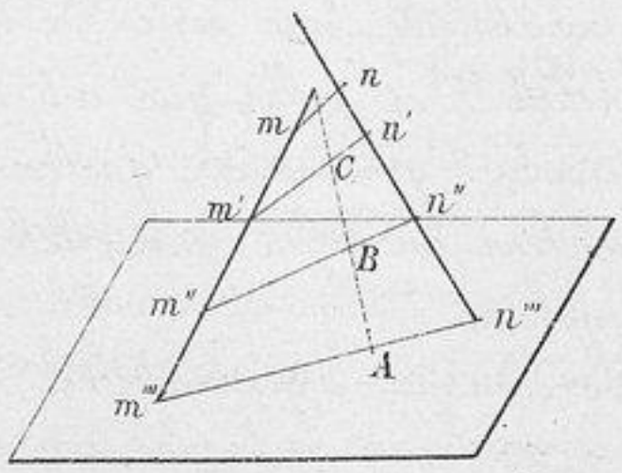
La directrice est toujours une hélice A. Le noyau B est réduit à l'axe du cylindre. — Le Plan directeur est perpendiculaire à cet axe.

Etude du Paraboloïde — Sa double génération.

Le paraboloïde est la plus simple des surfaces gauches. Il joue un grand rôle dans l'étude des autres surfaces gauches.

Il est défini par 2 Directrices rectilignes A et B non parallèles (à un même plan) et un plan directeur, que nous supposerons, pour plus de simplicité, horizontal.

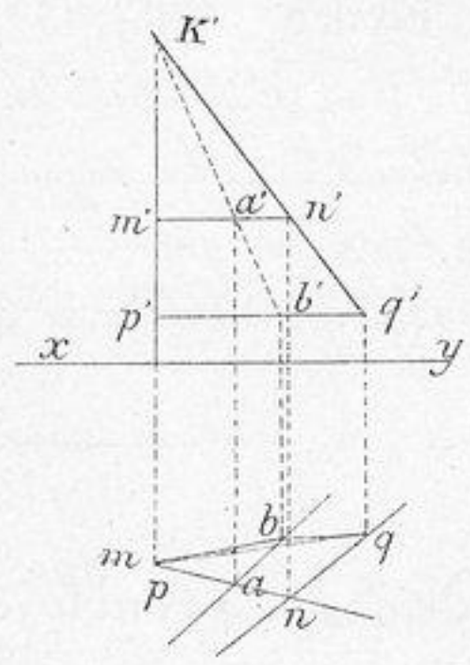
Théorème 1. — Les génératrices d'un paraboloïde partagent les 2 directrices en segments proportionnels (Résulte d'un Théorème connu de la Géométrie de l'Espace) — $\frac{mm'}{n\,n'} = \frac{n'm''}{n'n''} = \frac{m''m'''}{n''n'''}$



Réciproquement : si plusieurs génératrices coupent deux directrices, en segments proportionnels, ces génératrices sont toutes parallèles à un même plan et forment un paraboloïde.

Théorème 2.— Si l'on prend sur différentes génératrices les points A, B, C .... qui divisent dans un même rapport la portion de ces génératrices comprise entre les 2 directrices. Tous ces points seront en ligne droite.

Pour le démontrer, supposons d'abord que le paraboloïde soit droit. — Prenons en $m'p'$, ... mp, sa directrice perpendiculaire au plan horizontal, et en $n'q'$, nq sa directrice quelconque. — Le plan directeur est horizontal. Une génératrice quelconque aura pour projection mn, $m'n'$. ($m'n'$ est parallèle à xy). Horizontalement, les génératrices divergeront toutes du pied m de la directrice verticale.



Soit a a' le point qui divise la génératrice mn — $m'n'$ dans le rapport donné. — Ce rapport se conserve en projection. Il est évident que le lieu géométrique du point a en projection horizontale, sera une droite ab parallèle à nq, et en projection verticale, une droite aboutissant au point de croisement K' des 2 directrices. — Ce lieu, ayant pour projections 2 droites, est lui-même une droite dans l'espace. C. Q. F. D.

Remarque. — La droite mn ... $m'n'$ est parallèle au plan projetant horizontalement la directrice oblique, c'est-à-dire est parallèle à un nouveau plan directeur, qui serait parallèle à la fois aux 2 directrices primitives.

Théorème 3. — (Conséquence immédiate du précédent). — Le Paraboloïde peut être engendré par un 2e. système de génératrices. — Autrement dit: il existe sur le paraboloïde une série de lignes droites autres que les génératrices horizontales, et telles que ab, $a'b'$. — Ce 2e. système aurait pour directrices 2 génératrices quelconques du 1er. système, et pour plan directeur un plan parallèle à la fois aux deux directrices du 1er. système.

Remarque. — Si l'on se donnait 3 génératrices du 1er. système

lesquelles sont parallèles au 1er. plan directeur, et qu'on les prît comme directrices, la surface gauche ainsi définie serait le même paraboloïde que ci-dessus.

Donc: Un paraboloïde peut être engendré par une droite assujettie à en rencontrer 3 autres, parallèles à un même plan.

C'est la limite d'un hyperboloïde dont les 3 directrices deviennent parallèles à un même plan.

Théorème 4. Une génératrice d'un système, rencontre toutes celles du système différent, et 2 génératrices d'un même système ne se rencontrent jamais.

Théorème 5. Par un point pris sur la surface, il passe 2 droites qui sont 2 génératrices de système différent. Ces 2 droites définissent le plan tangent.

Théorème 6. Tout plan passant par une génératrice d'un 1er. Système, coupe la surface suivant une droite qui est une génératrice du 2e. Système, et est tangent à la surface, au point où ces génératrices se coupent.

Si le paraboloïde est oblique, c'est-à-dire si ses 2 directrices sont obliques au plan directeur, il suffira de projeter les génératrices sur le plan directeur, non plus par des perpendiculaires, mais par des obliques parallèles à l'une des 2 directrices, pour en tirer les mêmes conclusions que ci-dessus. Cette directrice oblique se projettera toute entière en un point, sur le plan horizontal; par ce point passeront toutes les projections horizontales des génératrices du 1er. système, et l'on pourra raisonner comme pour le paraboloïde droit.

Problèmes sur le Paraboloïde.

1. Plan tangent par un point pris sur la surface.

Je suppose le plan directeur horizontal. Soient A, A' et BB', les 2 directrices du 1er. Système. Soit cd, c'd' une génératrice quelconque du 1er. système et m m' un point sur cette génératrice. —

Cherchons le plan tangent en ce point.

Le problème revient à chercher la génératrice du 2e. système qui passe par ce point. — Or, si nous connaissions 2 autres génératrices du 1er. Système, cette génératrice cherchée du 2e. système les rencontrerait toutes les deux.

Nous prendrons comme première génératrice du 1er. Système, celle qui est projetée toute entière verticalement au point i, croisement des 2 directrices en projection verticale.

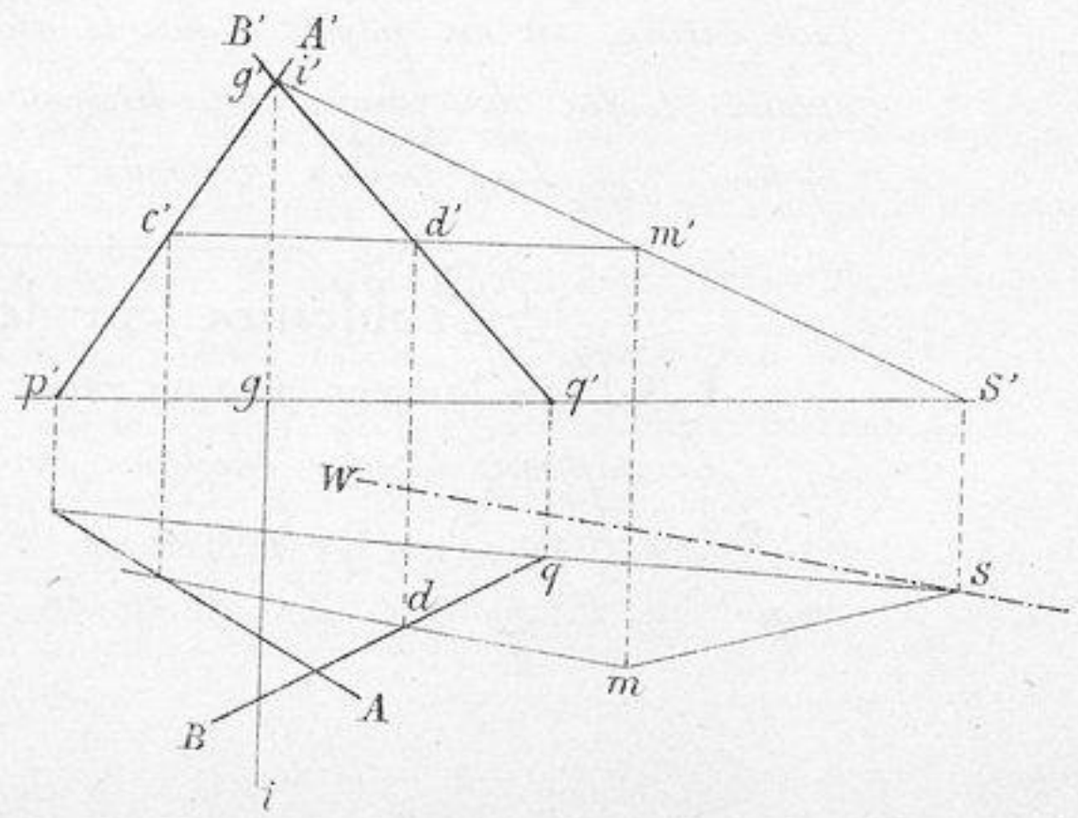
Nous remarquerons que le point i sera un point de divergence pour toutes les génératrices du 2e. système en projection verticale. — Nous remarquerons encore que les génératrices passeront toutes en projection par un point de divergence chaque fois que le plan de projection sera perpendiculaire au plan Directeur.

Comme 2e. génératrice du 1er. système, nous prendrons la trace du paraboloïde sur le plan horizontal, ou toute autre génératrice. — Soit p q, p' q' cette trace.

La génératrice du 2e. système passant par le point m m' est donc m' i' déterminée à priori, en projection verticale, puisqu'elle passe par le point de divergence i'.

Elle rencontre la trace du paraboloïde au point S' projeté horizontalement en S sur la trace p q. — Cette génératrice du 2e. système est la droite m S, m' S'.

La trace horizontale S W, du plan tangent, passe par le point S, et est parallèle à la droite c d, puisque cette dernière droite en est une horizontale



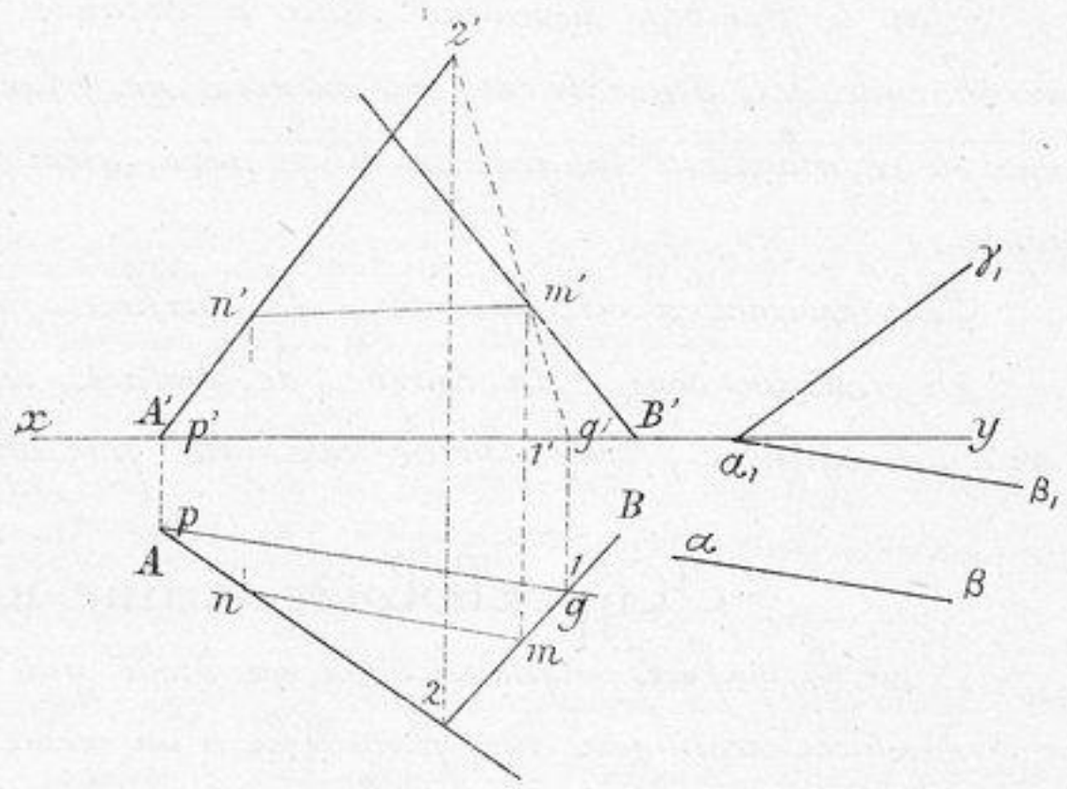
Problème 2. — Un plan passe par une génératrice de la surface ; déterminer le point où il est tangent. (même figure).

Soit cd, c'd' la génératrice, et SW, la trace horizontale d'un plan passant par cette droite.

La trace du plan coupe la trace du paraboloïde au point SS', par lequel doit passer la génératrice du 2e Système. D'ailleurs, en projection verticale, elle doit diverger du point i', Sa projection verticale est donc i's', rencontrant la génératrice donnée au point m'm, qui est le point cherché.

Problème 3. Tracer sur la surface la génératrice qui est parallèle à une droite donnée du plan directeur.

Soient encore AA' et BB' les 2 directrices, et αβ une droite du plan directeur. — Le problème revient à celui-ci :



Mener une droite qui soit parallèle à l'horizontale αβ et qui rencontre les 2 directrices, AA' & BB'.

A cet effet, menons par AA' un plan parallèle à αβ et prenons son intersection avec BB'. — Pour cela, par la trace horizontale pp de la droite AA' menons une parallèle pg, p'g' à la droite αβ. — Prenons l'intersection du plan défini par AA' et par pg, avec la droite BB'. — Le plan projetant horizontalement BB' coupe le plan de AA' et de pg,

suivant la droite auxiliaire 1.2 , 1'.2' , qui rencontre en m m' la droite AA'.

La génératrice demandée est la droite m n , m' n' menée par ce point parallèlement à $\alpha\beta$.

Problème 4. — Mener au paraboloïde un plan tangent parallèle à un plan donné.

Soient β_1 α_1 γ_1 les traces de ce plan. (même figure)

Nous chercherons comme ci-dessus, les génératrices m n – m' n' de la surface qui est parallèle à la trace horizontale α, β, de ce plan.

On menera par cette génératrice un plan parallèle au plan donné. Il sera tangent, en un point que l'on obtiendra comme il a été fait au problème 2.

Problème 5. — Ombre propre d'un paraboloïde éclairé par un flambeau.

Par le flambeau lumineux situé à distance finie ou infinie, et par chacune des génératrices on menera un plan ; — on cherchera le point où ce plan est tangent et l'on aura ainsi un point de l'ombre propre.

Cela revient à circonscrire à la surface, un cône ou un cylindre.

Si c'est un cône, la courbe de contact est une hyperbole ; si c'est un cylindre, cette courbe est une parabole.

Hyperboloïde à une nappe.

C'est la surface engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant sur 3 directrices rectilignes non parallèles à un même plan.

Avant d'étudier cette surface, démontrons le lemme préliminaire suivant :

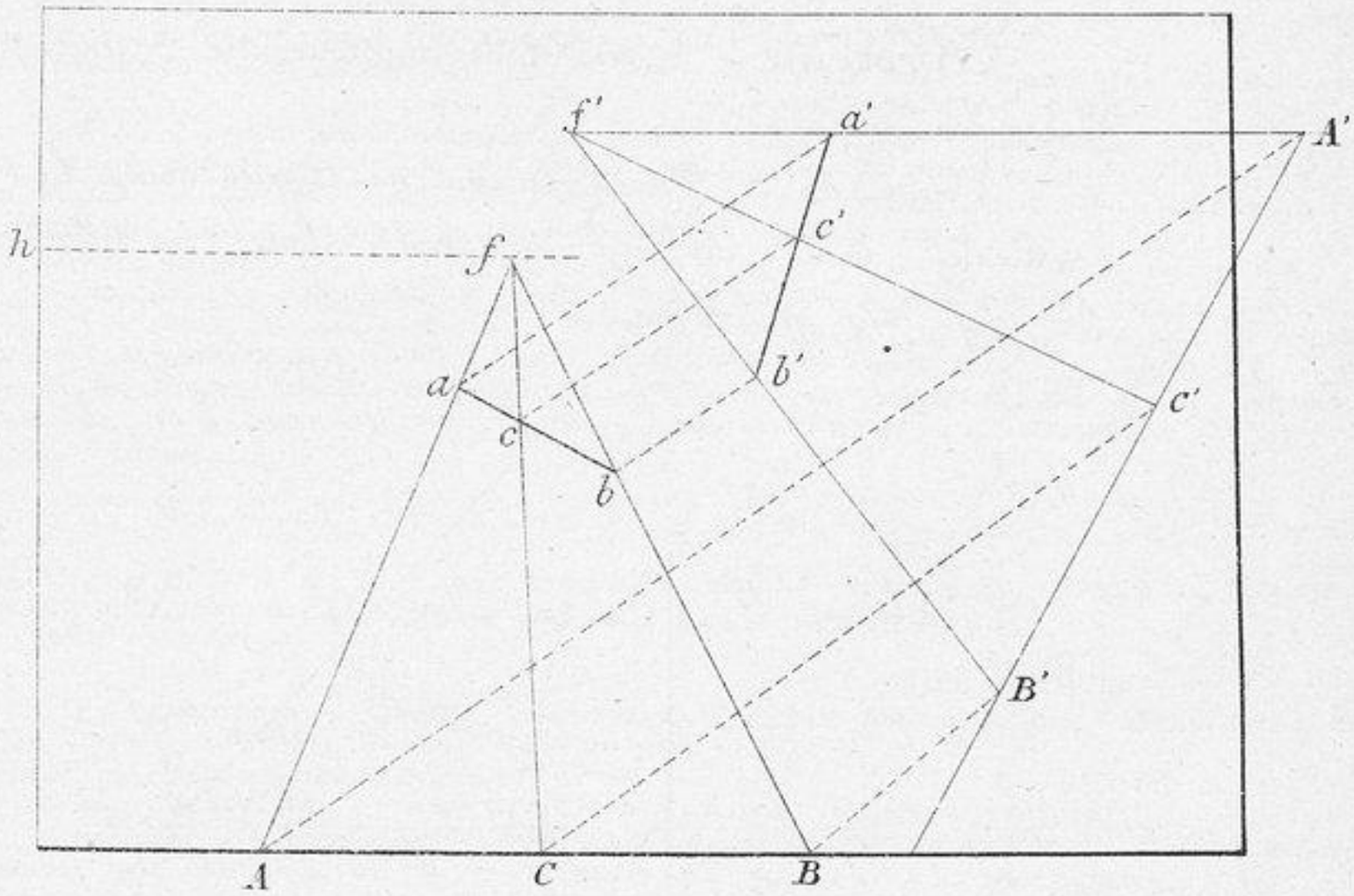
Lemme préliminaire

Soient fA , fB , fC .... plusieurs droites concourantes coupées par 2 transversales ABCD — abcd.

Soient 2 autres droites B'C'A', b', c'a'. — Sur ces droites, des segments proportionnels aux précédents obtenus en menant des parallèles

par les points A B C en a b c.

Je dis que si l'on joint A'a', B b', C'c' .... ces droites seront concourantes en un même point f'.



Démontrons ce théorème par la perspective. – AB représentera une droite du tableau, et les 3 concourantes fA, fB, fC, 3 parallèles dans l'espace, ou dans le géométral.

On les coupe par la transversale acb, ce qui donne dans l'espace, et non en perspective, des segments a.b.c proportionels aux segments ABC.

D'un autre côté, A'B'C' représentera également une droite du tableau et a'b'c', une droite de l'espace que l'on peut considérer comme étant dans un même plan avec A'B'C'

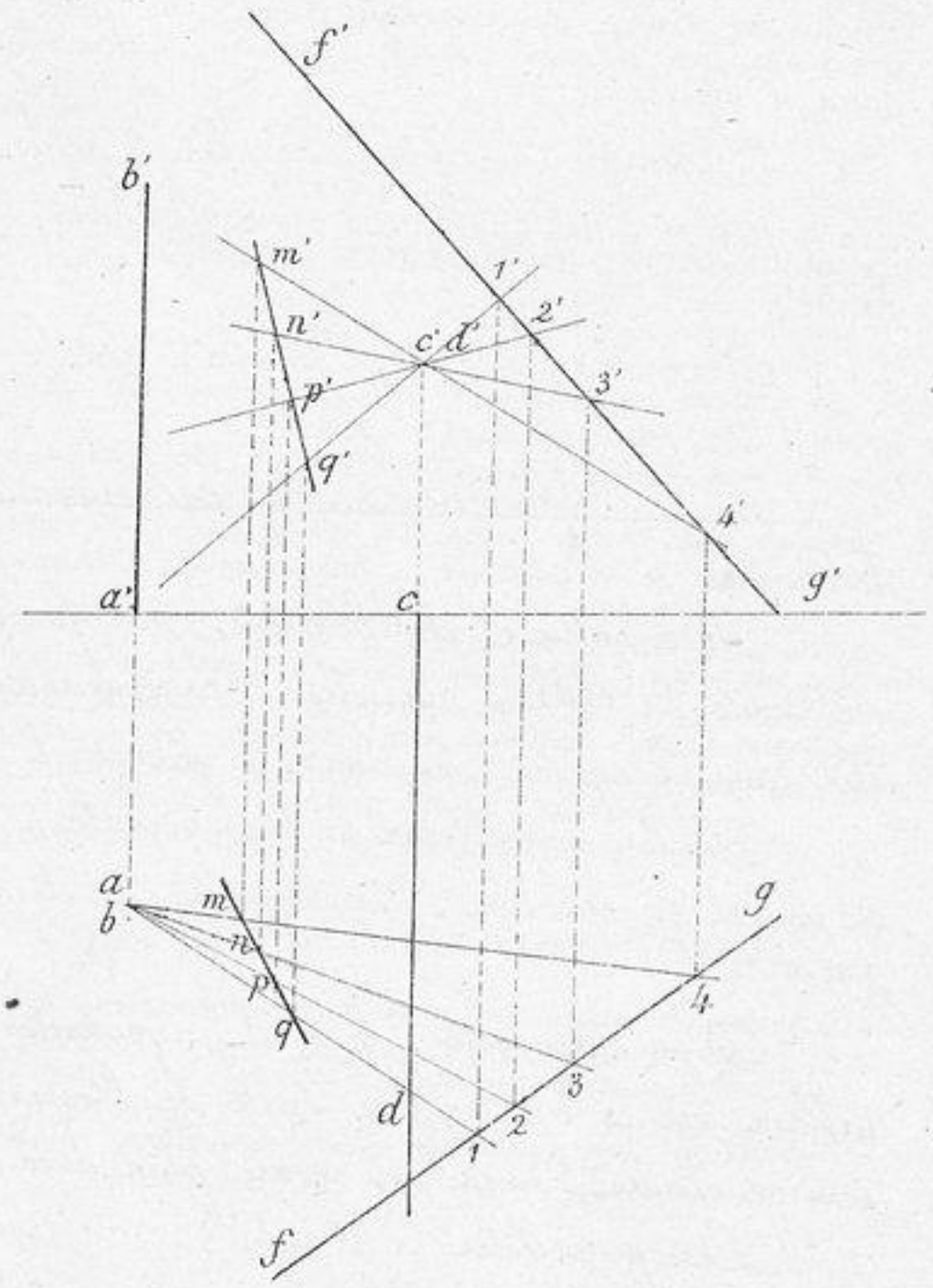
Les parallèles a a' – bb', – cc' et AA' – BB' – CC' sont des lignes de front parallèles entre elles. – Par conséquent les 3 droites Aa, AA' et a a' définissent un plan; – il en est de même de Bb, BB' et bb' ainsi que de Cc, CC' et cc'; et de plus ces 3 plans sont parallèles, puisqu'ils passent par des droites parallèles deux à deux. Ils recoupent donc le plan de a'b' et A'B' suivant 3 droites b'B', c'C', a'A' parallèles dans l'espace, et par suite ces droites

doivent concourir, en perspective, C. Q. F. D.

Double Génération de l'Hyperboloïde.

Théorème. Toute droite qui rencontre 3 génératrices rencontre toutes les autres.

Soient les 3 Directrices que nous prendrons : la 1ère ab _ a'b _ (verticale) ; la 2e, cd, c'd', perpendiculaire au plan vertical, et la 3e, fg, f'g' quelconque.



Toutes les génératrices, en projection horizontale, convergeront du point a, et en projection verticale, du point c'.

Menons 4 génératrices quelconques, en projection verticale _ c'1' _ c'2' _ c'3' _ c'4', et en projection horizontale, a1 _ a2 _ a3 _ a4. _ Coupons la projection verticale par une transversale m'n'p'q'...

prenons les 2 points m' m , q' q , situés sur la génératrice 4, et joignons m.q.

Si nous menons les lignes de rappel par les points intermédiaires n' et p', jusqu'à la droite m q , les segments m n , n p , p q , sont proportionnels aux segments m' n' p' q' ; mais d'autre part les segments 1. 2. 3. 4 sont proportionnels à 1' 2' 3' 4' , par conséquent si l'on joignait les points 4m , 3n , 2p , 1q , ces lignes seraient concourantes au même point a .

Donc : 1° Les 4 points m m' , n n' , p p' , q q' , sont en ligne droite sur leurs deux projections et par conséquent en ligne droite dans l'espace.

2° Ces points seront sur les 4 génératrices, et par suite, toute droite m n p , m' n' p' , qui rencontre les 3 premières, rencontre aussi la 4e

Remarque. Cette démonstration est fondée sur l'existence des 2 points de divergence a et c'

Si les 3 directrices sont quelconques, on projettera sur le plan horizontal à l'aide de projetantes parallèles à la 1ère Directrice, et sur le plan vertical, à l'aide de projetantes parallèles à la 2e Directrice .. On retrouvera, dès lors, 2 points de divergence, et la démonstration se fera comme ci-dessus. — Elle est donc générale.

Nous en déduisons les propriétés suivantes de l'hyperboloïde à une nappe.

Théorème 1. — L'hyperboloïde est la surface engendrée par une génératrice rectiligne qui s'appuie sur 3 directrices rectilignes non parallèles à un même plan.

Théorème 2 — Si l'on prend 3 génératrices quelconques de ce premier système, pour directrices d'un nouvel hyperboloïde, cette nouvelle surface gauche se confondra avec la première. — Il existe donc sur la surface deux systèmes de génératrices rectilignes.

Théorème 3. — Deux génératrices de système différent se

rencontrent toujours, à moins qu'elles ne soient parallèles. En tout cas, elles sont toujours dans un même plan.

Deux génératrices d'un même système ne se rencontrent jamais.

En effet, les génératrices divergent toutes en projection horizontale, du point a, et en projection verticale, du point c'; or comme ces deux points ne sont pas sur une même ligne de rappel, ces génératrices ne se rencontrent pas dans l'espace.

Théorème 4. – Par un point de la surface il passe deux génératrices de système différent. Ces deux génératrices définissent le plan tangent en ce point.

Si le point est à l'infini, les deux génératrices sont parallèles; Donc: le plan passant par 2 génératrices parallèles, est tangent à l'infini.

Théorème 5. – Tout plan passant par une génératrice d'un système contient une génératrice de l'autre système, et est tangent au point d'intersection de ces 2 génératrices.

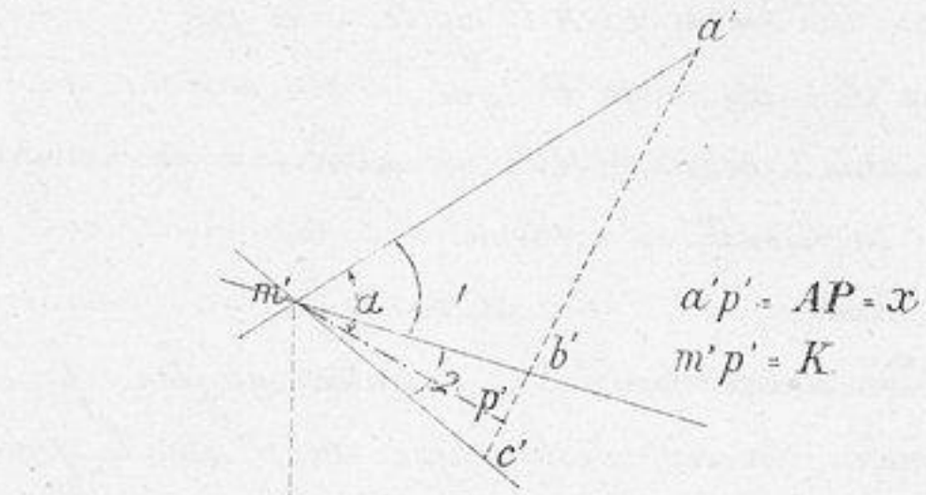
En se fondant sur ces théorèmes, il est facile de résoudre pour l'Hyperboloïde les problèmes sur les plans tangents ou sur les ombres.

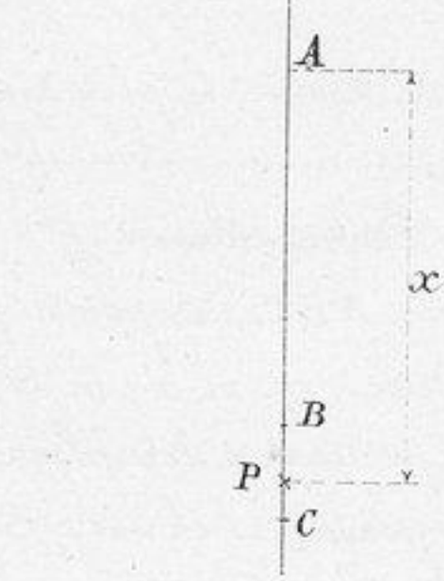
Raccordement des Surfaces gauches.

Théorème. – La connaissance de 3 plans tangents en 3 points A.B.C d'une génératrice d'une surface gauche, suffit pour en déterminer le point central, le paramètre de distribution et le plan tangent en tout autre point. Supposons cette génératrice perpendiculaire au plan vertical. Elle se projette verticalement toute entière en un point m'.

Soient m'a', m'b', m'c' les traces verticales des 3 plans tangents aux points A, B et C.

Les distances de ces points entre eux sont mesurées en vraie grandeur sur



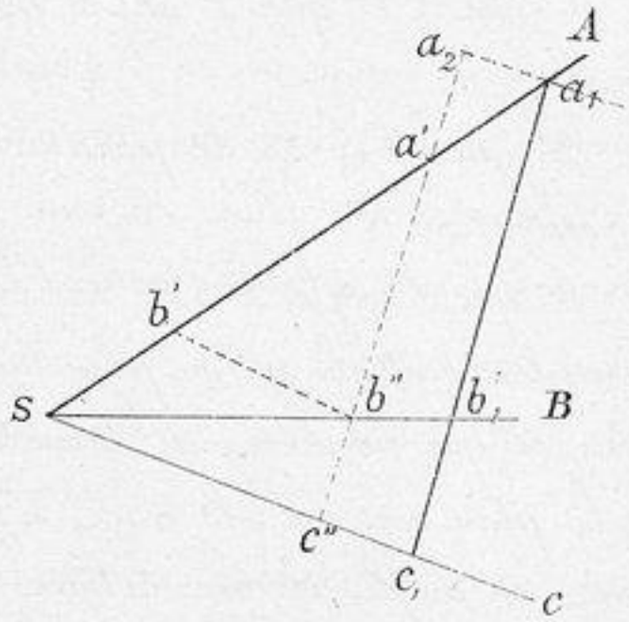


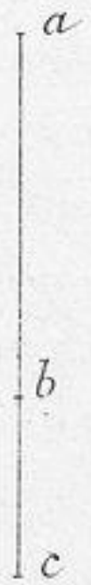
le plan horizontal, et les angles des plans tangents entre eux sont mesurés en 1 et 2 sur le plan vertical, par les angles formés par les traces. Inscrivons sur les 3 droites du plan vertical $a'm' - b'm' - c'm'$, une sécante $a'c'$ telle que les deux segments $a'b' - b'c'$ soient égaux aux longueurs horizontales $AB - BC$. Ce problème a une solution et une seule.

Abaissons $m'p'$ perpendiculaire sur $a'c'$; je dis : 1° que $m'p'$ est la trace verticale du plan central. — 2° que $m'p'$ est la longueur du paramètre de distribution, K. — 3° Que le point central, P, s'obtiendra en portant sur la génératrice une longueur $CP = c'p'$. — En effet, soit α l'angle

---

Problème. — Inscrire sur 3 droites concourantes SA. SB. SC, une droite ayant des segments donnés.





Soient $a.b.c$, la droite et les segments de cette droite. — Sur SA portons la droite donnée abc en $S.b'.a'$. — (Le point a' répondant à A est placé le plus loin du point S) — Par b' menons une parallèle $b'b''$ à SC — et joignons $b''a'$. Nous aurons en $a'b''c''$ la direction de la droite cherchée. — Il ne restera plus qu'à la mettre de longueur par un déplacement parallèle ; ce qui se fera, en prenant $c''a_2 = ca$, et menant par a_2 la parallèle $a_2 a_1$ à SC.

On aura en $a_1 b_1 c_1$ la droite demandée.

$a'm'p'$, c'est-à-dire l'angle du plan tangent en A, avec le plan $M'P'$; on aura, en appelant x la distance AP égale à $a'p'$

$$a'p' = x = m'P' \operatorname{tg}\alpha .$$

Donc, si nous faisons $m'P' = K$, on aura :

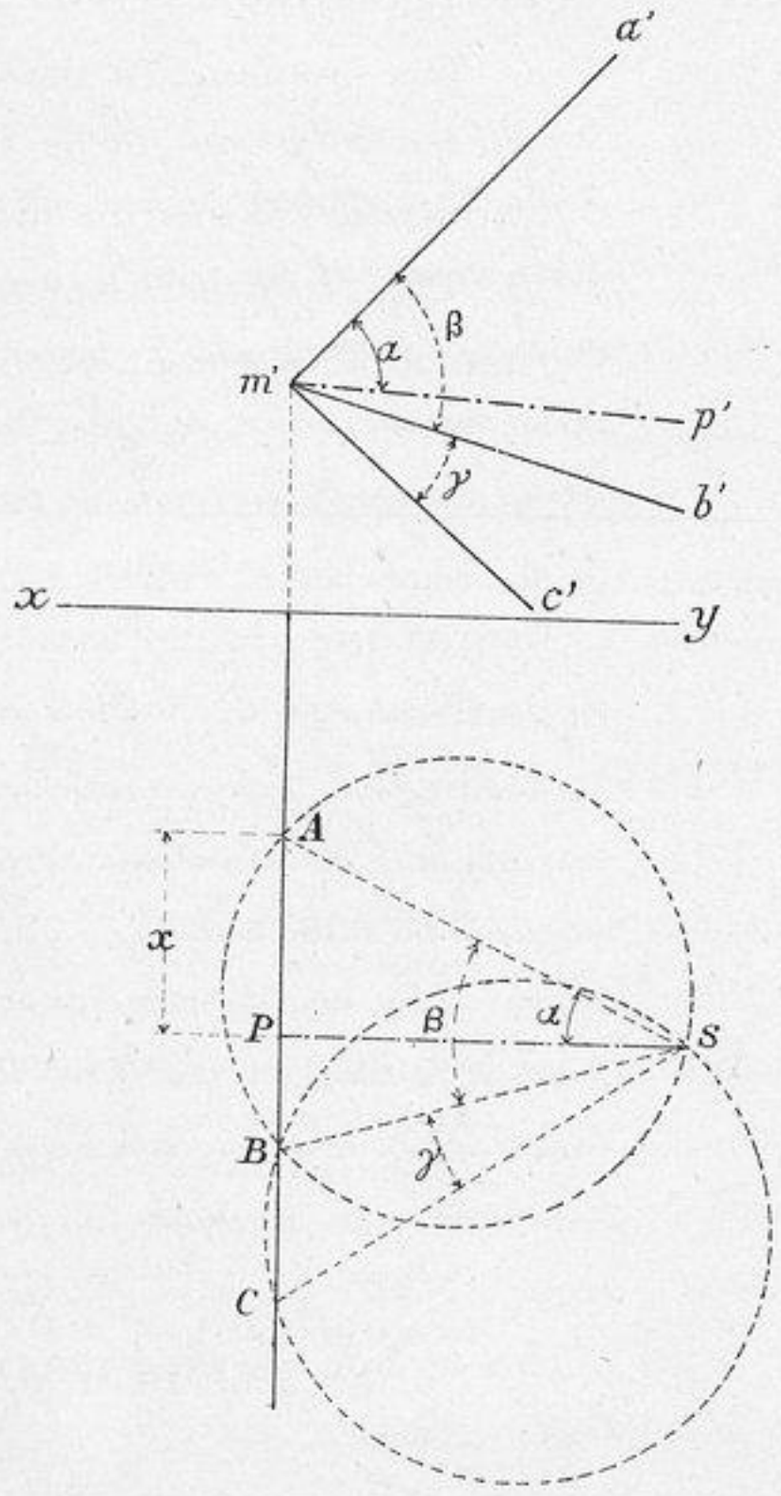
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{K} ,$$

ce qui est la formule de Chasles.

Comme il en est de même pour les 3 autres angles formés par les 3 plans tangents donnés, on en conclut que $m'p'$ est le paramètre de distribution, que P est le point central et que $m'p'$ est la trace verticale du plan central.

La formule de Chasles nous permettra de trouver le plan tangent en tout autre point, ce qui démontre le théorème.

Autre solution.



Soient ABC, 3 points pris sur la génératrice, et $m'a'$, $m'b'$, $m'c'$ les traces verticales des plans tangents en ces 3 points. — Soient β et γ les angles formés par ces plans entre eux.

Sur AB décrivons un segment capable de l'angle β, et sur BC un segment capable de l'angle γ. Ces 2 arcs de cercle se coupent en S. Abaissons SP perpendiculaire sur AC.

Je dis : 1° que P est le point central ;

2° que PS est le paramètre de distribution K ;

3° que l'angle PSA est l'angle α du plan central et du plan tangent en A, ce qui permet, en menant sur le plan vertical la trace $\overline{m'p'}$ faisant un angle α avec la trace $\overline{m'a'}$, d'obtenir la trace verticale du plan central

En effet, on a sur le plan horizontal

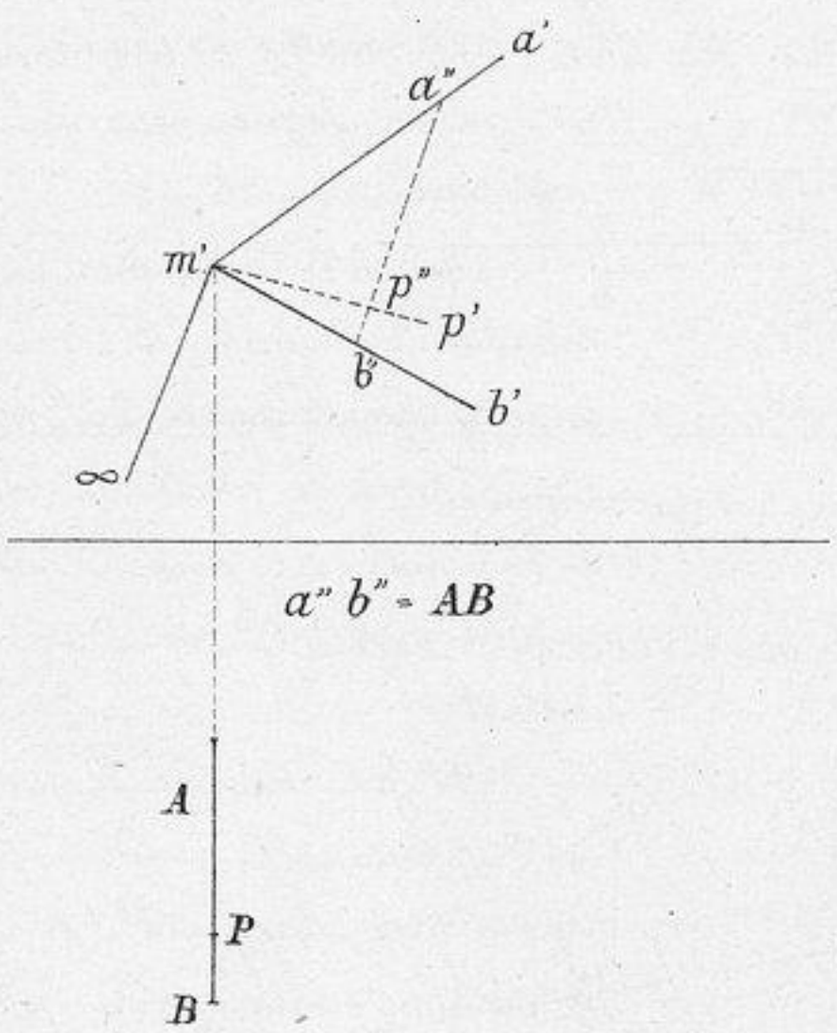
$$\overline{FA} = x = PS \cdot tg\,\alpha \text{ , d'où}$$

$$tg\,\alpha = \frac{x}{\overline{FS}}$$, ce qui est la formule de chasles, applicable pour les 2 autres plans tangents.

La construction est donc justifiée.

Remarque. La première construction est plus facile à appliquer sur une épure. — En reportant sur une bande de papier les trois distances A.B.C, on arrive rapidement, sans construction géométrique à l'inscrire entre les 3 traces m'á – m'b' – m'c'.

Théorème. — Deux surfaces gauches se raccordent tout le long d'une génératrice, c'est-à-dire ont mêmes plans tangents en tous les points de cette droite, lorsqu'elles ont 3 plans tangents communs en 3 points.



En effet, puisque 3 plans tangents en 3 points suffisent pour déterminer tous les autres, il en résulte que les deux surfaces auront même point central, même paramètre, et par suite mêmes plans tangents en tous les points. C.q.F.D.

Remarque 1. — Parmi ces 3 plans on peut compter le plan tangent à l'infini.

En effet, la connaissance du plan tangent à l'infini entraîne celle de la direction du plan central, qui, nous le savons, lui est perpendiculaire. Si nous refaisons la construction graphique précédente, nous aurons: en m'a' la trace verticale du plan tangent en A; en m'b' celle du plan tangent en B; en m'∞ celle du plan tangent à l'infini.

La trace verticale du plan central

sera donc $m'p'$ perpendiculaire à $m'\infty$.

On inscrira entre les droites $a'm'$ et $b'm'$ une sécante $a''b''$ perpendiculaire à $m'p'$ et égale en longueur à AB.

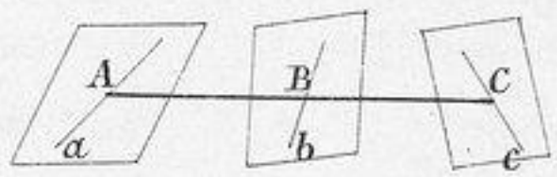
On aura en $m'p''$ le paramètre K. Puis, reportant la longueur $b''p''$ en BP, cela donnera le point central.

Remarque 2.— Deux surfaces gauches ayant mêmes plans tangents en 2 points d'une génératrice et même plan tangent à leur cône directeur, ou même plan directeur, se raccorderont tout le long de cette génératrice, puisque ces plans sont parallèles au plan tangent à l'infini.

Surfaces gauches de raccordement.

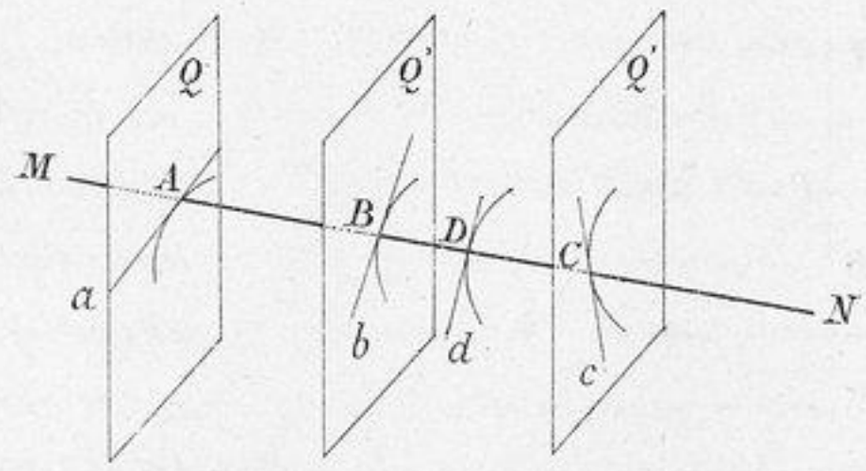
1° Hyperboloïde de raccordement.

Soient A, B, C, 3 points d'une génératrice et 3 droites Aa, Bb, Cc, passant par ces points et situés dans les 3 plans tangents.



Ces 3 tangentes définissent, si elles ne sont pas parallèles à un même plan, un hyperboloïde de raccordement

2°. Paraboloïde de raccordement.



Si nous choisissons les 3 tangentes parallèles à un même plan,

ce qui sera facile en prenant comme directrices 3 sections faites dans les plans tangents, par 3 plans parallèles Q, Q', Q" nous aurons un paraboloïde.

Si les plans Q, Q', Q" sont obliques à la génératrice, le paraboloïde sera oblique. Mais si ces plans sont perpendiculaires à la génératrice, le paraboloïde sera droit, puisqu'il aura un plan Directeur Q' perpendiculaire à la droite MN, qui pour lui sera une directrice

Plans Directeurs de tout paraboloïde de raccordement.

Le 1er. plan directeur sera le plan Q' auquel sont parallèles les 3 tangentes choisies. L'autre sera le plan parallèle au plan tangent à l'infini sur la génératrice de raccordement. — Par conséquent tous les paraboloïdes de raccordement ont un même plan directeur, qui est ce plan tangent à l'infini.

Conséquences. — Pour définir un paraboloïde de raccordement on prendra comme directrices 2 tangentes à la surface en deux points de la génératrice, c'est-à-dire une droite dans chacun des 2 plans tangents. Et comme plan directeur le plan tangent à l'infini, c'est-à-dire soit le plan directeur de la surface, si elle est à plan directeur; soit le plan tangent au cône directeur.

Si l'on veut un paraboloïde droit, on prendra les tangentes directrices perpendiculaires à la génératrice.

Paraboloïde des Normales.

Prenons (figure précédente) le paraboloïde de raccordement quand il est droit. Les droites Aa, Bb, Cc, et toutes les génératrices du 2e. système, telles que Dd sont tangentes à la surface et, de plus, sont perpendiculaires à la génératrice MN. Si l'on faisait tourner tout le paraboloïde d'un angle droit autour de MN comme charnière, ces tangentes deviendront les normales de la surface aux différents points A B C D . . . . de la génératrice.

Donc: Les normales aux différents points d'une génératrice d'une surface gauche forment un paraboloïde que l'on nomme le paraboloïde des normales.

Ligne de Striction.

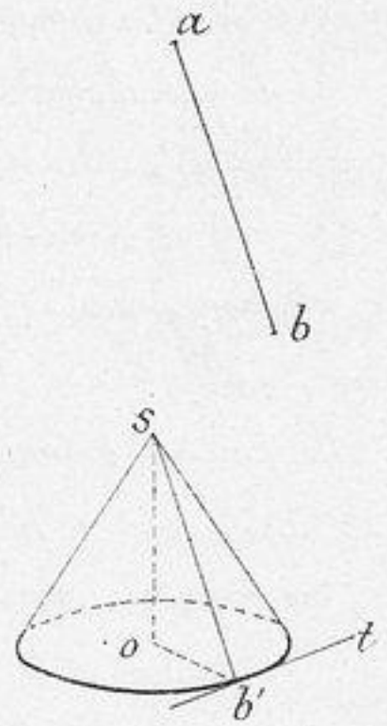
La ligne de Striction d'une surface gauche est le lieu géométrique des points centraux de cette surface.

C'est le lieu des points de tangence des plans tangents perpendiculaires aux plans tangents à l'infini.

Si la surface est à plan directeur, c'est le lieu des contacts des plans tangents perpendiculaires à ce plan directeur.

Théorème. — Dans les surfaces à plan directeur horizontal ou à cône directeur de révolution, dont l'axe est vertical, la ligne de Striction est la ligne de contour apparent de la surface sur le plan horizontal.

Pour les surfaces à plan directeur, cela résulte de ce qui précède : Démontrons-le pour les surfaces à cône directeur de révolution.



Soit ab une génératrice et Sb' la génératrice correspondante du cône directeur. Le plan tangent Sb't au cône est parallèle au plan tangent à l'infini (plan asymptotique).

Or, le cône étant de révolution, le plan projetant la génératrice Sb' sur le plan de base, est perpendiculaire au plan tangent ; il en est donc de même pour la génératrice ab de la surface, c'est-à-dire que le plan mené par cette droite, perpendiculairement au plan asymptotique est perpendiculaire au plan horizontal. C'est donc un plan de contour apparent. Mais ce plan est le plan central et le point central en est le point de contact. Donc le lieu des points centraux est la ligne de contour apparent de la surface. C.Q.F.D.

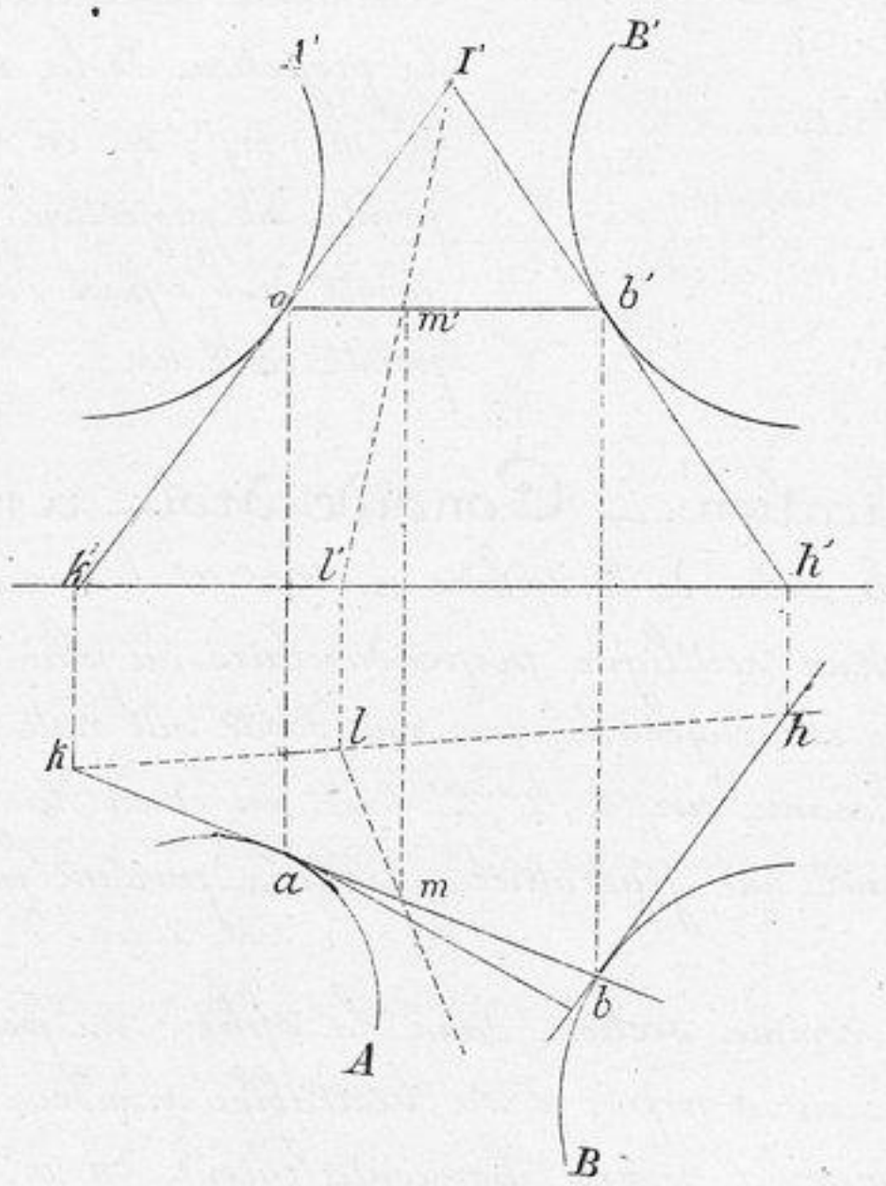
Développable asymptote d'une surface gauche.

C'est la surface enveloppe des plans asymptotiques de la surface, c'est-à-dire de ses plans tangents à l'infini.

On voit que la surface gauche et sa développable asymptote ont même cône directeur.

Application. — Mener le plan tangent en un point m m' d'une surface gauche à plan directeur, définie par 2 courbes directrices AA' et BB'.

Supposons le plan directeur horizontal. Soit ab, a'b' une génératrice obtenue en coupant les 2 directrices par un plan horizontal. Soit m m' un point sur cette génératrice.



Le paraboloïde de raccordement aura pour plan directeur le plan horizontal. On pourra lui prendre comme directrices les 2 tangentes ak, a'k' et bh, b'h', aux deux directrices. — Dès lors nous rentrons pour le paraboloïde dans un problème connu.

On joindra m' au point de divergence I' en projection verticale.

On prendra la trace horizontale kh, k'h' du paraboloïde. — On aura la génératrice du 2e système m'l', ml. Le plan tangent est défini par la génératrice ma, m'a' et ml, m'l'.

Remarque. Au lieu de prendre pour directrices du paraboloïde les 2 tangentes aux courbes, on aurait pu prendre 2 droites de front des plans tangents en aa' et bb'. Le 2e plan directeur eût été le plan vertical, et l'on aurait eu aussi un point de divergence en projection horizontale, ce qui aurait pu apporter des simplifications.

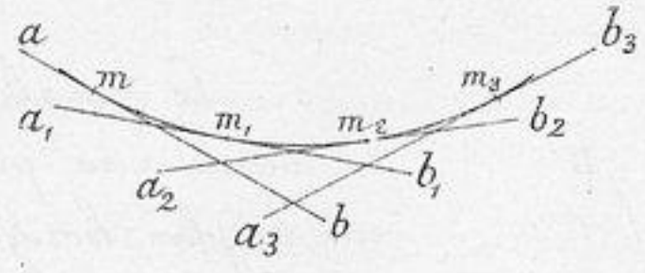
Recherche du Point central.

Dans le cas actuel, c'est le point de la génératrice pour lequel le plan tangent est perpendiculaire au plan horizontal.

On menera donc le plan projetant horizontalement la droite ab, a'b',

et l'on cherchera le point où il est tangent. (Problème connu).

On sait, de plus, que c'est un point du contour apparent horizontal de la surface ; on pourra donc, en prenant l'enveloppe des génératrices en projection horizontale, déterminer ce contour ; ce qui donnera la projection de la ligne de striction m, m_1, m_2 ; et en remontant des points en projection horizontale aux points de l'espace, on aura tous les points centraux.



2e Application. — Conoïde droit à noyau sphérique.

Soit OO' le centre de la sphère, — z, z'', z' l'axe du conoïde, c'est-à-dire sa directrice rectiligne perpendiculaire au plan horizontal.

La surface est engendrée par une droite qui reste horizontale, et qui se déplace en glissant sur z, z'', z' tout en étant tangente à la sphère.

Pour obtenir une génératrice, coupons par un plan horizontal $a'm'n'$.

Il donne comme section dans la sphère un petit cercle projeté horizontalement en onp, à sa véritable grandeur. — Il coupe l'axe en un point a' projeté horizontalement en a, z, pied de l'axe.

Menons les 2 tangentes zn, zp au petit cercle, et nous aurons en an, $a'n'$ et ap, $a'p'$, 2 génératrices de la surface

Plan tangent en un point $m\,m'$.

Prenons pour directrices d'un paraboloïde de raccordement : 1° l'axe du conoïde. 2° Une droite quelconque du plan tangent à la sphère en $n\,n'$. (Puisque le plan tangent à la sphère en $n\,n'$ l'est aussi au conoïde). — Prenons de préférence la ligne de front de ce plan tangent, c'est-à-dire la tangente $n't'$, nt, au petit cercle de front passant par le point $n\,n'$.

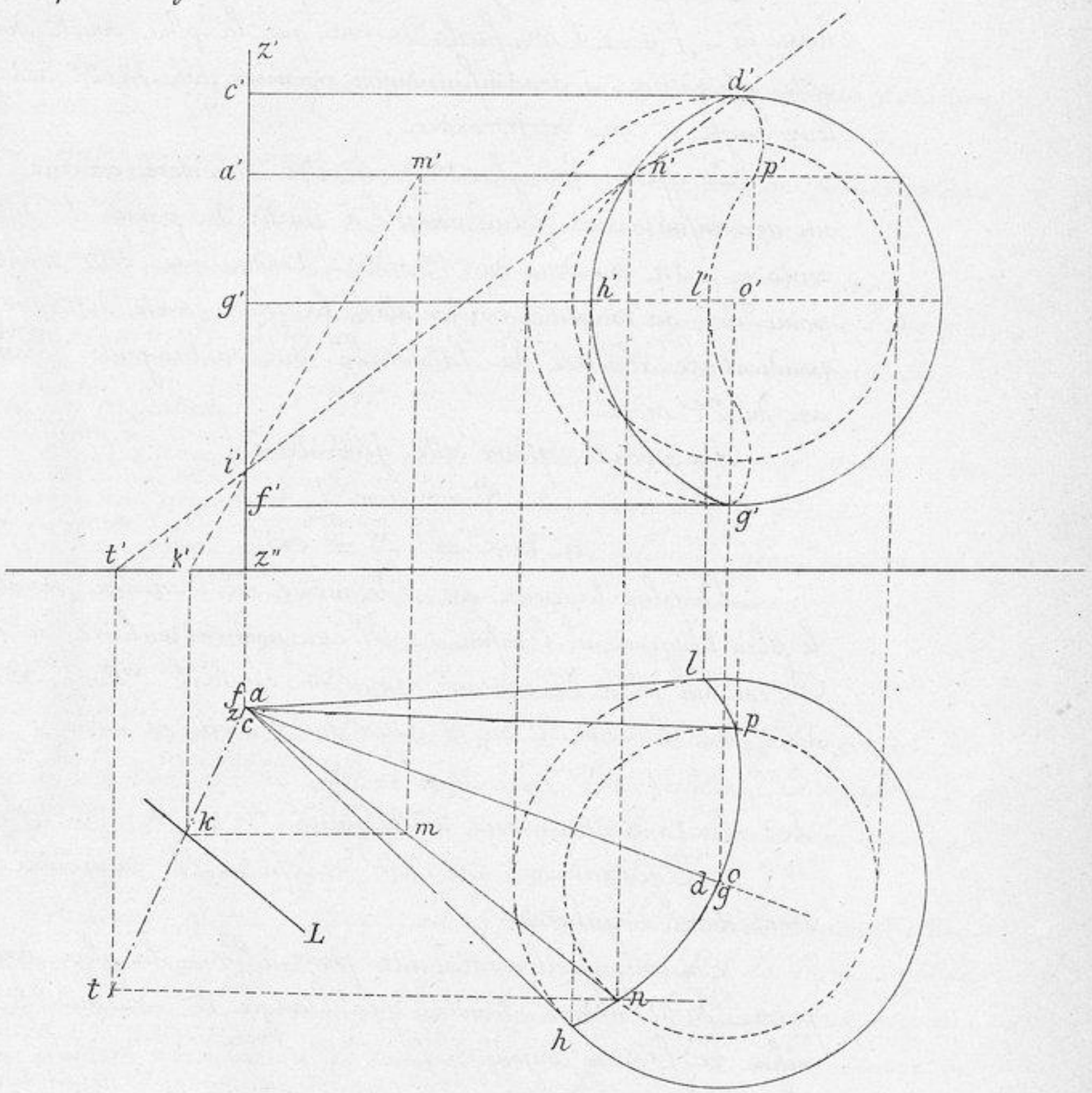
Le plan horizontal est le 1er plan directeur du paraboloïde ; et

le plan vertical, grâce au choix de cette tangente de front, en est le second.

La trace horizontale du paraboloïde est $tz - t'z''$.

Le point de divergence en projection verticale est I'. On a donc la génératrice de 2e. système du point m m' en $m'i'k' - mk$.

En menant par la trace horizontale K de cette génératrice, une parallèle KL à la génératrice a m, on aura la trace horizontale du plan tangent.



Ligne de Striction.

C'est l'axe π, π'', π' du Conoïde.

Génératrices singulières.

On nomme ainsi des génératrices qui ont le même plan tangent en tous leurs points. — D'après la formule de Chasles, elles seront caractérisées par ce fait que le paramètre de distribution K y doit être nul ou infini.

Or, prenons la génératrice la plus haute cd — c'd', et la plus basse fg — f'g' ; il est facile de voir que la plus courte distance p de cette génératrice à son infiniment voisine est du 2e. ordre tandis que leur angle σ est du 1er. ordre.

En effet : l'angle σ peut être considéré comme mesuré par un arc infiniment petit compté à partir du point d sur la courbe de contact, on est donc du 1er. ordre, tandis que, cette courbe ayant au point d, sa tangente horizontale, la plus courte distance est la perpendiculaire abaissée de la courbe sur sa tangente, c'est-à-dire est du 2e. ordre.

On a donc, pour cette génératrice,

$$K = \lim. \frac{p}{\sigma} = 0 ,$$

$$\text{et } tg\,\alpha = \frac{x}{K} = \infty .$$

Le plan tangent est le même en tous les points ; c'est aussi le plan tangent à l'infini. — Il est perpendiculaire au plan vertical. C'est un plan de contour apparent vertical. Pour $x = 0$, c'est-à-dire pour le point c' ou f' situé sur l'axe, on aura :

$$tg\,\alpha = \frac{0}{0} .$$

Le plan tangent y est indéterminé.

Les génératrices zh — g'h' et zl — g'l' tangentes à l'équateur, sont aussi singulières.

On voit facilement que pour elles, la plus courte distance, p, est du 1er. ordre, tandis que l'angle σ est du 2e. — Donc, K est infini et l'on a toujours :

$$tg\,\alpha = \frac{x}{\infty} = 0 \quad , \text{ sauf pour } x = \infty .$$

Le plan tangent est partout le même qu'au point central. Il est perpendiculaire au plan horizontal ; c'est un plan de contour apparent horizontal.

Héliçoïdes réglés.

Avant d'aborder la Théorie des Héliçoïdes, nous étudierons quelques propriétés des surfaces à plan directeur horizontal, ou à cône directeur de révolution et à axe vertical, définies par leur ligne de striction.

Surface gauche à plan directeur, définie par sa ligne de striction.

Théorème de M. O. Bonnet. — Dans une surface à plan directeur horizontal, dont on connaît la ligne de striction :

1°. La projection horizontale d'un point m d'une génératrice ;

2°. Le centre de courbure de la projection horizontale de la ligne de striction, au point où la génératrice précédente est tangente à cette ligne en projection ;

3°. La trace horizontale de la tangente à la ligne de striction de l'espace, au point où elle est rencontrée par la génératrice ;

4°. Le point où la trace horizontale du plan tangent rencontre la normale à la ligne de striction projetée horizontalement :

Sont sur un même cercle.

Nous savons que lorsque le plan directeur est horizontal, la ligne de striction est le contour apparent horizontal de la surface.

Soit AB — A'B' la ligne de striction ; les génératrices seront donc tangentes à cette ligne, en projection horizontale.

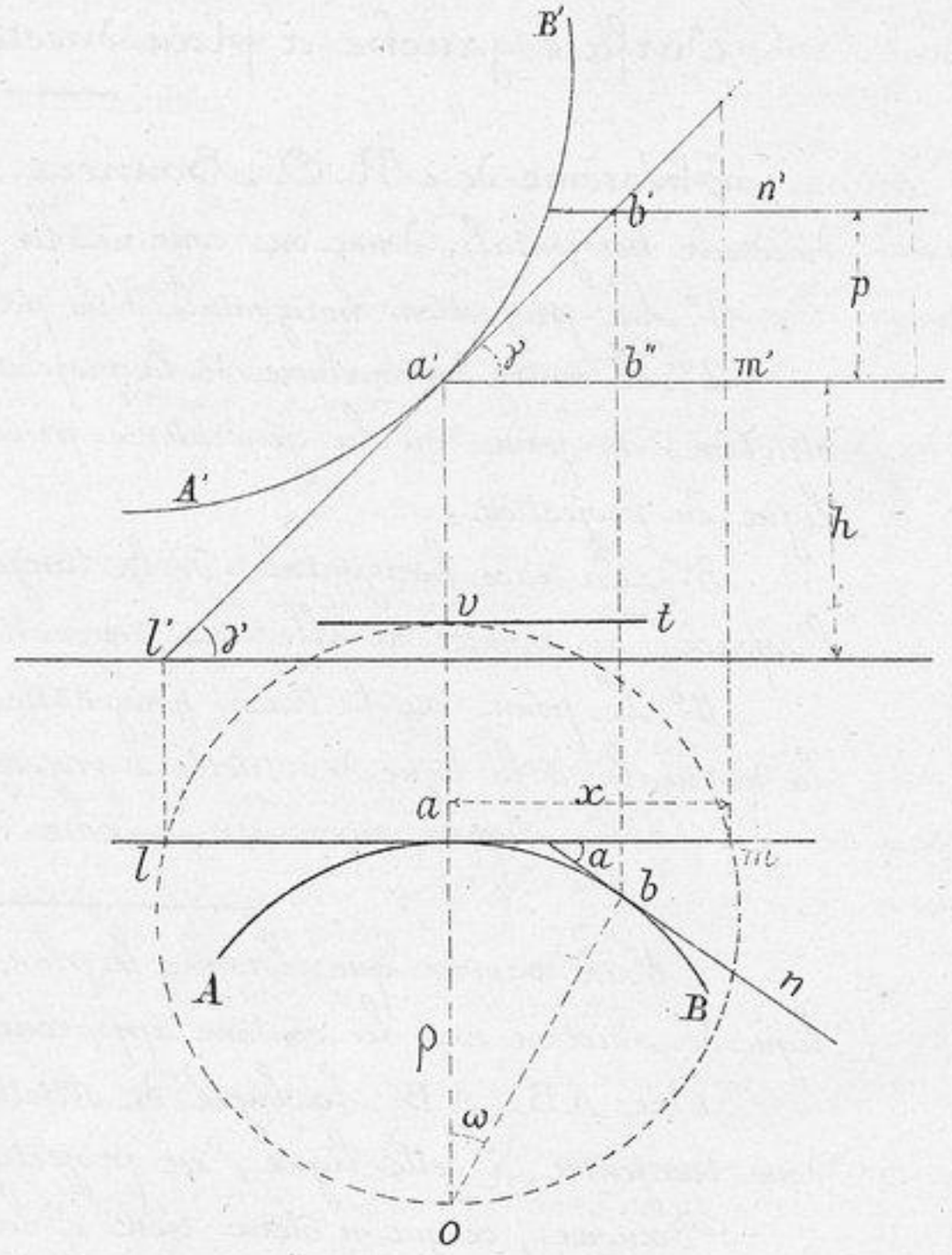
Prenons, ce qui n'ôtera rien à la généralité de la démonstration, le point aa' pour lequel la tangente est parallèle à la ligne de terre, car si le point est quelconque on pourra toujours prendre un nouveau plan vertical parallèle à la tangente en ce point. Nous aurons en am, a'm' une génératrice. — La génératrice infiniment voisine serait bn, b'n'. — Menons les normales ao — bo, ce qui donne en o, le centre de courbure. — Prenons la trace horizontale ll' de la tangente à la ligne de striction au point aa'.

Supposons que le plan tangent en m m' soit construit ; soit vt

sa trace horizontale parallèle à am. — Et soit v le point de cette trace situé sur le prolongement de la normale oa.

Le point a étant le point central, le plan central, en a, est perpendiculaire au plan directeur ; — c'est le plan projetant horizontalement am.

Le point m est à une distance x, du point central, mesurée en vraie grandeur en am.



Soit α l'angle du plan tangent en m avec le plan central, il est facile de voir que si h est la cote du point $a\,a'$, on aura :

$$\overline{av} = h \cdot \operatorname{tg} \alpha .$$

Or, d'après la formule de Chasles, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{\kappa}$

donc : $$\overline{av} = h \times \frac{x}{\kappa} .$$

Je dis que les 4 points l, v, m, o sont sur un même cercle; il suffit pour cela de démontrer que l'on a :

$$\overline{av} \times \overline{ao} = \overline{al} \times \overline{am} .$$

Nous évaluerons ces quantités et nous prouverons que nous arrivons à une identité.

Soit γ l'angle de la tangente $a'l'$, avec la ligne de terre, on aura :

$$\overline{al} = h \operatorname{cotg} \gamma \quad , \; am = x \quad , \; av = \frac{hx}{K} .$$

$\overline{ao} = \rho$. (rayon de courbure) et par suite, en remplaçant dans les produits,

$$\frac{hx}{K} \times \rho = h . \operatorname{cotg} \gamma \times x .$$

Supprimons les facteurs communs, il suffira de prouver que :

$$\frac{\rho}{K} = \operatorname{cotg} . \gamma \quad , \text{ ou que } K = \rho . \operatorname{tg} . \gamma .$$

Evaluons le paramètre de distribution K ; on a :

$$K = \operatorname{Lim} \frac{P}{\sigma} .$$

Sur la figure : $p = \overline{b'b''} = \overline{a'b''} . \operatorname{tg} \gamma$.

En négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur, on peut prendre

$$a'b'' = \text{arc } \overline{ab} = \rho \omega .$$

L'angle σ des 2 génératrices infiniment voisines se mesure en projection horizontale et est égal à ω.

On aura donc :

$$K = \frac{P}{\sigma} = \frac{\rho \omega . \operatorname{tg} \gamma}{\omega} = \rho . \operatorname{tg} \gamma . \text{ ce qu'il fallait prouver}$$

Nous obtenons une identité et le théorème est démontré.

Remarque. — Le paramètre de distribution K a pour expression

$$K = \rho . \operatorname{tg} \gamma ,$$

ρ et γ ayant le sens que nous venons de voir dans la démonstration précédente.

Discussion de l'Expression $K = \rho \operatorname{tg} \gamma$.

1°. Pour $\operatorname{tg} \gamma = 0$, et $\gamma = 0$, c'est-à-dire pour le point le plus haut ou le plus bas de la ligne de striction. — On aura :

$$K = 0 \quad , \text{ et } \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{K} = \infty .$$

Le plan tangent sera le même en tous les points et à l'infini. On aura une génératrice singulière.

2°. Supposons que l'on ait : $tg\,\gamma = \infty$.

Pour ce point, la tangente à la ligne de striction dans l'espace est verticale ; — mais alors la projection horizontale présente un rebroussement, et ρ peut être nul : on aurait dans ce cas :

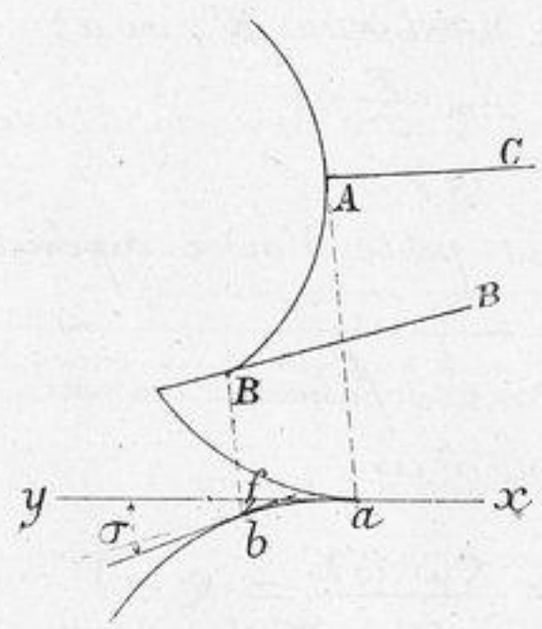
$$K = 0 \times \infty \quad ; \text{ forme indéterminée. Est-ce possible?}$$

Soit AB la courbe de l'espace ; — ab sa projection tangente en a, avec un rebroussement à la trace $\overline{XY}$ du plan osculateur.

Soit AC et BD, 2 génératrices de la surface, leur distance est mesurée par l'arc $AB = \theta$ de l'espace et est du 1er ordre ; leur angle σ est mesuré horizontalement par l'angle de XY et de la tangente au point b.

Abaissons bf perpendiculaire sur XY.

On aura : $bf = ab \times \sigma$ et $\sigma = \frac{bf}{ab}$.



bf est du 3e ordre. C'est la distance d'un point d'une courbe à son plan osculateur.

ab, projection de AB, est du 2e ordre, puisque la tangente en A est verticale. — ab est la distance d'un point de la courbe à sa tangente. — Donc σ est du 1er ordre, et le rapport $K = \frac{p}{\sigma}$ est fini. — Donc :

La génératrice répondant au point où la tangente à la ligne de striction est verticale, n'est par singulière.

3°. $\rho = \infty$. — La ligne de striction présente une inflexion en projection horizontale. Le plan osculateur de la courbe de l'espace est vertical ; — $\rho = \infty$ $tg\,\gamma$ est fini, et

$$K = \rho\, tg\,\gamma = \infty \quad — \quad tg\,\alpha = \frac{x}{K} = 0.$$

Le plan tangent est le même en tous les points et au point central. — La génératrice est encore singulière.

Surfaces à Cône directeur de révolution, définies par leur ligne de Striction.

Expression du Paramètre de distribution.

Supposons que l'axe du cône soit vertical : — On sait que dans ce cas, la ligne de striction est encore la ligne de contour apparent horizontale.

Soit β l'angle constant des génératrices avec le plan horizontal, et γ l'angle formé avec le plan horizontal par la tangente à la ligne de striction au point où elle rencontre une génératrice ; — ρ le rayon de courbure de la ligne de striction en projection horizontale. Je dis que l'on aura : $K = \rho\,(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma)$.

Pour le démontrer, supposons le plan vertical parallèle à la génératrice considérée.

Soit AB, A'B' la ligne de striction ; aa' un point de cette ligne ;

at, a't' la tangente en ce point ; γ son angle avec le plan horizontal ;

am, a'm' une génératrice, et β son angle avec le plan horizontal.

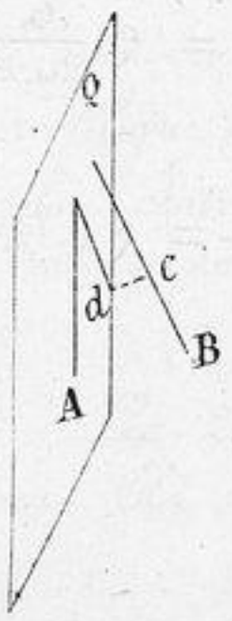
Il faut évaluer

$$K = \operatorname{Lim}.\frac{p \quad (\text{plus courte distance})}{\sigma \quad (\text{angle de 2 génératrices voisines})}.$$

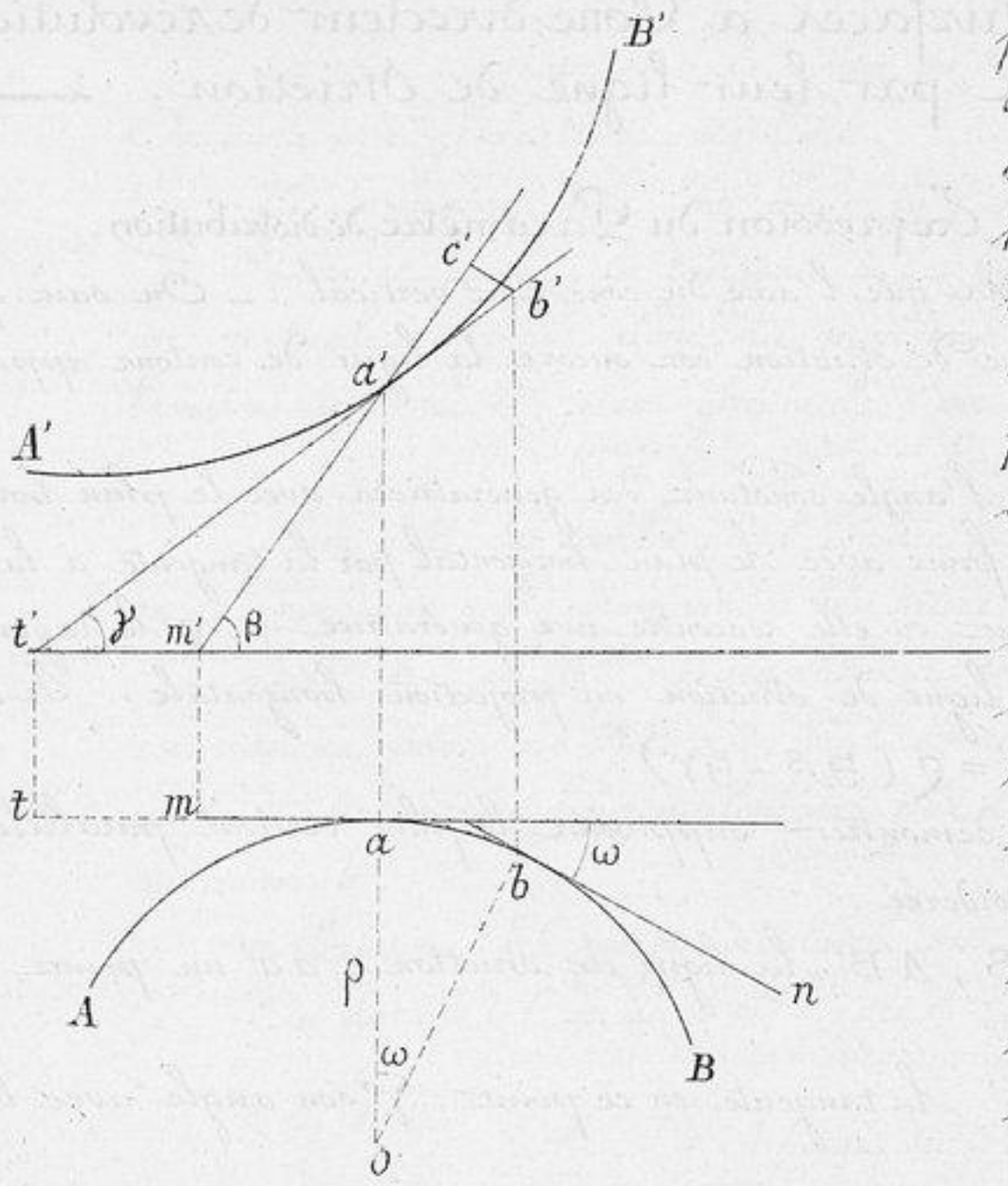
Soit bn la génératrice infiniment voisine, — ω leur angle en projection horizontale : Nous avons vu à l'occasion du rayon de courbure de l'hélice, que l'angle σ de l'espace avait pour expression :

$$\sigma = \omega . \cos.\beta .$$

Evaluons la plus courte distance p. Il suffit pour cela d'évaluer la distance d'un point C de l'une des droites, au plan Q mené par l'autre et parallèlement à la première.



Or, dans le cas actuel, le plan mené par la génératrice am d'm', parallèlement à la génératrice infiniment voisine est tangent à l'infini, et,



perpendiculaire au plan central ; par suite, comme ce dernier est le plan projetant horizontalement am, c'est le plan a'm' projetant verticalement la génératrice, et projeté tout entier suivant sa trace verticale m'a'.

Nous prendrons sur la génératrice infiniment voisine, le point b où elle rencontre les lignes de striction. Sa projection verticale sera b', située, en négligeant des infiniments petits d'ordre supérieur sur la tangente b't' au lieu d'être sur la courbe.

La perpendiculaire b'c' abaissée sur la projection verticale de la génératrice, est la plus courte distance cherchée.

On a : $\overline{b'c'} = \overline{a'b'} \cdot \sin.(\beta-\gamma)$;

Mais $\overline{a'b'} = \dfrac{\overline{ab}}{\cos\gamma}$, et par suite,

$$\overline{b'c'} = p = \frac{\overline{ab} \cdot \sin(\beta-\gamma)}{\cos.\gamma}.$$

Mais $\overline{ab} = \omega\rho$; donc :

$$K = \frac{p}{\sigma} = \frac{\omega\rho \cdot \sin(\beta-\gamma)}{\cos.\gamma \times \omega \cos.\beta} = \rho \cdot \frac{\sin.(\beta-\gamma)}{\cos.\beta.\cos\gamma}$$

$$K = \rho \cdot \frac{\sin\beta.\cos\gamma - \cos.\beta.\sin\gamma}{\cos.\beta.\cos.\gamma} = \rho(tg\beta - tg\gamma).$$

C. Q. F. D.

Discussion. — 1°. $tg.\beta = tg\,\gamma$.

La génératrice est tangente à la ligne de striction.

$K = 0$. Le plan tangent est le même en tous les points et à l'infini. La génératrice est singulière.

Pour le point central, le plan tangent est indéterminé.

2°. $tg.\beta = \infty$. Impossible, puisque l'angle β est constant.

3°. $tg.\gamma = 0$. La tangente à la ligne de striction est verticale. Cette ligne présente un rebroussement en projection horizontale, et ρ peut être nul, ce qui donnerait $K = 0 \times \infty$. (forme indéterminée) — On verra comme ci-dessus, que p et σ sont de même ordre et que $K = Lim.\frac{p}{\sigma}$ a une valeur finie. On n'a donc par pour ce point de génératrice singulière.

4°. $\rho = \infty$.

La courbe de striction présente une inflexion en projection horizontale. Son plan osculateur est vertical.

$$K = \infty \qquad tg\,\alpha = 0 \ :$$

Le plan tangent est le même en tous les points et au point central. La génératrice est singulière.

Plan tangent en un point cc' d'une Génératrice.

Soit md, la trace horizontale de ce plan. Elle passera par la trace horizontale m de la génératrice. — Abaissons du point c, projection du point, une perpendiculaire sur cette trace, et soit Q le point où elle rencontre la normale à la ligne de striction. — Soit O le centre de courbure, et ρ le rayon de courbure de la ligne de striction au point a. Calculons la distance $OQ = q$.

Si nous menons cd perpendiculaire sur mc, cette ligne peut être considérée comme la trace horizontale du plan $dc''f'$ qui déterminerait le rectiligne du dièdre formé par le plan projetant la génératrice (c'est le plan central) et par le plan tangent au point cc'. — Effectuons la construction connue qui donnerait cet angle α — Nous aurons, en appelant d, la cote du point cc' :

$$\overline{cd} = \overline{cf}.\,tg.\alpha = c''f'.\,tg.\alpha = d\,Cos.\beta.\,tg.\alpha .$$

Les 2 triangles cdm et acQ ont leurs côtés perpendiculaires. Ils sont semblables et donnent $\frac{\overline{aQ}}{\overline{mc}} = \frac{ac}{cd}$, d'où l'on tire :

$$a\overline{Q} = \frac{\overline{ac} \times \overline{mc}}{cd} = \frac{x.\mathrm{Cos}.\beta \times d.\mathrm{cotg}.\beta.}{d.\mathrm{Cos}.\beta.\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{x.\mathrm{cotg}.\beta}{\mathrm{tg}.\alpha}$$

Main d'après la formule de Chasles

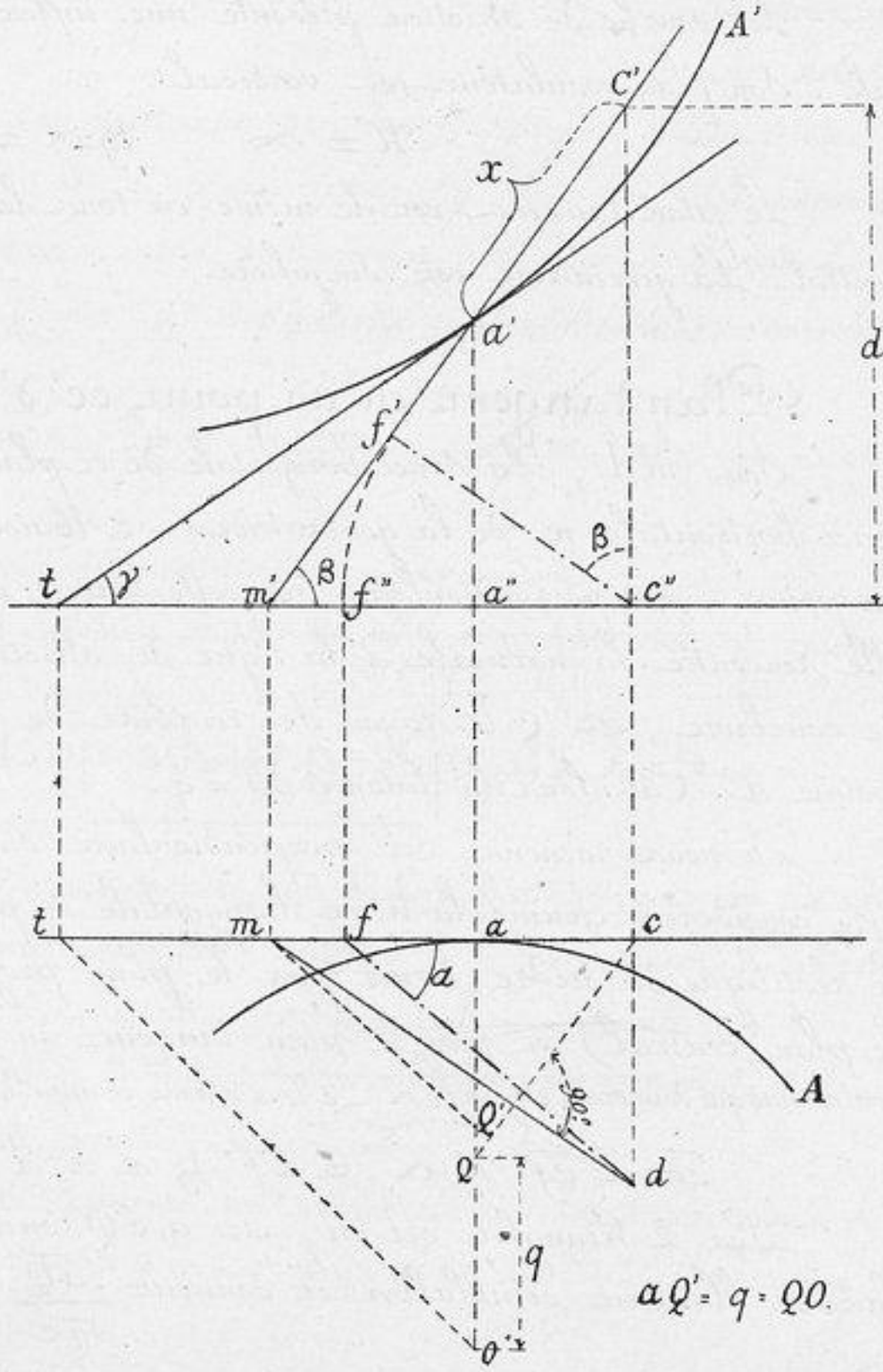
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{x}{K} \text{ et nous avons } K = \varrho(\mathrm{Tang}\beta - \mathrm{tg}\gamma)$$

par conséquent

$$aQ = \frac{x.\mathrm{cotg}.\beta}{\frac{x}{\varrho(\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}.\gamma)}} = \frac{\varrho(\mathrm{tg}.\beta - \mathrm{tg}.\gamma)}{\mathrm{tg}.\beta} = \varrho\left(1 - \frac{\mathrm{tg}.\gamma}{\mathrm{tg}.\beta}\right)$$

$$oQ = \varrho - aQ. = \varrho.\frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{\mathrm{tg}.\beta},$$

quantité constante pour tous les points d'une même génératrice.



Le point Q se nomme le Pôle de la génératrice am – La distance $oQ = q$ se nomme le paramètre de tangence.

On le construira géométriquement, en joignant au centre de courbure la trace t de la tangente à la ligne de striction, menant par la trace m de la génératrice une parallèle à la ligne ainsi construite, et prenant son intersection Q' avec la normale. – Reportant la distance a Q' de o en Q, on aura le Pôle.

En effet, il est facile de voir que

$$\frac{tg.\gamma}{tg.\beta} = \frac{a''m'}{a''t'} = \frac{am}{at} = \frac{aQ'}{ao},$$

et par suite : $\overline{aQ'} = c.\frac{tg.\gamma}{tg.\beta}$.

Ayant le pôle, les problèmes sur les plans tangents deviennent très-simples.

1°. Plan tangent par un point d'une génératrice.

On joint le Pôle de la génératrice et la projection du point. Puis on mène par la trace de la génératrice, une perpendiculaire sur la droite ainsi menée : on a la trace horizontale du plan tangent.

2°. Un plan contient une génératrice ; – Trouver le point où il est tangent.

Du pôle, on abaisse une perpendiculaire sur la trace du plan, et le point de rencontre avec la génératrice, donne le point de tangence, etc.

Héliçoïde gauche quelconque

C'est la surface engendrée par une droite entraînée dans un mouvement héliçoïdal, lorsque cette droite ne rencontre pas l'axe du mouvement.

Soit ab – a'b' la droite lorsqu'elle est de front, – et h le pas réduit du mouvement héliçoïdal ; Z – Z'' Z' l'axe du mouvement héliçoïdal.

Si nous menons la plus courte distance Za, de l'axe et de la droite, et si nous considérons le cylindre qui aurait Za pour rayon ; la droite est et restera tangente à ce cylindre, qui sera le noyau de la surface.

Son point de contact a a' décrira sur le cylindre une hélice a'c' de pas réduit h.

Cette hélice se projettera horizontalement suivant le cercle de base du cylindre noyau. Ce sera la ligne de contour apparent horizontal de la surface ; et comme celle dernière a son cône directeur de révolution et à axe vertical ; l'hélice a'c' est la ligne de striction de la surface.
Soit β l'angle de la droite mobile avec le plan horizontal, et soit γ, celui de l'hélice de striction.

h étant le pas réduit,
et $r = \overline{za}$ le rayon du cylindre noyau,
On aura $tg\,\gamma = \frac{h}{r}$.

Si l'on s'était donné le pas total H, on sait que l'on aurait eu $h = \frac{H}{2\pi}$.

Paramètre de Distribution.

Il sera le même pour toutes les génératrices, et fourni par la formule donnée pour les surfaces à cône directeur de révolution

$$K = r(tg\beta - tg\gamma) = r\left(tg\beta - \frac{h}{r}\right) = r\,tg\beta - h.$$

Si $tg\beta = tg\gamma$, alors $K = 0$ et la surface est développable. Ce serait le cas où la génératrice ab – a'b' serait tangente à l'hélice de striction.

Il faudrait que la distance r fut telle que l'on ait :

$$tg\beta = tg\gamma = \frac{h}{r},$$

ou $r = h.\,cotg.\,\beta$.

On peut construire graphiquement le paramètre de distribution K.
(Voir sur le croquis, la construction graphique des paramètres)

Plan tangent en un point m m' de l'héliçoïde gauche.

Soit m m' le point pris sur la génératrice de front ab – a'b'.

La surface est à cône directeur de révolution, et la construction à l'aide du pôle, peut s'appliquer.

Le centre de courbure est le pied n de l'axe.

Le paramètre de tangence sera :

$$q = r \cdot \frac{tg.\gamma'}{tg.\beta}$$

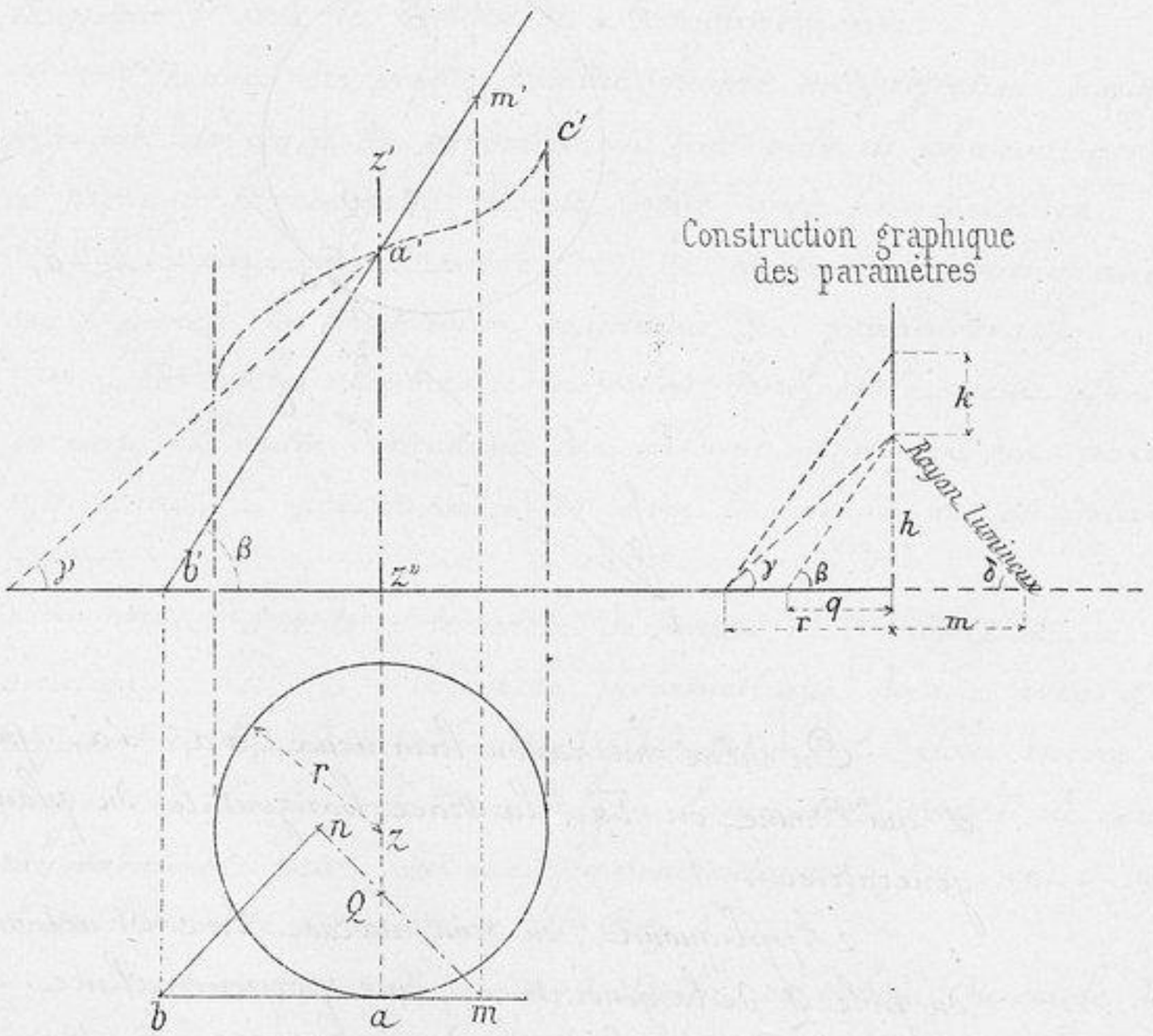
c'est-à-dire $tg.\gamma' = \frac{h}{r}$, donc :

$q = h . \cotg.\beta$ facile à construire graphiquement.

Le pôle Q s'obtiendra soit en portant $OQ = q = h \cotg.\beta$, soit en faisant la construction donnée plus haut. — On remarquera que le lieu des points Q est précisément le cercle de base du cylindre qui contiendrait l'hélice de striction de l'héliçoïde développable engendré par le plan a'b' projetant verticalement la droite donnée. (Voir héliçoïde développable)

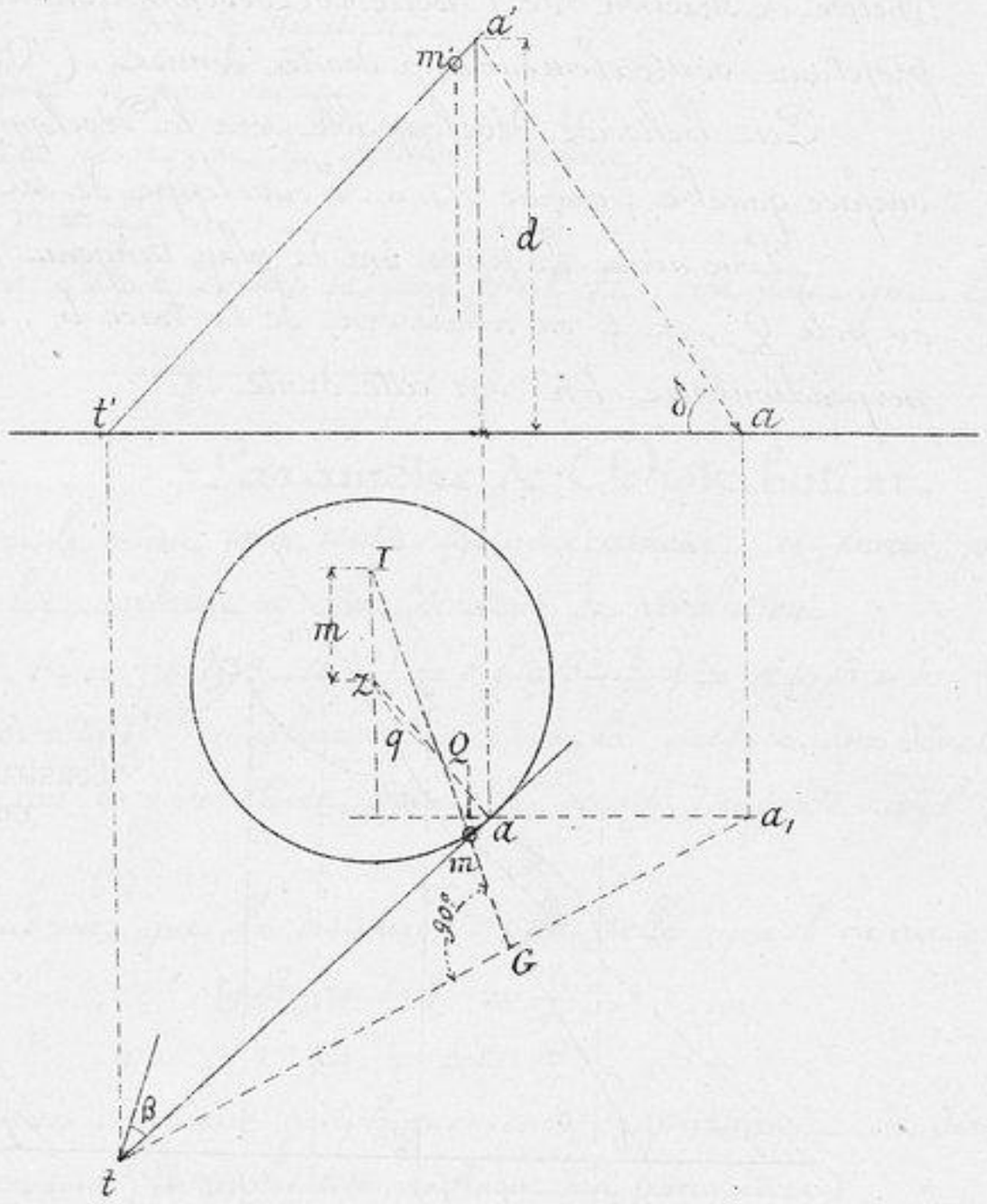
Cet héliçoïde développable sera la développable asymptote de la surface gauche, comme étant l'enveloppe de ses plans tangents à l'infini.

Pour avoir la trace bn du plan tangent, on joindra le point m au pôle Q, et l'on abaissera de la trace b, de la génératrice, une perpendiculaire bn sur cette droite.



Courbe d'ombre de l'Hélicoïde gauche.

Supposons les rayons lumineux parallèles entr'eux et parallèles au plan vertical, ce qui n'enlèvera rien à la généralité de la démonstration. — Soit δ leur angle avec le plan horizontal. — Soit $a\,a'$ un point sur l'hélice de striction. — at, $a't'$ une génératrice quelconque faisant l'angle β avec le plan horizontal.



On mène un rayon lumineux $a\,a_1$, $a'a'_1$ par le point $a\,a'$, ce qui donne en $\overline{ta}$ la trace horizontale du plan d'ombre de la génératrice.

Appliquons, en sens inverse, la construction précédente. Abaissons du pôle Q de la génératrice, une perpendiculaire sur ta, et nous aurons en $m\,m'$ le point de contact.

Cette construction facile peut encore être simplifiée.

Prolongeons en effet cette perpendiculaire GQ, jusqu'en I où elle rencontre la perpendiculaire menée par le centre sur la projection horizontale du rayon lumineux.

Je dis que ZI est une quantité constante.

En effet: Les triangles ZIQ et $ta a_1$ ont leurs côtés perpendiculaires, ils sont donc semblables et donnent:

$$\frac{\overline{IZ}}{\overline{ZQ}} = \frac{\overline{aa_1}}{\overline{ta_1}}.$$

Soit d la cote du point $a\,a'$, on aura $ZQ = q = h.\,\text{cotg}.\,\beta$. (Paramètre de tangence)

$$\overline{aa_1} = d\,\text{cotg}.\,\delta \quad \text{et} \quad \overline{at} = d\,\text{cotg}.\,\beta.$$

donc:
$$\overline{IZ} = \frac{d\,\text{cotg}\,\delta \times h.\,\text{cotg}.\beta.}{d\,\text{cotg}.\,\beta.} = h.\,\text{cotg}.\,\delta \ (\text{Constante})$$

La longueur $\overline{IZ} = m$, se nommera le paramètre d'ombre, et le point I sera le Centre de Rayonnement.

On aura des points d'ombre propre en projection horizontale en joignant le centre de rayonnement au pôle de chaque génératrice et prenant la rencontre de cette droite avec la génératrice.

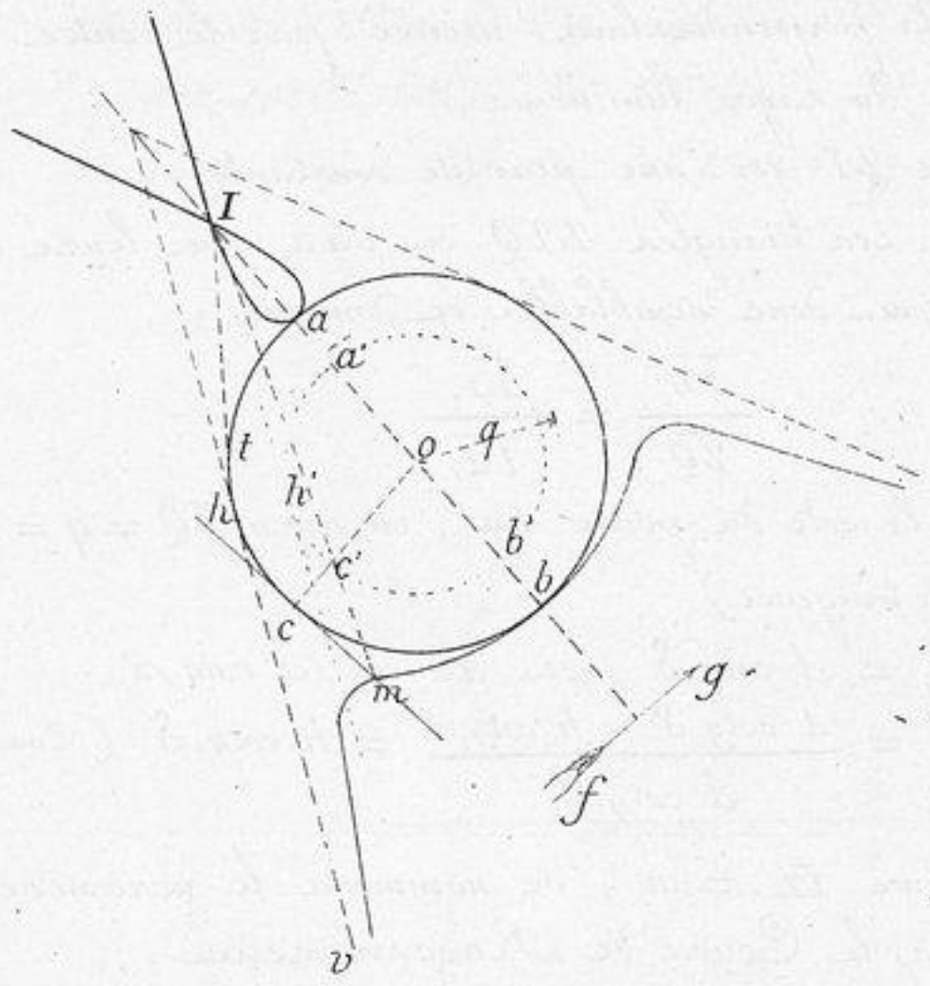
Le paramètre d'ombre, m, se construira graphiquement (voir sur l'épure, la construction graphique des paramètres).

La courbe d'ombre en projection horizontale peut affecter des formes différentes dépendant des valeurs relatives des paramètres, r, q et m: — Construisons-la dans le cas où m est plus grand que r.

Soit o a b, le cercle de rayon r, projection de l'hélice de striction. — a'c'b' le cercle paramétrique décrit avec q pour rayon, et lieu des pôles des génératrices. — Soit encore fg, la projection horizontale d'un rayon lumineux, et I le centre de rayonnement pris sur une perpendiculaire à fg, et o une Distance du centre $OI = m = h.\,\text{Cotg}\,\delta$.

Supposons que le point I tombe en dehors du cercle de striction. $(m > r)$.

On aura un point quelconque de l'ombre en prenant une



génératrice quelconque cm, — joignant le pôle c' de cette génératrice au centre de rayonnement et prolongeant en m jusqu'à la génératrice.

On voit que les points a et b situés sur le cercle de striction et sur la perpendiculaire OI au rayon lumineux appartiennent à la courbe, ainsi que le centre de rayonnement I. — Ce dernier point répond à la génératrice It menée par I tangente au cercle de rayon r.

Si l'on mène la tangente Ih' au cercle paramétrique, et si l'on considère la génératrice hv, parallèle à cette tangente, il y aura un point à l'infini sur cette droite. La courbe présentera la forme indiquée sur le croquis.

Si le point I est dans l'intérieur du cercle de rayon q, la courbe sera fermée, puisque la tangente Ih' ne sera plus possible.

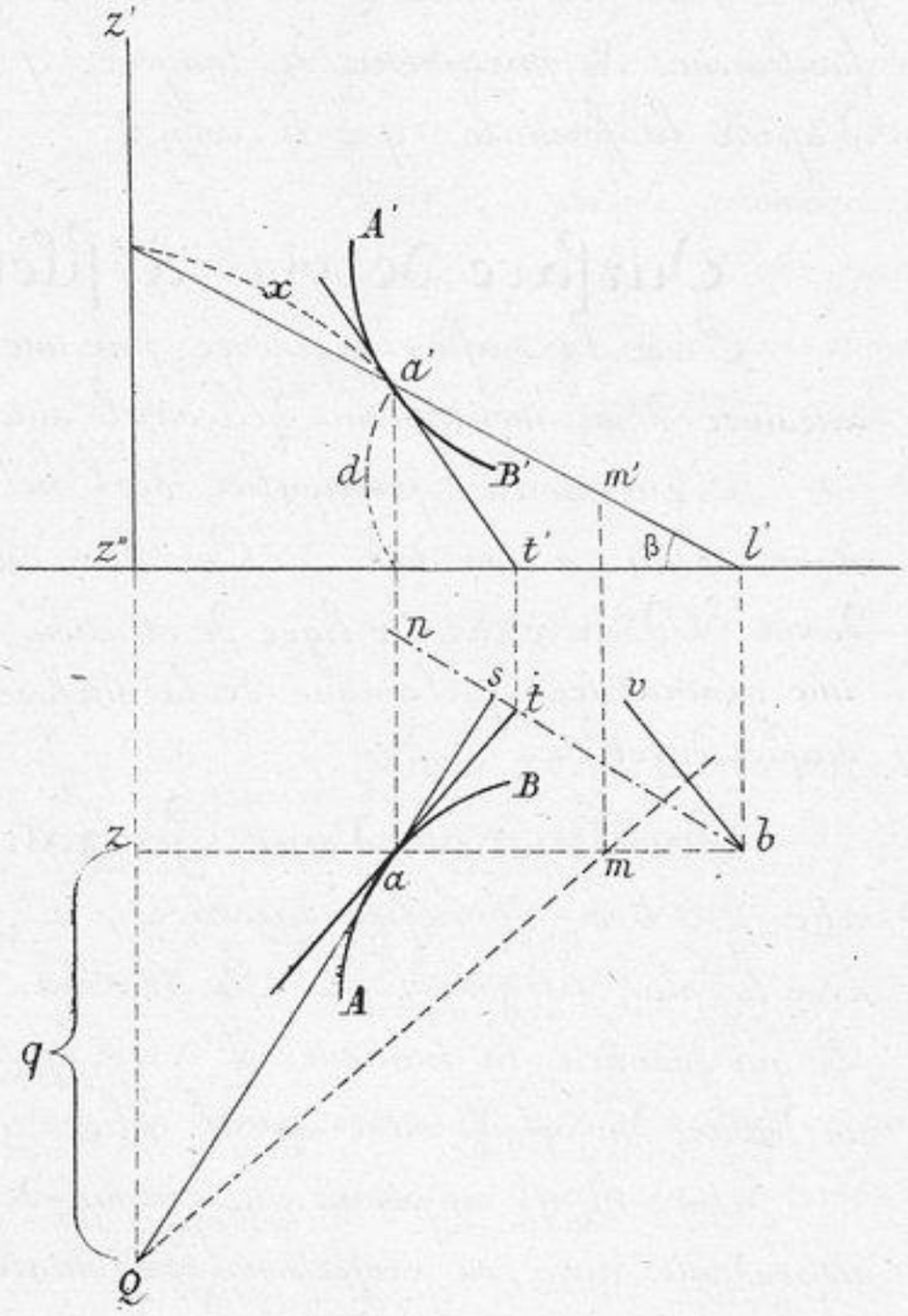
La courbe est symétrique par rapport à la droite OI perpendiculaire sur le rayon lumineux.

Surfaces à cône directeur de révolution dans le cas particulier où la ligne de striction est un axe perpendiculaire au plan horizontal.

La surface est encore à Cône directeur de révolution, mais sa ligne de striction est une droite verticale $zz''z'$. Il est nécessaire de donner une directrice, AB, A'B'. — Prenons la génératrice de front ab, a'b'. — Considérons: 1° le plan tangent au point a a' situé sur la directrice, et 2° le plan tangent en un point quelconque m, m'.

Au point a a', la trace b n du plan tangent passe par la trace b de la génératrice, et par celle, l, de la tangente à la directrice.

Abaissons du point a une perpendiculaire a s sur cette trace b n, prenons son intersection Q avec la perpendiculaire Z Q, menée par le pied de l'axe, sur la projection horizontale de la génératrice, et calculons Q Z.



Les deux triangles n a b, z a Q sont semblables comme ayant les côtés perpendiculaires et donnent : $\frac{zQ}{ab} = \frac{za}{an}$, d'où $zQ = \frac{ab \times za}{an}$;

Or : $ab = d\ \mathrm{Cotg.}\beta$ (En appelant d la cote du point a a').

$za = x\ \mathrm{Cos.}\beta. =$

En raisonnant comme ci-dessus, on a : $an = d.\mathrm{Cos.}\beta.\mathrm{tg.}\alpha = \frac{d.\mathrm{Cos.}\beta.x}{K}$;

donc : $zQ = \frac{d.\mathrm{Cotg.}\beta. \times x.\mathrm{Cos.}\beta. \times K.}{d.\mathrm{Cos.}\beta.x} = K.\mathrm{Cotg.}\beta.$

Cette expression est indépendante de x et ne dépend que de l'angle B. et du paramètre K qui est constant pour une même génératrice. Le point Q ainsi construit se nomme encore le **Pôle** de la génératrice.

Par conséquent, si pour un point $m.m'$ quelconque nous voulons la trace bv du plan tangent, cette droite sera perpendiculaire à la ligne mQ, qui joint le pôle de la génératrice et la projection horizontale du point. — Le point Q se construira graphiquement, et on déduira facilement du paramètre de tangence q, le paramètre de distribution K, d'après la formule $q = K.\text{cotg.}B$. d'où $K = q.\text{tg.}B$.

Surface de vis à filet triangulaire.

C'est la surface engendrée par une droite rencontrant un axe et entraînée d'un mouvement héliçoïdal autour de cet axe.

C'est un cas particulier de l'héliçoïde gauche, le cylindre noyau étant réduit à son axe. — Cet axe est la ligne de striction de la surface de vis. Dans ce cas la ligne de striction ne suffit plus pour déterminer une génératrice quelconque de la surface. Il faut donner en outre une surface directrice.

Construction d'une Génératrice. — Soit z, $z''z'$, l'axe ; $abc - a'b'c'$, l'hélice directrice, et B l'angle constant des génératrices avec le plan horizontal ; — On tracera la génératrice de front $az - a'z'$. Ce qui donnera la hauteur $d'z' = r.\text{tg.}B$ du point situé sur l'axe au-dessus du point situé sur l'hélice.

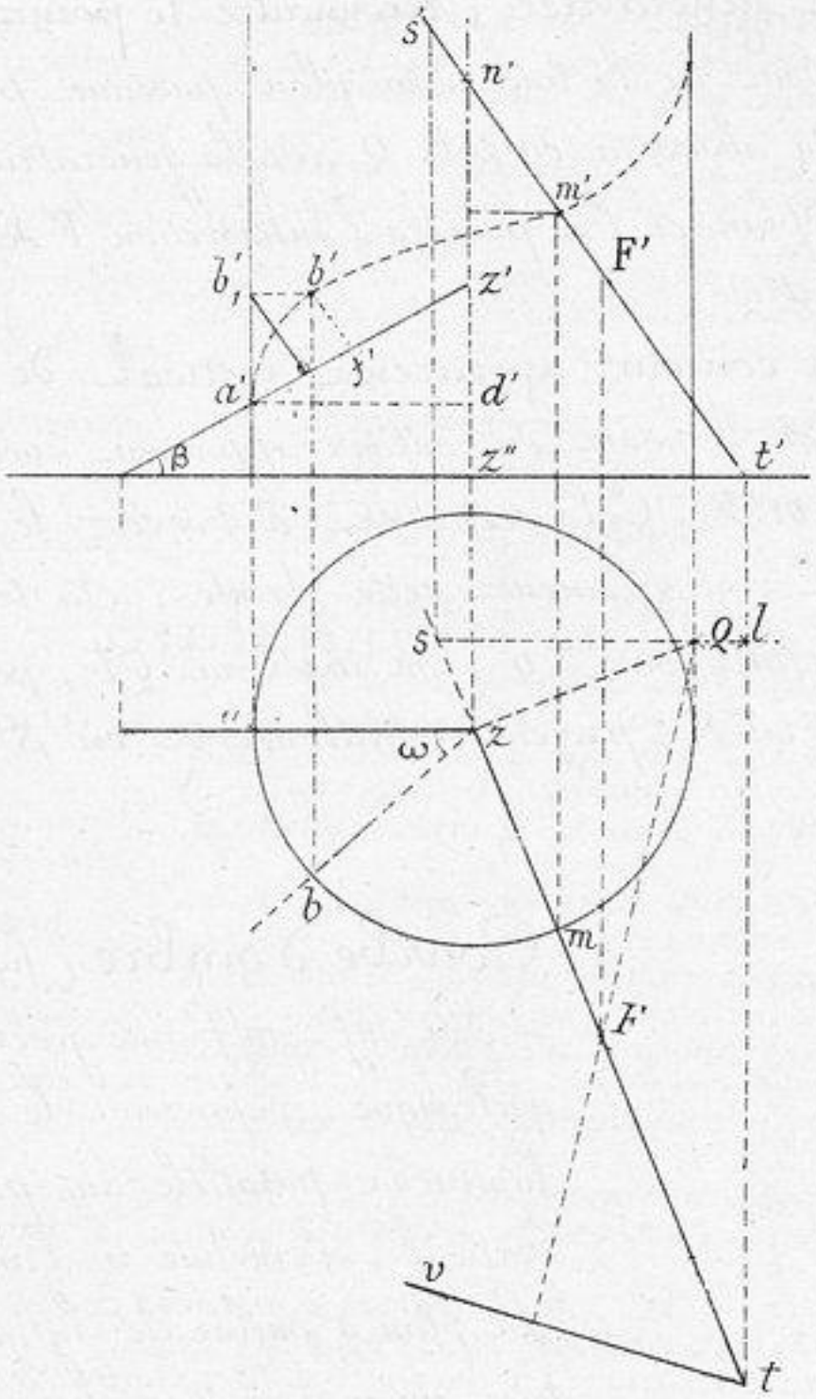
Soit $m\,m'$ un point quelconque de cette hélice. La génératrice correspondante aura sa projection horizontale mz, passant par le pied de l'axe, et sa projection verticale rencontrant l'axe au point n' situé à la hauteur constante $r.\text{tg.}B$. au-dessus du point m'.

Paramètres de distribution et de tangence. —

La formule $K = \rho(\text{tg.}\beta - \text{tg}\,\gamma)$ n'est plus applicable, parce que $\rho = 0$ et $\text{tg.}\gamma = \infty$. — Cherchons directement $K = \text{Lim.}\frac{p}{\sigma}$.

Soit za, $z'a'$, la génératrice de front, et zb la génératrice infiniment voisine ; faisant avec la première un angle σ, projeté horizontalement suivant ω.

Fig. 1.



On sait que l'on a $\sigma = \omega . \cos\beta$.

En raisonnant comme précédemment, on verra que la plus courte distance s'obtiendra en prenant le point bb' infiniment voisin de aa' et cherchant la distance $b'f'$ de sa projection verticale à la projection verticale $a'z'$ de la génératrice.

Au lieu de prendre b' sur la courbe, on le prendra sur sa tangente, en b'_1. Cela posé : $a'b'_1$ est la hauteur dont on monte sur l'hélice pour une rotation égale à ω ; on aura donc : $\overline{a'b'_1} = h\omega$, et $b'f'_1 = h.\omega.\cos.\beta. = p$.

et par suite : $K = \dfrac{h.\omega.\cos.\beta}{\omega.\cos\beta} = h$.

Donc : Dans la vis à filet triangulaire, le Paramètre de distribution est égal au pas réduit ; il est indépendant de l'angle β.

Paramètre de tangence q. — D'après ce qui a été vu pour le cas particulier précédent des surfaces à cône directeur ; on aura $q = K.\,\mathrm{Cotg}.\beta.$, et par suite :

$$q = h.\,\mathrm{Cotg}.\beta.$$

Il est le même que pour l'hélicoïde gauche.

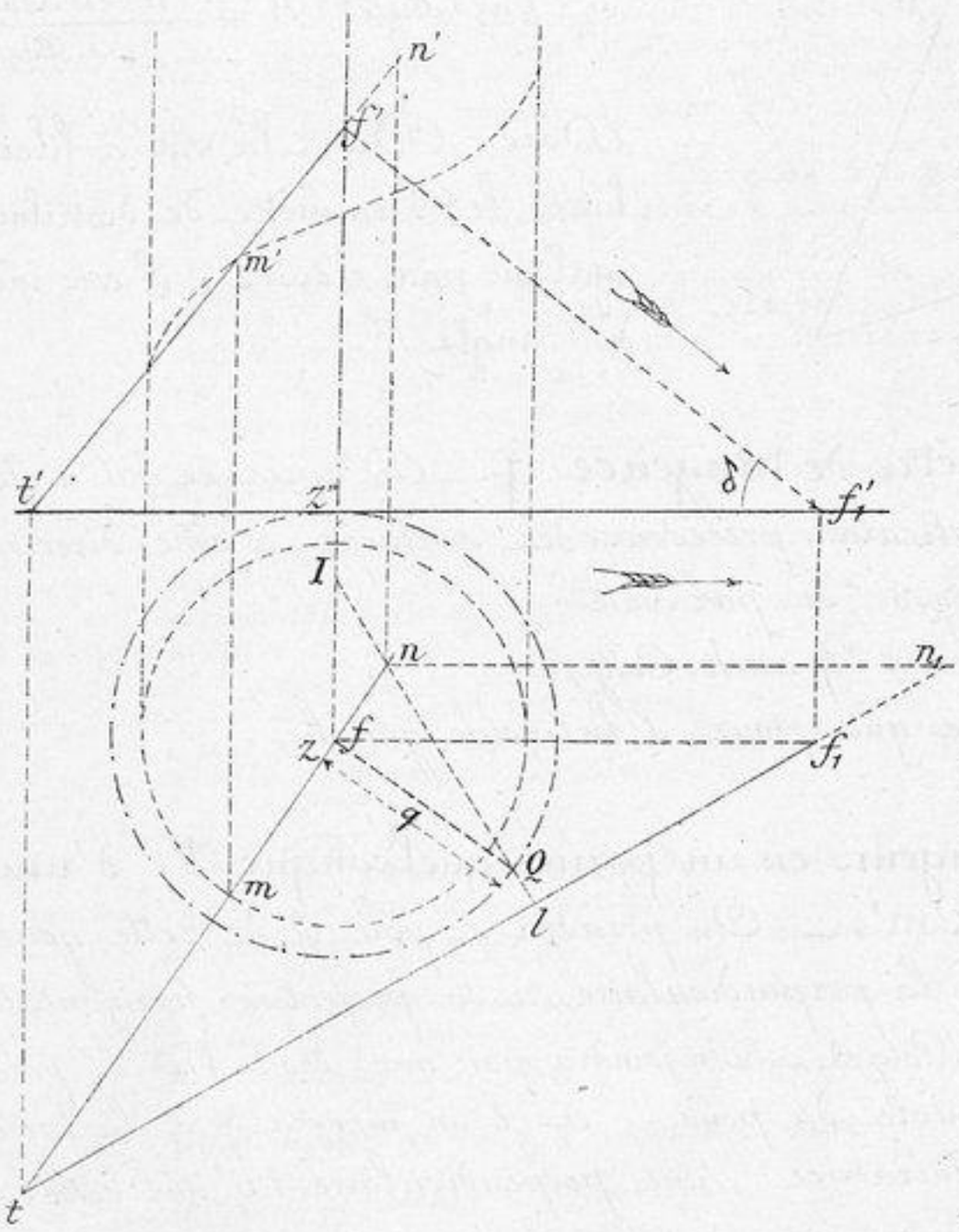
Plan tangent en un point quelconque FF' d'une génératrice zm — z'm'. — On prendra le pôle Q de cette génératrice en portant sur la perpendiculaire a sa projection horizontale, une distance $ZQ = h.\,\mathrm{Cotg}.\beta.$ — On joindra par une droite F'Q le pôle à la projection horizontale du point ; et l'on menera par la trace horizontale t de la génératrice, une perpendiculaire tv sur cette droite ;

ce qui donnera la trace horizontale du plan tangent.

Un plan passe par une génératrice, reconnaître le point où il est tangent (fig. 1) — Soit tv la trace d'un plan passant par la génératrice mF – m'F'. — On abaissera du pôle Q, de la génératrice une perpendiculaire sur la trace du plan et l'on prendra l'intersection F' de cette perpendiculaire et de la génératrice.

Trouver des points du contour apparent vertical de la surface. (fig. 1). Soit à trouver le point du contour apparent vertical situé sur la génératrice mF – m'F'. Cela revient à trouver le point de tangence du plan projetant verticalement cette droite. Sa trace horizontale est tt', perpendiculaire sur xy ; on abaissera Ql, perpendiculaire sur tt' et l'on aura en S, projeté verticalement en S', le point cherché.

Fig. 2.



Courbe d'ombre (fig. 2).

— Soit mf – m'f' une génératrice quelconque ; supposons le rayon lumineux parallèle au plan vertical, et incliné à l'angle δ. Le plan d'ombre de la génératrice aura pour trace horizontale tf₁, ombre portée par la génératrice sur le plan horizontal. — Pour avoir le point de tangence de ce plan, on abaissera du Pôle de la génératrice une perpendiculaire Ql, sur cette trace, et l'on obtiendra en nn', par recoupement avec la génératrice, le point d'ombre propre.

Il serait facile d'en déduire en n_1 un point de l'ombre portée par la surface sur le plan horizontal.

Centre de rayonnement. Prolongeons la droite nQ jusqu'en I, rencontre avec la perpendiculaire abaissée du pied de l'axe sur la projection horizontale des rayons lumineux, et calculons ZI que nous désignerons par m. Les 2 triangles iZQ et tZf_1 sont semblables, car ils ont les cotés perpendiculaires. On en déduit :

$$\frac{IZ}{Zf_1} = \frac{ZQ}{Zt} \quad ; \quad \overline{Zf_1} = \overline{Z''f'}\,\mathrm{cotg}\,\delta . \qquad \overline{Zt} = \overline{Z''f'}\,\mathrm{cotg}\,\beta :$$

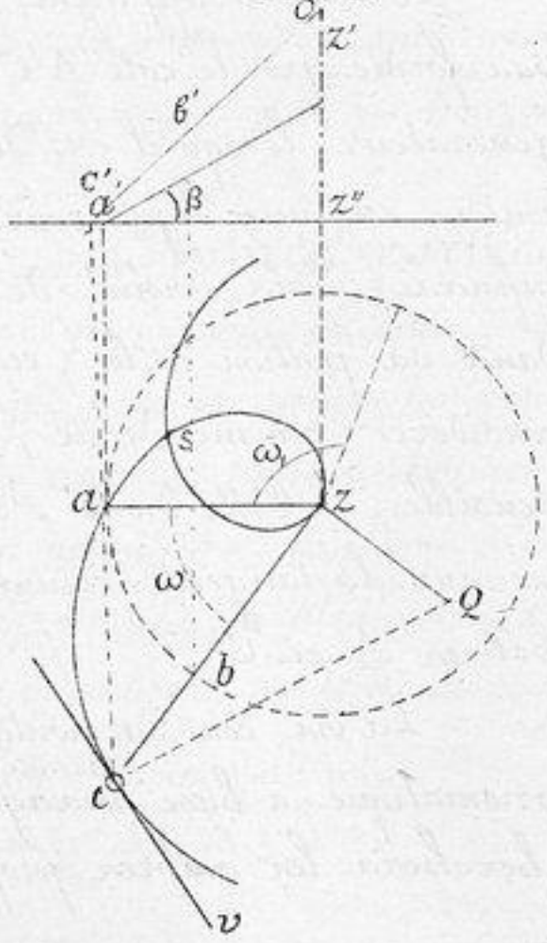
$$\overline{ZQ} = q = h.\mathrm{cotg}\,\beta \quad , \text{ et par suite :}$$

$$IZ = m = h.\mathrm{cotg}.\,\delta \qquad (\text{Constante})$$

On se servira donc du point de rayonnement I, comme on l'a fait pour l'héliçoïde gauche. La courbe, lieu des points n, est engendrée géométriquement d'une façon très-simple. — Par un point fixe Z_1, on mène une sécante quelconque $Z_1 n$, et une perpendiculaire $Z_1 Q$ à cette droite jusqu'à sa rencontre en Q avec un cercle $Z_1 Q$ ayant le point Z_1 pour centre, et q pour rayon. On joint le point d'intersection Q avec un autre point fixe I, et le point n est à l'intersection de cette droite et de la première sécante.

Section horizontale de la Surface. (fig. 3). — Cherchons la section horizontale passant par le point $a\,a'$.

Fig. 3



Soit bz, $b'z'$ une génératrice ; ω l'angle qu'elle fait en projection horizontale avec la génératrice az, $a'z'$, et cc' sa trace. — On aura, en désignant ZC' par la lettre ρ :

$$\rho = r + \omega h.\mathrm{cotg}.\beta.,$$

équation en coordonnées polaires d'une spirale d'Archimède.

ρ s'annule pour $\omega = -\frac{r\,\mathrm{tg}\beta.}{h} = \omega_1$.

Elle présente un premier point double, S ; elle en aurait une infinité d'autres.

La surface peut être considérée

comme engendrée par cette spirale se déplaçant hélicoïdalement. Les points doubles engendreront des lignes doubles de la surface et qui seront des hélices.

La trace du plan tangent en un point cc' est la tangente cv à la spirale qui passerait par ce point.

Menons la normale cQ et la sous-normale zQ, on sait que l'on a :

$$S^{s}\text{-normale} = \frac{d\varrho}{d\omega} = h \cdot \operatorname{Cotg}\beta = q,$$

Ce qui permet d'établir d'une autre manière la propriété du pôle Q, d'être le point par lequel passent toutes les lignes de pente des plans tangents aux différents points de la génératrice correspondante à ce pôle.

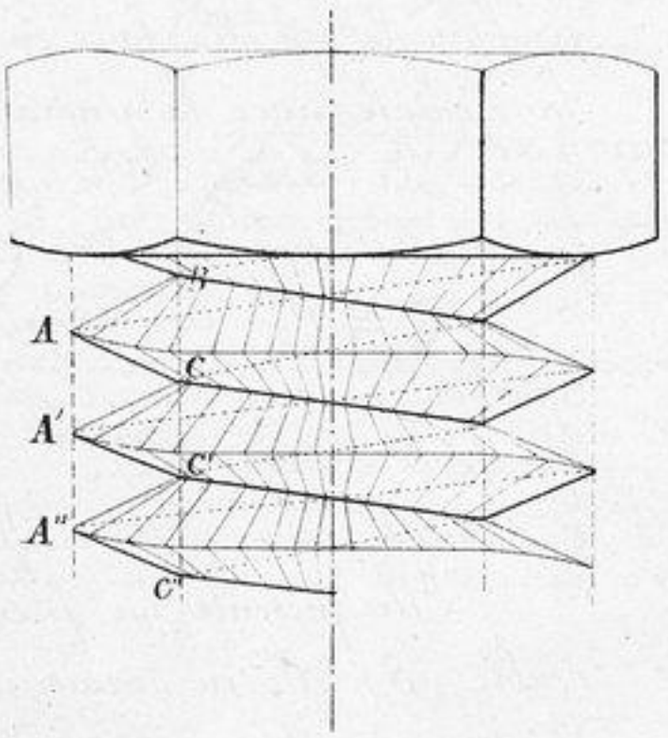
Représentation d'une vis à filets triangulaires.

Sujet de la 6e Epure. — (Voir le Programme).

Un triangle ABC, ordinairement isocèle, se déplace hélicoïdalement de telle sorte que son plan passe toujours par l'axe du mouvement hélicoïdal.

La vis est à filet simple lorsque le pas est égal à la base BC du triangle. Chacun des côtés AB ou AC, engendre une portion de surface de vis à filet triangulaire. Les points A et C engendrent des hélices de même pas, mais de rayons différents qu'il est facile de tracer.

Le contour apparent vertical n'est pas formé par le côté A'C' du triangle générateur lorsqu'il est de front. Ce contour est une ligne courbe à branches infinies, mais voisine de son asymptote dans sa portion utile, et que l'on peut considérer comme droite, sans erreur sensible. — Cette droite s'obtiendra en menant la tangente commune aux hélices A' et C'.



La vis est surmontée d'une tête prismatique à base hexagonale. On cherchera les ombres propres de la

surface, l'ombre portée par la tête prismatique sur les filets et les ombres portées par les filets les une sur les autres.

A cet effet, on prendra le plan horizontal comme plan auxiliaire d'ombres portées. — On choisira sur les grandes et les petites hélices des points équidistants répondant chacun à une même position du triangle générateur, on les numérotera soigneusement et on en cherchera les ombres portées sur le plan horizontal. En joignant les ombres des points appartenant à une même hélice, on aura l'ombre portée de cette hélice. — La courbe ainsi obtenue sera une cycloïde. — En joignant par des droites les ombres portées par tous les points se répondant, mais situés les uns sur la grande et les autres sur la petite hélice, on aura les ombres portées par les génératrices de la surface. — Prenant l'enveloppe de ces droites, on aura l'ombre portée par la vis sur le plan horizontal. Il pourra se faire que la courbe enveloppe ainsi obtenue soit tangente aux droites en dehors des portions utiles de ces dernières. Dans ce cas l'ombre portée sera limitée aux cycloïdes d'ombre des grandes hélices; sinon l'ombre portée horizontalement sera plus complexe, et en remontant par des rayons lumineux inverses, des points de contact de l'enveloppe, aux points situés sur les génératrices dans l'espace, on en déduira l'ombre propre de la vis.

Comme vérification on appliquera la construction par le centre de rayonnement, qui permet de trouver facilement la courbe d'ombre propre en projection horizontale.

Ombres portées sur la Vis. —

On appliquera la méthode des projections obliques. On cherchera l'ombre portée par la tête prismatique sur le plan horizontal, et comme on aura trouvé précédemment les ombres portées horizontalement par les hélices, par les génératrices, et même par la ligne d'ombre propre de la surface, si elle existe dans les limites du filet, il sera facile de remonter des points où toutes ces ombres portées se coupent, aux points d'ombres portées dans l'espace.

Héliçoïde gauche à Plan Directeur.

C'est la surface engendrée par une droite entraînée dans un mouvement héliçoïdal, autour d'un axe qui lui est perpendiculaire sans la rencontrer.

On voit que c'est un cas particulier de l'héliçoïde gauche.

Les génératrices sont tangentes à un cylindre noyau. Leur point de tangence décrit sur le cylindre une hélice qui est à la fois la ligne de striction et le contour apparent horizontal de la surface.

Paramètre de Distribution. — Soit γ l'angle de l'hélice de striction avec le plan horizontal ; — h, le pas réduit ; — r le rayon du cylindre noyau.

On a : $\quad tg.\,\gamma = \frac{h}{r}$.

On aura $\quad K = r(tg.\beta - tg\,\gamma) \quad = -r\,tg.\,\gamma = -h$.

Le paramètre de tangence $q = r\,cotg.\,\beta$ devient infini.

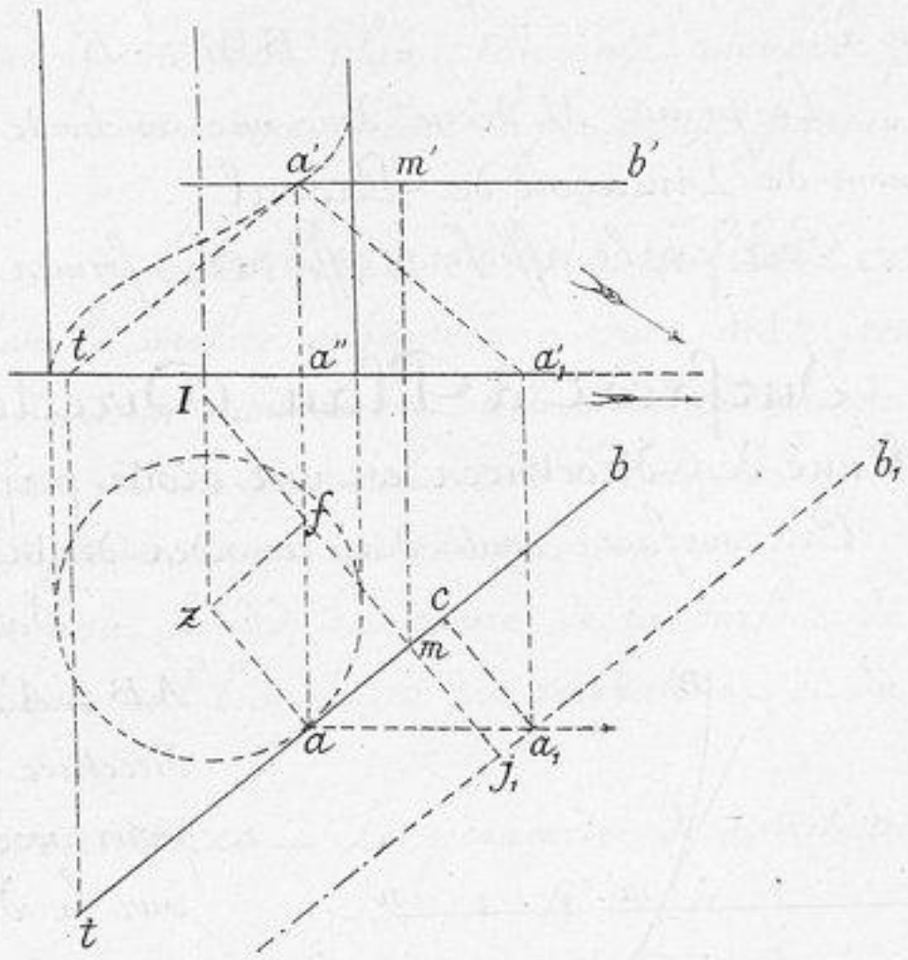
La trace du plan tangent s'obtiendra en appliquant le théorème donné pour les surfaces à plan directeur. Nous savons que : — le pied de l'axe, — la projection du point, — la trace horizontale de la tangente à la ligne de striction — le point de la trace horizontale du plan tangent situé sur la normale à la ligne de striction —,

Sont sur un même cercle.

Courbe d'ombre. — Soit ab — $a'b'$ une génératrice quelconque. Le rayon lumineux est parallèle au plan vertical et incliné à l'angle δ. Soit $a_1 b_1$ la trace horizontale du plan d'ombre de la génératrice.

En généralisant le tracé géométrique donné pour l'héliçoïde gauche, on prendra le point I, à une distance du centre $m = ZI = h.\,Cotg.\,\delta$ sur une perpendiculaire au rayon lumineux. Ce sera le point de rayonnement : On joindra le point I au pôle de la génératrice ; mais ce pôle est situé à l'infini sur une perpendiculaire à cette génératrice. Cela reviendra donc à mener par le point I une perpendiculaire sur la génératrice et à prendre son intersection m avec cette génératrice.

On peut démontrer directement que la perpendiculaire mV, menée



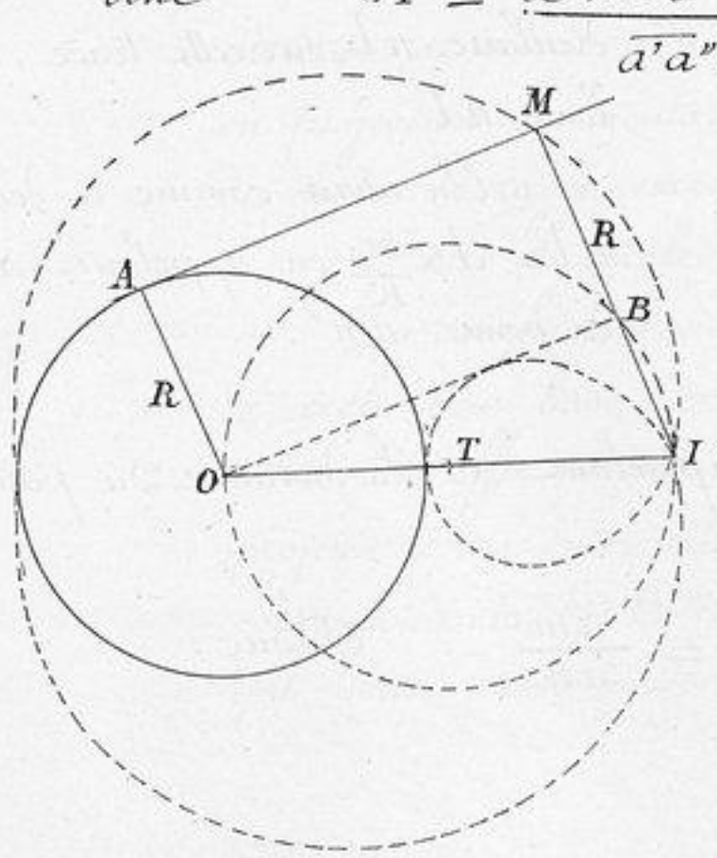
sur la trace $a_1 b_1$ du plan tangent passe par le point fixe I. En effet:
Les 2 triangles ZIf et $a a_1 c$ sont semblables, et donnent:

$$\frac{ZI}{Zf} = \frac{a a_1}{c a_1} \quad ; \text{ or } Zf = am \; ; \text{ c'est l'} x \text{ du point } m.$$

$$c a_1 = \overline{a'a''} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{a'a''} \cdot x}{K} \; , \text{ et puisque } K = h \; ,$$

$$c a_1 = \frac{\overline{a'a''} \cdot x}{h} \; , \text{ et } a a_1 = a'a'' \cdot \operatorname{cotg} \delta \; ,$$

$$\text{donc} \qquad ZI = \frac{x \times \overline{a'a''} \operatorname{cotg} \delta}{\overline{a'a''} \frac{x}{h}} = h \cdot \operatorname{cotg} \delta \qquad \text{(constante)}$$



La courbe, en projection horizontale, a une génération géométrique très-simple. C'est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe I sur les tangentes à un cercle.

Il est facile de reconnaître la nature de cette courbe. — En effet, soit O, le centre du cercle fixe de rayon $OA = R$, et I, le point fixe.

Prenons un point M du lieu.

Décrivons le cercle sur OI comme

diamètre, et prenons le point B où la perpendiculaire IM rencontre ce cercle.

On a : $BM = R$.

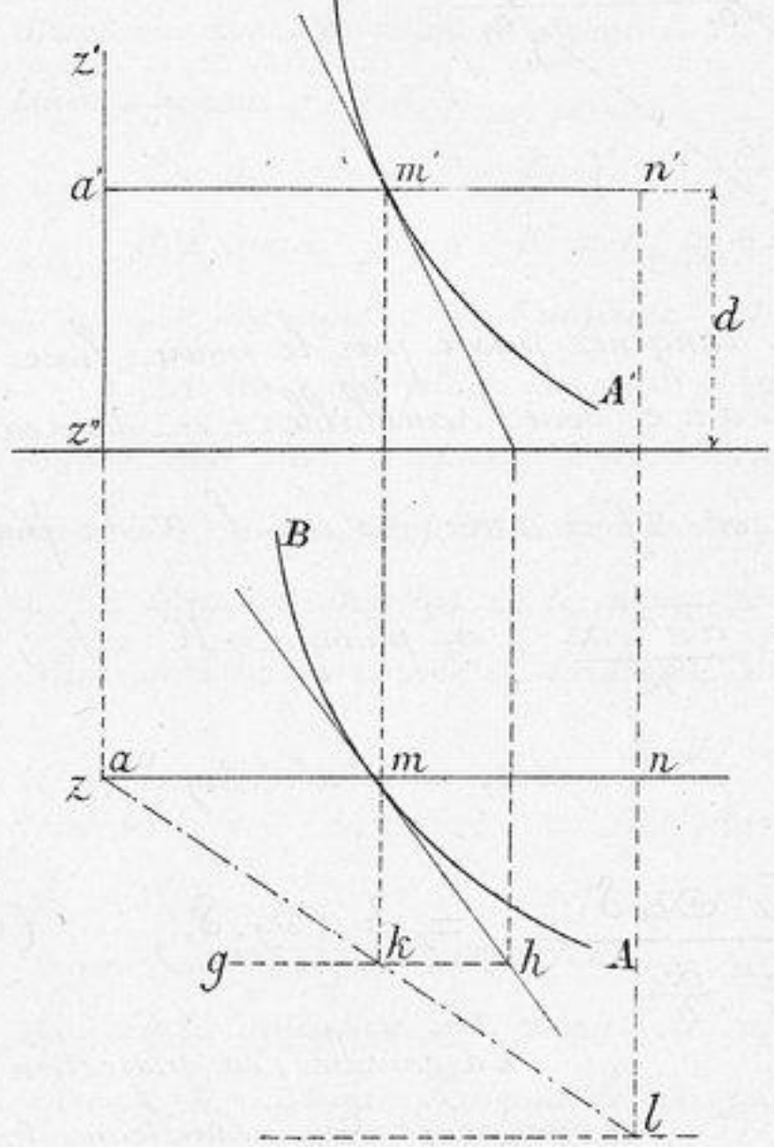
Le point M décrit donc une conchoïde du cercle OI, connue sous le nom de Limaçon de Pascal.

Cette courbe affectera différentes formes suivant la position du point I.

Surfaces à Plan Directeur. — Cas particulier où l'une des directrices est une droite perpendiculaire au plan directeur.

Ces surfaces sont des conoïdes droits.

Soit Z , $Z''Z'$ une droite verticale, et AB — $A'B$ une courbe servant de directrice à un conoïde ayant Z, $Z''Z'$ pour axe. — Un point m m' pris sur la directrice, le plan tangent a pour trace horizontale une droite gh, parallèle à am et passant par la trace horizontale h de la tangente en m à la directrice. — Abaissons mK perpendiculaire sur cette trace.



Soit n n' un autre point situé à la distance x du point central a situé sur l'axe ; et soit lt la trace du plan tangent en ce point.

Abaissons de même la perpendiculaire nl sur cette trace, et calculons nl .

On aura comme ci-dessus :

$nl = d \times \frac{x}{K}$ en appelant d la cote du point n n'.

On aurait eu de même :

$mk = \frac{d \times x'}{K}$, en appelant x' la distance du point m,

Et par suite :

$$\frac{mk}{ml} = \frac{am}{an} \quad . \quad \text{Donc :}$$

Dans un conoïde droit, les traces horizontales des lignes de plus grande pente des plans tangents menées par les points de tangence sont sur une même ligne droite passant par le pied de l'axe.

Surface de vis à filet carré.

C'est la surface engendrée par une droite rencontrant un axe et entraînée dans un mouvement hélicoïdal autour de cet axe.

C'est un cas particulier de l'héliçoïde à plan directeur.

Le cylindre noyau est réduit à son axe.

On peut la déduire encore de la surface de vis à filet triangulaire en supposant nul l'angle β des génératrices et du plan horizontal.

Paramètres. — Le paramètre de distribution sera encore :

$$K = h .$$

Le paramètre de tangence $q = h.\operatorname{Cotg}.\beta$ devient infini.

Le paramètre d'ombre $m = h.\operatorname{Cotg}\delta$ reste le même que pour les autres surfaces héliçoïdes.

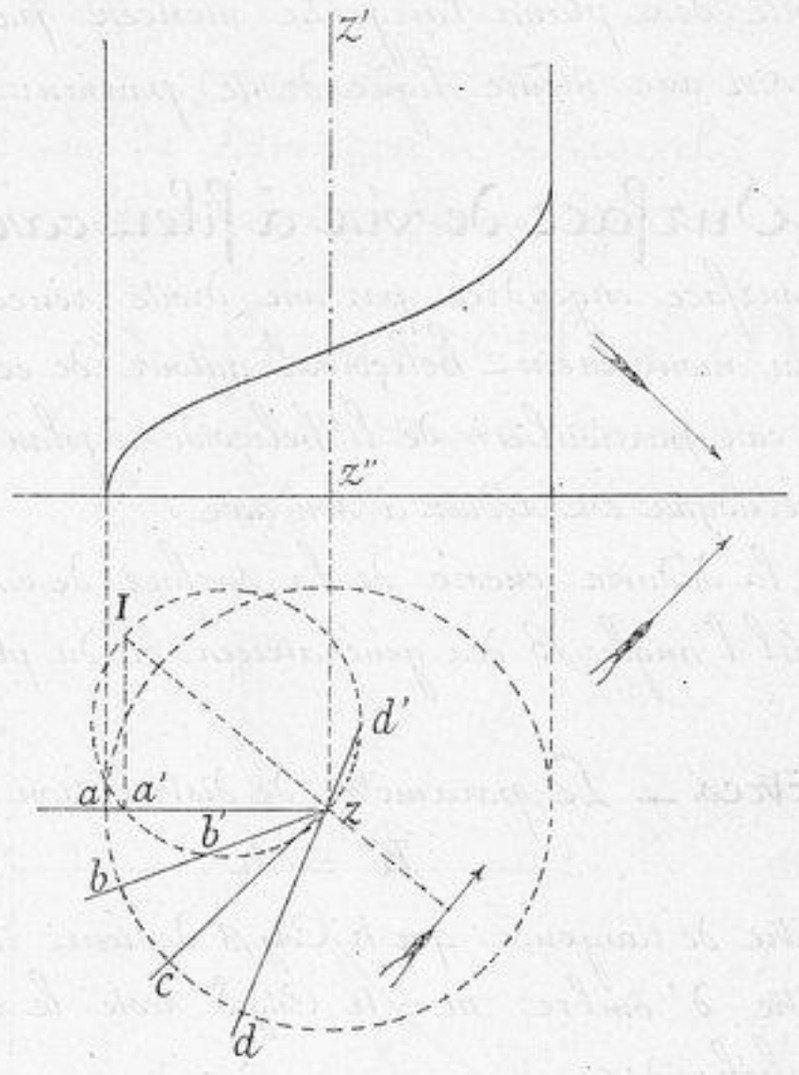
Plan tangent. — Le plan tangent se construira en appliquant ce qui vient d'être dit pour les conoïdes droits. On se servira donc de la tangente à l'hélice directrice.

Courbe d'ombre. — Déduisant sa construction de celle donnée pour l'héliçoïde à plan directeur, Le cercle projection de l'hélice de striction se réduit à un point qui est le pied de l'axe ; — Et la courbe, en projection horizontale, est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre de rayonnement Q, sur les droites passant par le point h.

C'est le cercle décrit sur h Q comme diamètre.

La courbe, dans l'espace, est l'intersection du cylindre qui aurait ce cercle pour base, et de la surface de vis. Je dis que c'est une hélice.

En effet ; considérons sur l'hélice directrice des points a, b, c... projetés à des intervalles égaux sur la circonférence de base. Les points correspondants de la courbe d'ombre seront projetés en a' b' c' ..... qui sont aussi à des intervalles égaux sur la seconde circonférence.



De plus, les hauteurs successives dont se sont élevés les points a' b' c' ... sont égales et par suite la courbe dans l'espace est une hélice.

Son pas est moitié de celui de l'hélice directrice, car les points a' b' c' font deux tours quand les points a. b. c. n'en font qu'un.

Contour apparent vertical. — On l'obtiendra comme cas particulier du problème précédent ; — on supposera que les rayons lumineux, qui deviennent, ici, des rayons visuels, sont perpendiculaires au plan vertical.

Le paramètre d'ombre $m = h.\operatorname{cotg}\delta$, puisque $\delta = 0$, devient infini.

Le centre de rayonnement I est rejeté à l'infini sur une parallèle à la ligne de terre ; et les pieds des perpendiculaires abaissées sur les projections des génératrices, sont à l'infini sur ces droites.

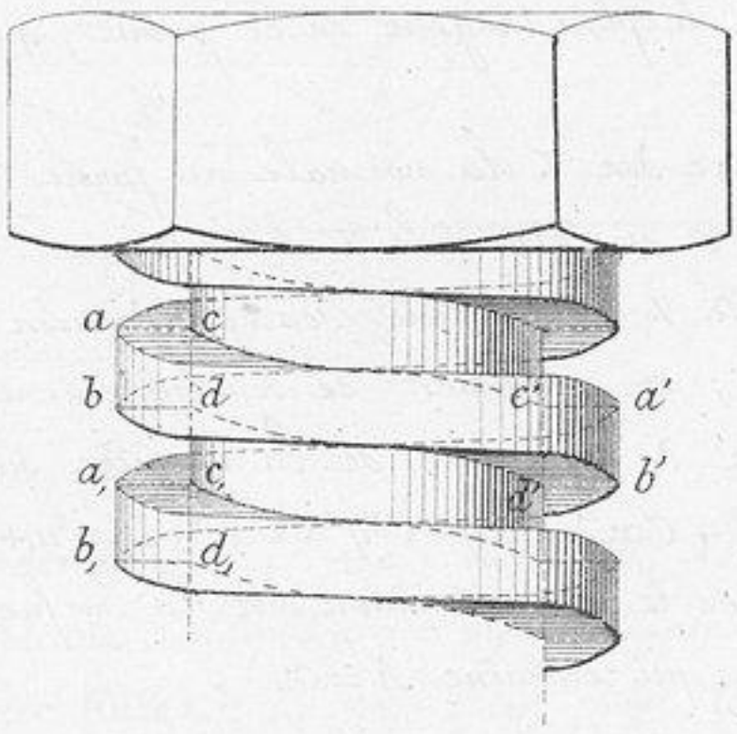
Le contour apparent vertical est donc tout entier à l'infini, c'est-à-dire qu'il n'existe pas.

Ce résultat se prévoyait facilement, puisque les plans projetant verticalement les génératrices, étant parallèles au plan horizontal qui est le plan directeur, sont tangents à l'infini.

Représentation d'une vis à filets carrés.

— Un carré a b c d qui se déplace héliçoïdalement de telle sorte

que son plan passe toujours par l'axe du mouvement hélicoïdal, engendre une vis à filets carrés. — La vis est à filets simples lorsque le pas est égal à la hauteur, ab, du carré.



On représentera les grandes hélices a a' — b b' et les petites hélices c c' — d d'.

La vis fait saillie sur un noyau cylindrique.

Les ombres se tracent facilement en ayant recours à la méthode des projections obliques.

Courbure des Surfaces.

Courbe Indicatrice. — Soit S, une surface ; O, un point de cette surface, et xy, le plan tangent en ce point, que nous prendrons pour plan horizontal.

Prenons pour axe des z la normale au point O. — Soit M un point voisin du point O et Mm, le z de ce point. On pourra toujours développer la quantité z en fonction des coordonnées indépendantes x et y du point M ; et ordonner ce développement suivant les puissances croissantes de x et y, de la manière suivante :

$$z = A + Bx + B'y' + Cx^2 + C'xy + C''y^2 + Dx^3 + D'x^2y + D''y^2x + D'''y^3 + \ldots.$$

Remarquons que le point O étant sur la surface, pour $z = 0$, on a : $x = 0$ et $y = 0$, ce qui entraîne $A = 0$.

Mais le plan xy est tangent en O, et par suite, la section faite dans la surface par le plan zx est une courbe tangente à l'axe des x.

Faisons $y = 0$, et prenons la limite du rapport $\frac{z}{x}$ qui sera le coefficient angulaire de la tangente à l'origine au point O de la section faite par le plan zx ; nous devrons avoir : $\text{Lim.}\ \frac{z}{x} = 0$, pour $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$ ce qui conduit à $B = 0$.

On aura de même en écrivant que l'axe des y est tangent à la surface :

$$C = 0.$$

L'équation de la surface est donc :

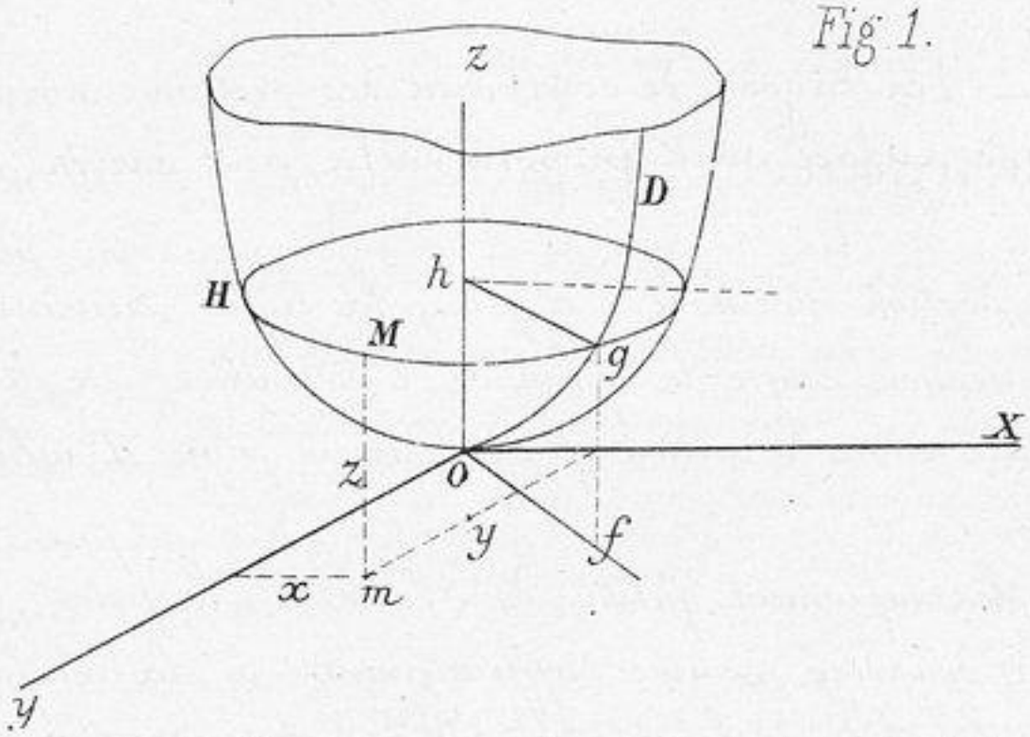
$$z = Cx^2 + C'xy + C''y^2 + Dx^3 + D'x^2y + D''y^2x + D'''y^3 + \ldots.$$

Pour une valeur particulière de z, cette équation sera celle de la section faite dans la surface par un plan parallèle au plan tangent et passant à une distance z de ce plan.

Si nous supposons que x et y soient des infiniment petits du 1er ordre, la section précédente devient la section faite par un plan infiniment voisin du plan tangent ; et prend le nom d'**Indicatrice infinitésimale de la surface**, au point O.

z est infiniment petit du 2e ordre ; les quantités $x^2y - xy^2 \ldots$ sont du

Fig. 1.



3e. ordre, et par conséquent, si nous les négligeons en présence des infiniment petits du 2e. ordre qui entrent dans l'équation, cette dernière devient:

$$z = Cx^2 + C'xy + C''y^2 .$$

C'est l'équation d'une conique de dimensions infiniment petites rapportée à son centre.

Au lieu de la quantité infiniment petite, z, prenons une quantité finie, K; l'équation deviendra $Cx^2 + C'xy + C''y^2 = K$, qui représentera une courbe semblable à l'indicatrice infinitésimale, et que nous nommerons indicatrice finie de la surface au point O.

Il en existe une infinité toutes semblables entre elles. — Nous verrons plus loin celle qu'il est le plus commode de choisir.

Rapportons la courbe précédente à ses axes; son équation sera de la forme:

$$Ax^2 \pm By^2 = K .$$

Celle de l'indicatrice infinitésimale eût été:

$$Ax^2 \pm By^2 = z .$$

Le signe + répond au cas où les 2 sections AB et CD, faites par les plans xz et yz qui passent par les axes de l'indicatrice, sont toutes deux d'un même côté du plan tangent. Dans ce cas, l'indicatrice est une ellipse. — Le signe − répond au cas où la section faite par le plan xz étant du côté des z positifs, la section faite par le plan zy serait du côté des z négatifs. — On dit, dans ce cas, que la surface est à courbures opposées. — L'indicatrice est une hyperbole.

Fig. 2

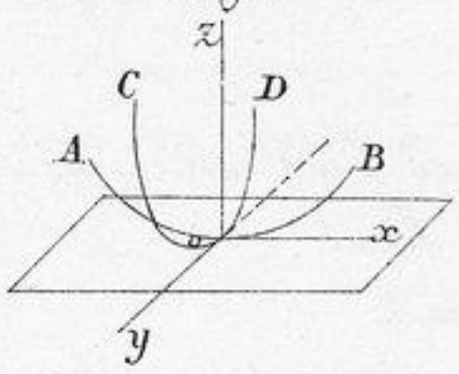
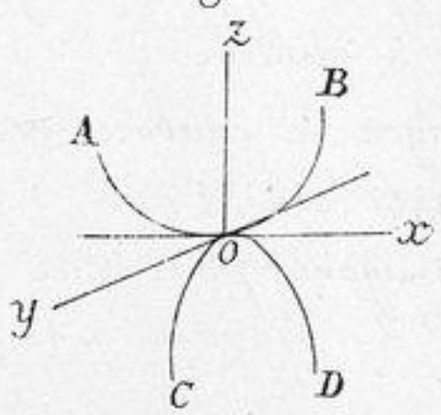


Fig. 3



Les deux sections normales, Zx et Zy qui passent par les axes de l'indicatrice se nomment les <u>sections principales</u>.

Théorème. — Les rayons de courbures des sections normales faites en un point d'une surface sont proportionnels aux carrés des rayons de l'indicatrice.

Soit ZOD une section normale, et gh, la ligne suivant laquelle le plan de cette section coupe le plan de l'indicatrice. Nous avons dit que l'indicatrice était la section faite par un plan H infiniment voisin du plan tangent.

En négligeant les infiniments petits du 3e ordre, le point g de l'indicatrice peut être considéré comme appartenant à la surface.

Le rayon de courbure ρ de la courbe OD a pour expression.

$$\rho = \frac{\overline{hg}^2}{2gf} = \frac{\overline{hg}^2}{2Z} \quad (2^e \text{ Expression du rayon de courbure})$$

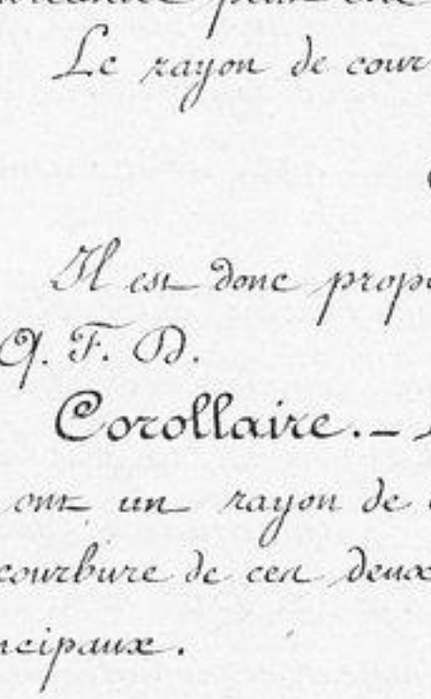
Il est donc proportionnel au carré du rayon $\overline{hg}$ de l'indicatrice. C. Q. F. D.

Corollaire. — Les sections normales principales sont celles qui ont un rayon de courbure maximum ou minimum. — Les rayons de courbure de ces deux sections se nomment les rayons de courbure principaux.

Discussion. Dans le cas où l'indicatrice est une hyperbole, son équation infinitésimale est de la forme :

$$(1) \qquad Ax^2 - By^2 = z$$

Soit AB, CD, la courbe qu'elle représente. — Un plan normal qui aurait OM pour trace rencontre la courbe en M, ce qui veut dire que la section qu'il donnerait dans la surface serait située par rapport au plan tangent du côté des z positifs.



Son rayon de courbure serait proportionnel au carré de OM.

Un plan ayant pour trace ON, ne

rencontre par l'indicatrice, et par suite ne coupe pas la surface du côté des z positifs. Mais si nous changeons dans l'équation (1) z en $-z$, ce qui revient à étudier la surface de l'autre côté de son plan tangent, l'équation devient :

(2) $\quad Ax^2 - By^2 = -z$, qui représente l'hyperbole EF GH conjuguée de la précédente et coupée par toutes les tracées telles que ON qui ne rencontraient pas la précédente hyperbole. Nous pouvons donc dire que l'indicatrice pour une surfaces à courbures opposées est représentée par les deux hyperboles conjuguées AB, et GH, ayant les mêmes asymptotes OT et OS.

Indicatrices finies. — L'indicatrice infinitésimale sera remplacée, en dessin, par une indicatrice finie qui lui sera semblable, et dont l'équation rapportée à ses axes sera :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(si c'est une ellipse)},$$

et $\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ si c'est une hyperbole. Le signe + du second membre répond à la section faite par un plan infiniment voisin, situé d'un côté du plan tangent et le signe — à une section faite de l'autre côté.

Soient R et R' les rayons de courbure principaux. Ces rayons sont proportionnels aux carrés des demi-axes de l'indicatrice infinitésimale et aussi à ceux de l'indicatrice finie qui lui est semblable. On aura donc, en désignant par K un coefficient arbitraire :

$$a^2 = KR \text{ , et } b^2 = KR',$$

et l'équation d'une indicatrice finie sera :

$$\frac{x^2}{KR} + \frac{y^2}{KR'} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{KR} - \frac{y^2}{KR'} = \pm 1$$

De la valeur du coefficient K dépendront les dimensions de l'indicatrice finie.

Dans une même épure, si en un même point O, plusieurs surfaces différentes ont le même plan tangent et que l'on veuille à l'aide d'indicatrices finies étudier les particularités de l'intersection de ces surfaces aux environs du point O, il faudra donner pour toutes les surfaces, une même valeur au coefficient K.

Parmi toutes les indicatrices finies d'une même surface en un point,

il en est une qui est plus simple à construire que les autres, c'est celle qui aurait pour un de ses demiaxes le rayon de courbure de la section principale correspondante.

Faisons $a = R$, on en déduit $K = R$ et $b = \sqrt{RR'}$; il existe donc une indicatrice finie ayant pour un de ses demi-axes l'un des rayons principaux de courbure, et pour autre demi-axe une moyenne proportionnelle entre les deux rayons principaux. C'est celle-là dont nous nous servirons dans nos épures, à moins d'indications contraires.

Remarquons que si l'on convient de donner le signe + au rayon de courbure d'une section principale quand son centre de courbure est d'un côté du plan tangent, et le signe − quand il est de l'autre côté, l'équation d'une indicatrice finie sera toujours :

$$\frac{x^2}{KR} + \frac{y^2}{KR'} = 1 .$$

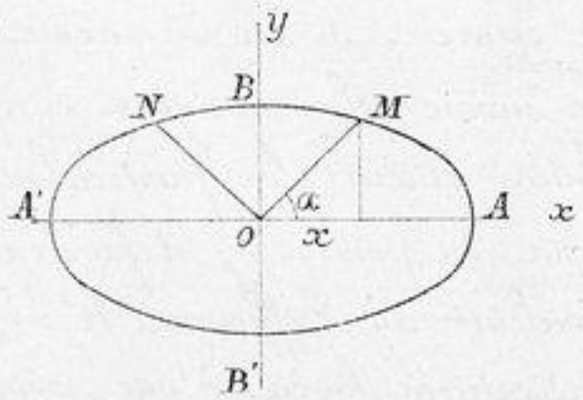
Celle de l'indicatrice la plus simple sera :

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{RR'} = 1 .$$

Formule d'Euler. — Expression du rayon de courbure d'une section normale quelconque, en fonction des rayons de courbure des sections principales.

Rappelons une formule connue des Courbes du second degré à centre.

Soit $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$, l'équation d'une Ellipse ou d'une hyperbole rapportée à ses axes. Soit M un point quelconque de cette courbe ; — $OM = l$ le rayon de ce point, x et y ses coordonnées ; α l'angle formé par OM avec le grand axe.



On a : $x = l.\cos.\alpha$

$y = l.\sin.\alpha$.

Écrivons que le point M est sur la courbe, ce qui donnera :

$$\frac{l^2 \cos^2\alpha}{a^2} \pm \frac{l^2 \sin^2\alpha}{b^2} = 1 \qquad \text{ou:}$$

$$(1) \qquad \frac{1}{l^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\alpha \pm \frac{1}{b^2}\sin^2\alpha$$

Cela posé, revenons à la surface et à son indicatrice. Nous avons vu que le rayon de courbure d'une section normale qui aurait la ligne OM pour trace de son plan sur celui de l'indicatrice est proportionnel au carré du rayon OM de cette indicatrice, que cette dernière soit infinitésimale ou finie.

Désignons par ρ le rayon de courbure de la section normale qui aurait OM pour trace ; par R et R' les rayons de courbure principaux, c'est-à-dire des sections normales ayant les axes OA et OB pour traces.

Les quantités ρ, R et R' seront proportionnelles aux quantités l^2, a^2 et b^2, et en substituant dans l'expression (1) qui est homogène, on aura

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos^2\alpha \pm \frac{1}{R'}\sin^2\alpha \quad . \text{ Telle est la formule d'Euler.}$$

Si l'on veut faire entrer dans cette expression les courbures au lieu des rayons de courbure, on sait que si nous désignons les courbures par les lettres c, C et C', on a :

$$c = \frac{1}{\rho} \qquad C = \frac{1}{R} \qquad C' = \frac{1}{R'} \qquad \text{ce qui donne :}$$

$$(3) \qquad c = C\cos^2\alpha + C'\sin^2\alpha \quad .$$

Courbure moyenne. — Prenons deux sections normales à angle droit l'une sur l'autre, ayant pour traces sur l'indicatrice les droites perpendiculaires entre elles OM et ON. Soient ρ et ρ' les rayons de courbure correspondants, on aura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos^2\alpha + \frac{1}{R'}\sin^2\alpha \quad \text{(l'indicatrice étant une Ellipse)}$$

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{R}\sin^2\alpha + \frac{1}{R}\cos^2\alpha \quad ; \quad \text{ajoutant :}$$

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \quad , \quad \text{ou en introduisant les courbures.}$$

$$(5) \qquad c + c' = C + C' \quad , \text{ d'où ce théorème :}$$

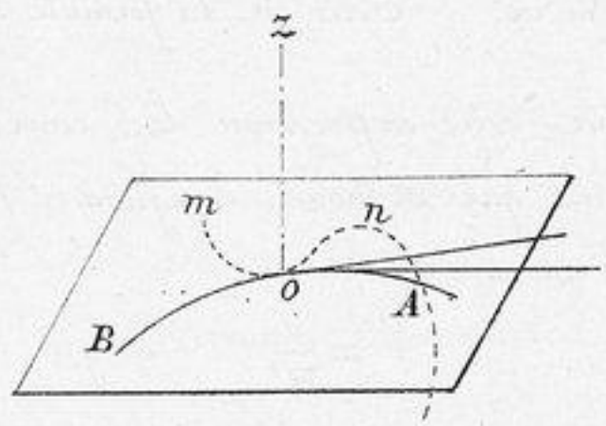
La somme des courbures de deux sections normales à angle droit l'une sur l'autre est constante et égale à la somme des courbures principales. La quantité $\frac{C+C'}{2}$ se nomme courbure moyenne de la surface au point O.

Ombilics. — Il peut se présenter, dans le cas où R et R' sont de même signe, des points pour lesquels R et R' sont égaux.

Dans ce cas, l'indicatrice est un cercle : toutes les sections normales ont le même rayon de courbure. — Ces points se nomment des ombilics.

Théorème. — Dans une surface à courbures opposées les asymptotes de l'indicatrice sont les tangentes de la courbe d'intersection de la surface par son plan tangent.

En effet, soit BOA la courbe d'intersection de la surface par son plan tangent, et OA une sécante passant par le point O.



La courbe de section normale m.o.n.A, qui aurait OA pour trace serait tangente en O, au plan tangent, et le recouperait en A.

A la limite, si OA devient la tangente en O, à la courbe BOA, la section normale précédente aura, en O, 3 points réunis en un seul, elle présentera donc une inflexion et son rayon de courbure sera infini.

Mais pour que le rayon de courbure soit infini, il faut que le rayon de l'indicatrice le soit également, c'est-à-dire soit une asymptote.

C.Q.F.D.

Conséquences. — Dans le paraboloïde et dans l'hyperboloïde, les génératrices de système différent qui passent par un même point sont les asymptotes de l'indicatrice de ce point.

Théorème de Meusnier. — Une courbe quelconque tracée par un point O, sur une surface, a pour rayon de courbure la projection sur son plan osculateur du rayon de courbure de la section normale qui passe par la tangente en O à la courbe considérée.

En effet : soit Q le plan osculateur d'une courbe MN ; P le plan normal passant par la tangente OT ; ON' la section normale faite par ce dernier plan, et α l'angle de ces 2 plans.

Prenons sur la tangente commune aux 2 courbes une longueur ob infiniment petite ; et élevons dans les deux plans P et Q, des perpendiculaires à cette tangence jusqu'à la rencontre en N et N' avec les 2 courbes.

Soit ρ, le rayon de courbure de la section normale ON' et ρ_1 celui de la courbe donnée, ON, on aura :

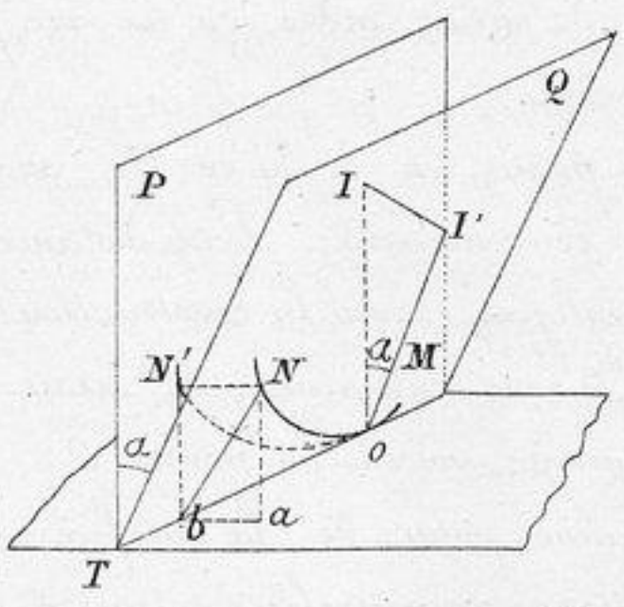
$$\rho = \frac{\overline{ob}^2}{2\overline{bN'}} \quad \text{et} \quad \rho_1 = \frac{\overline{ob}^2}{2\overline{bN}} \text{, et par suite :}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\overline{bN'}}{\overline{bN}} .$$

Mais, à la limite, la droite NN' est une droite du plan tangent, et par suite est perpendiculaire sur bN'.

Par conséquent : $\frac{bN'}{bN} = \text{Cos. } \alpha$,

et par suite : $\rho_1 = \rho . \text{Cos. } \alpha$.



Soient OI et OI' les deux rayons de courbure, on aura :

$$OI' = OI \text{ Cos } \alpha ;$$

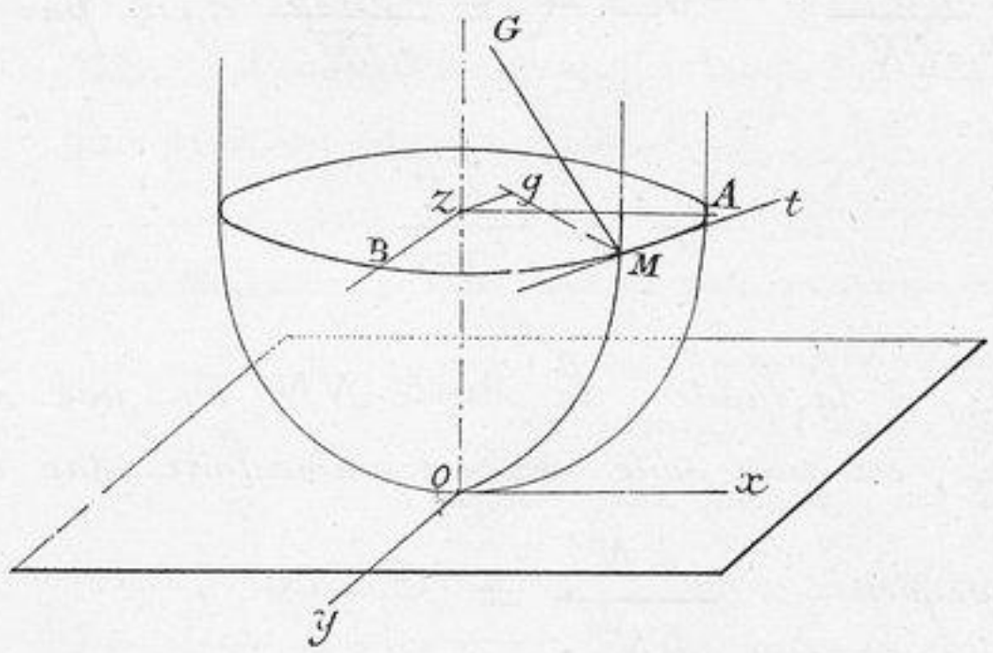
et par suite le point I' sera la projection du point I sur le plan osculateur. C. Q. F. D.

Il résulte du théorème de Meusnier joint au théorème d'Euler, que la connaissance des rayons de courbure principaux entraîne celle des rayons de courbure de toutes les sections faites par des plans passant au même point.

Lignes de Courbure.

On donne le nom de Lignes de courbure d'une surface aux courbes tracées sur elles et telles que les normales à la surface en tous les points de ces courbes forment une surface développable, c'est-à-dire se coupent à des distances au moins du 3e. ordre.

Soit O, un point de la surface, et M un point infiniment voisin pris sur l'indicatrice.



La normale en O, est la droite OZ, perpendiculaire au plan de l'indicatrice.

Soit MG la normale à la surface au point M.

La projection de M.G sur le plan de l'indicatrice est perpendiculaire sur la tangente Mt à cette courbe, et la plus courte distance des deux normales est projetée en vraie grandeur suivant la droite Zg perpendiculaire menée sur Mg par le pied Z de la normale en O.

Si le point M est un point quelconque de l'indicatrice, la distance Zg n'est pas nulle. Elle est du même ordre qu'un arc pris sur l'indicatrice. Elle est donc du 1er. ordre.

Mais si l'on prend le point en A ou en B, aux sommets de l'indicatrice, les normales se rencontrent. Leur distance est infiniment petite de l'ordre des quantités négligées dans la construction de l'indicatrice, c'est-à-dire du 3e. - Dans ce cas seulement, M serait le point de la ligne de courbure cherchée infiniment voisin du point O.

Par conséquent; En chaque point de la surface il passe 2 lignes de courbure tangentes aux sections principales, c'est-à-dire tangentes aux deux axes de l'indicatrice.

Il existe deux séries de lignes de courbure. Les unes sont les trajectoires orthogonales des autres; et par conséquent, la connaissance

des premières entraîne celle des secondes.

S'il existe des ombilics, c'est-à-dire des points pour lesquels l'indicatrice est un cercle, dans ce cas, deux normales infiniment voisines se rencontrent toujours, et l'on y trouve des directions de lignes de courbure dans tous les sens. — En ces points les directions des lignes de courbure sont indéterminées.

Lignes de courbure des surfaces développables. — Nature de l'indicatrice. —

Sur ces surfaces, les lignes de courbure de la première série sont les génératrices de la surface, puisque les normales le long des génératrices forment un plan. Les autres sont les trajectoires orthogonales des premières, c'est-à-dire les développantes de l'arête de rebroussement.

Cylindre. Les lignes de courbure sont les génératrices et les sections droites du Cylindre.

Cône. Ce sont les génératrices et les sections faites dans le cône par des sphères ayant leurs centres au sommet du cône.

Pour les cônes, les cylindres et les surfaces développables, un des rayons de courbure principaux étant infini, l'indicatrice est formée par deux lignes parallèles.

Surfaces de révolution. — Les lignes de courbure sont les méridiens et les parallèles. — En effet, le long des méridiens, les normales forment un plan qui est le plan méridien, et le long d'un parallèle, elles forment un cône.

En un point M M' les plans de sections principales sont donc le plan méridien, et le plan perpendiculaire mené par la normale en ce point, c'est-à-dire ayant pour trace sur le plan méridien la normale M'I'.

D'après le théorème de Meusnier, le rayon de courbure de la section méridienne étant M'G', par exemple, je dis que celui de la 2e section principale sera M'I'.

On aura, en effet : M'J' (rayon du parallèle) = M'I' Cos. α ,

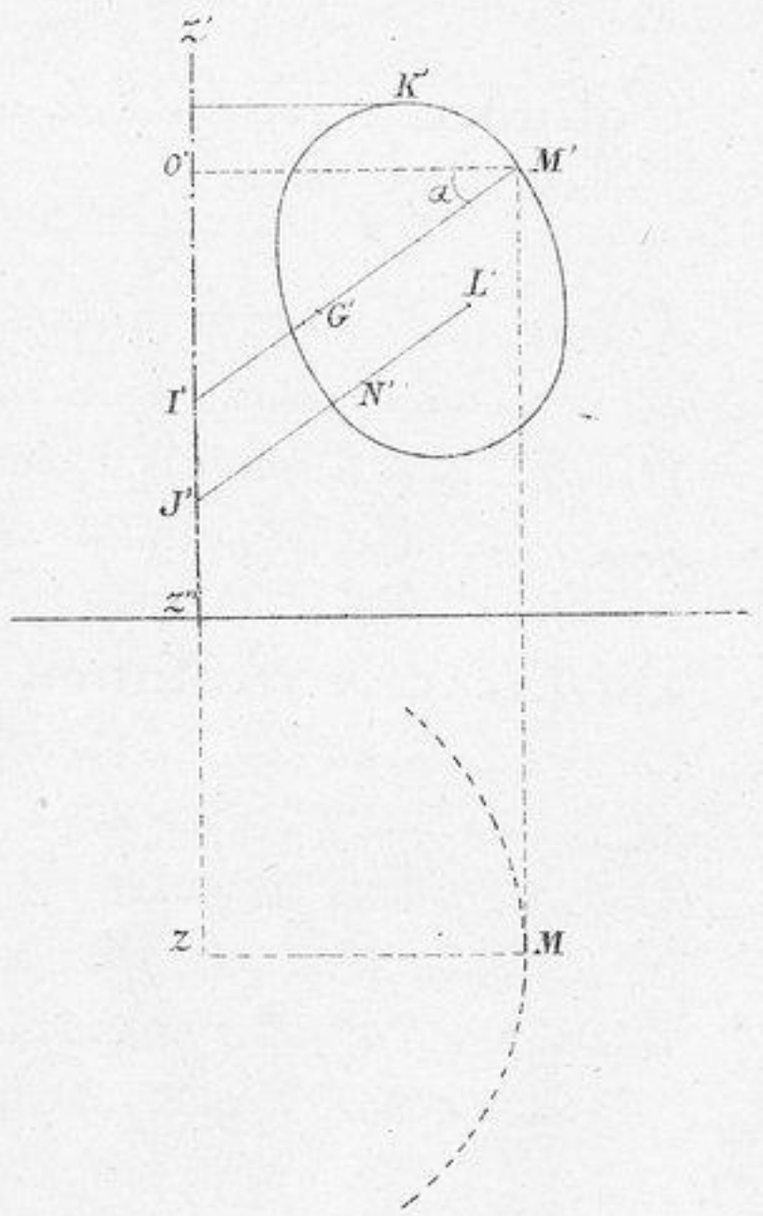
ce qui est l'application de la formule de Meusnier.

Par conséquent, dans une surface de révolution, les deux rayons de courbure principaux sont : l'un le rayon de courbure du méridien, l'autre la portion de la normale au méridien comprise entre ce méridien et l'axe.

Si le méridien a sa convexité tournée du côté de l'axe, comme cela se présente pour le point N', les centres de courbure sont situés de part et d'autre du plan tangent. La surface est à courbures opposées et l'indicatrice est une hyperbole. — Au point M', l'indicatrice est elliptique.

Au point K', à tangente horizontale séparant la partie concave de la partie convexe du méridien, le 2e rayon principal est infini, puisque la normale au méridien rencontre l'axe à l'infini.

L'indicatrice se compose de 2 lignes parallèles.



Lignes de courbure sur les surfaces enveloppes de sphères.

Toute caractéristique étant la limite de l'intersection de 2 sphères infiniment voisines, est un cercle de la sphère génératrice. Les normales à la surface aux différents points d'une caractéristique sont aussi normales à la sphère et concourent à son centre ; elles forment donc un cône, et par suite, les caractéristiques forment la première série des lignes de courbure. La seconde série est formée par les trajectoires orthogonales des lignes précédentes.

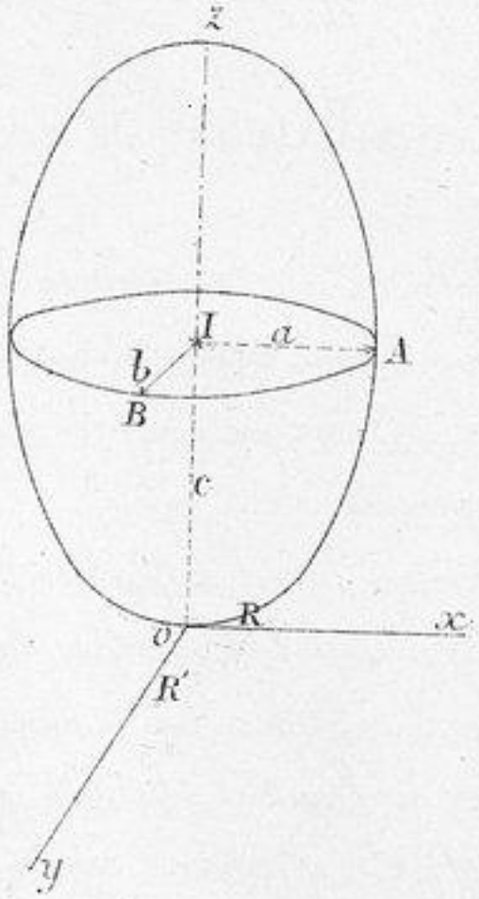
Surfaces osculatrices. Une surface est osculatrice d'une autre en un point O, lorsqu'elle a même plan tangent en ce point, et les mêmes rayons de courbure pour toutes les sections faites par ce point.

D'après les théorèmes d'Euler et de Meusnier, il suffit que les deux surfaces aient mêmes rayons principaux, c'est-à-dire même indicatrice, pour être osculatrices. Une sphère ne peut être osculatrice en un point, à moins que ce dernier ne soit un ombilic.

Il existe, au contraire, une infinité de surfaces du second degré qui peuvent être osculatrices de la surface donnée en un point O. En effet, prenons le cas où la surface est convexe. Soient R et R' ses rayons principaux.

La surface osculatrice sera un Ellipsoïde.

Sur la normale prenons arbitrairement le centre de cet ellipsoïde en I, à une distance OI = C. Soient a et b les demi-axes de son ellipse principale, parallèle au plan tangent



L'ellipse x O z aura pour demi-axes les quantités c et a. Son rayon de courbure au sommet O, doit être égal à R, et est donné par la formule connue :

$R = \frac{a^2}{c}$ d'où $a^2 = cR$ et $a = \sqrt{cR}$;

de même, le rayon de courbure en O de la section par le plan y O z, doit être égal à R' et donné par la formule :

$R' = \frac{b^2}{c}$ d'où $b^2 = cR'$ et $b = \sqrt{cR'}$;

Les deux demi-axes a et b, sont donc déterminés.

On peut profiter de l'indétermination laissée sur c pour rendre l'Ellipsoïde de révolution.

Si l'on fait $a = c$, l'Ellipsoïde sera de révolution, et aura son axe parallèle à oy.

Dans ce cas, les formules deviennent :

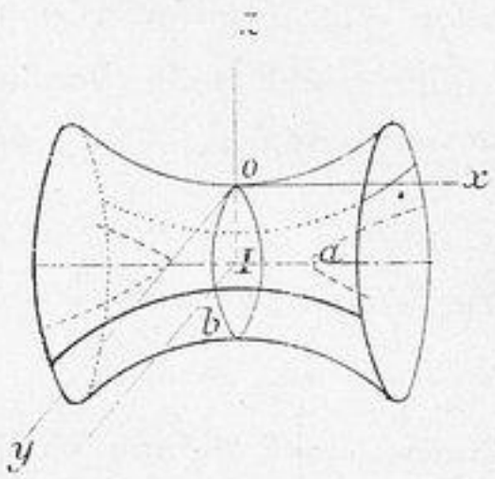
$a^2 = aR$, d'où $a = R$ et $b = \sqrt{RR'}$, $c = a$.

On voit facilement que l'Ellipse principale AB est semblable à l'indicatrice.

Si la surface est à courbures opposées, la surface osculatrice est un hyperboloïde.

On se donnera arbitrairement OI, distance du centre, comptée sur la normale.

On calculera le demi-axe réel Ib comme ci-dessus, et le demi-axe imaginaire Ia.



Si le centre I eût été placé au dessus du plan tangent xy, au lieu d'être au-dessous, l'axe réel eût été parallèle à ox et l'axe imaginaire parallèle à oy. On peut également disposer de OI pour rendre de révolution l'hyperboloïde osculateur.

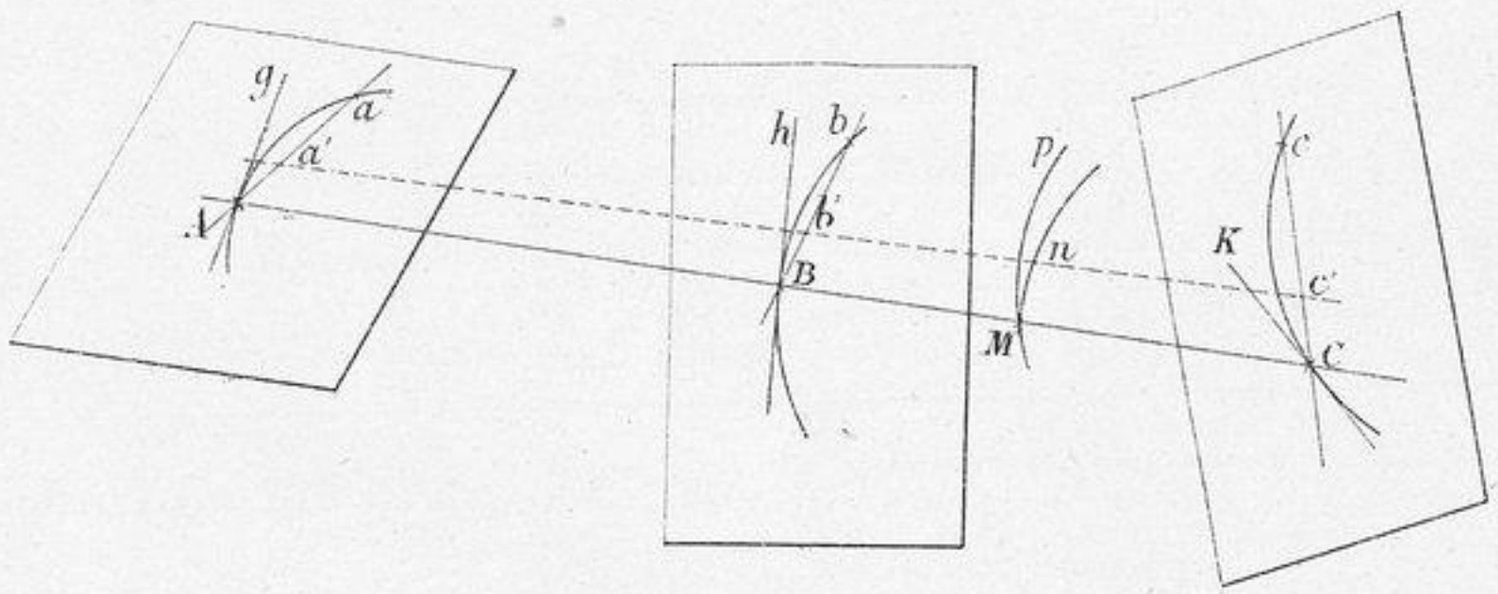
Hyperboloïde osculateur de raccordement d'une surface gauche.

Parmi tous les hyperboloïdes de raccordement que l'on peut mener à une surface gauche le long d'une génératrice, il en est un qui sera osculateur en tous les points. Pour en comprendre la génération, rappelons que 3 tangentes à la surface menées en 3 points A. B. C de la génératrice, peuvent être prises pour directrices de l'hyperboloïde ; rappelons également qu'une surface gauche est coupée par son plan tangent suivant la génératrice et suivant une courbe ; et que les asymptotes de l'indicatrice sont, d'une part, la génératrice et de l'autre, la tangente à la courbe de section. Cela posé : aux 3 points A, B, C, prenons comme directrices de l'hyperboloïde

les 3 droites Aa , Bb , Cc , non tangentes aux sections faites par les 3 plans tangents ; je dis que cet hyperboloïde ne sera pas osculateur en tous les points de la génératrice.

En effet, cet hyperboloïde aura bien en ABC deux génératrices confondues en une seule a-commune avec la surface ; mais la génératrice infiniment voisine a'b'c' de cet hyperboloïde ne peut être confondue avec la génératrice infiniment voisine de la surface. Par conséquent, toute section MN, faite par un plan quelconque donnera dans les deux surfaces des courbes qui n'auront pas trois points communs confondus en un seul, et par conséquent qui ne possèderont pas le même rayon de courbure.

Si, au contraire, on prend comme directrices les trois tangentes ag , bh et ck aux sections faites par les plans tangents, alors les 2 surfaces auront 3 génératrices communes, confondues en une seule ; toutes les courbes de section auront 3 points confondus en un seul. et par suite auront le même rayon de courbure.



Remarque. En chacun des points de la génératrice, les 2 génératrices de l'hyperboloïde sont les asymptotes de l'indicatrice de la surface, et sont, de plus, tangentes aux intersections de la surface par son plan tangent.

Si la surface est à plan directeur, l'hyperboloïde osculateur deviendra un paraboloïde. Ses 2 directrices seront les tangentes aux sections faites dans la surface par 2 plans tangents, ou, ce qui revient au même, les asymptotes de deux indicatrices.

Surface du second degré osculatrice d'une surface de révolution, le long d'un parallèle.

Soit M, un point pris sur le méridien d'une surface de révolution, MI le rayon de courbure du méridien ; I son centre de courbure. On sait que MI est un des rayons principaux, et que MK, portion de la normale au méridien comprise entre ce méridien et l'axe, est le second rayon de courbure. Cherchons une conique qui ait pour axe l'axe de la surface, et qui soit osculatrice en M au méridien, c'est-à-dire qui lui soit tangente en ayant même centre de courbure. En faisant tourner cette conique, elle engendrera une surface osculatrice de la première en tous les points du parallèle M.

Fig. 1.

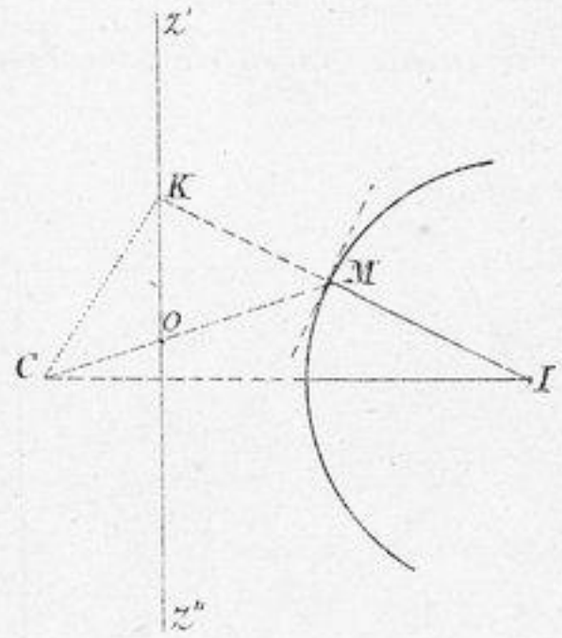
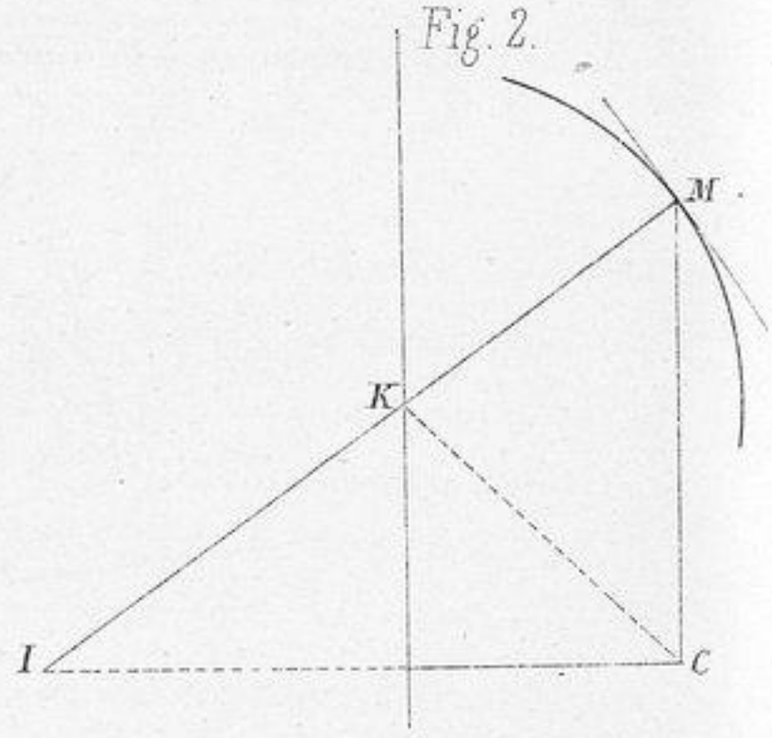


Fig. 2.



Rappelons la construction suivante du rayon de courbure d'une conique (fig. 3) (Voir la Note suivante).

— Note. —

Recherche des rayons de courbure des Sections coniques.

1°. Ellipse et Hyperbole. — Soit M un point de l'Ellipse ; MO le diamètre passant par ce point, et ON son conjugué.

Soit b' le demi-diamètre OM ; a' le demi-diamètre ON, et θ leur angle

Soit M, un point ; O, le centre ; MN la normale, et I le centre de courbure. On a le point I en menant par le point C où la normale rencontre l'axe, une perpendiculaire à cette normale. Joignant le centre de la conique au point M, et du point K de rencontre avec la perpendiculaire précédente, abaissant une perpendiculaire sur l'axe.

Fig. 3.

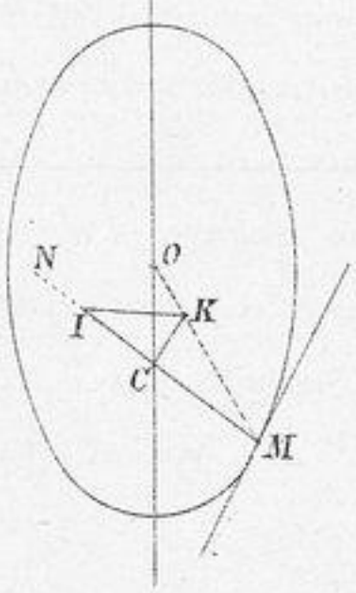
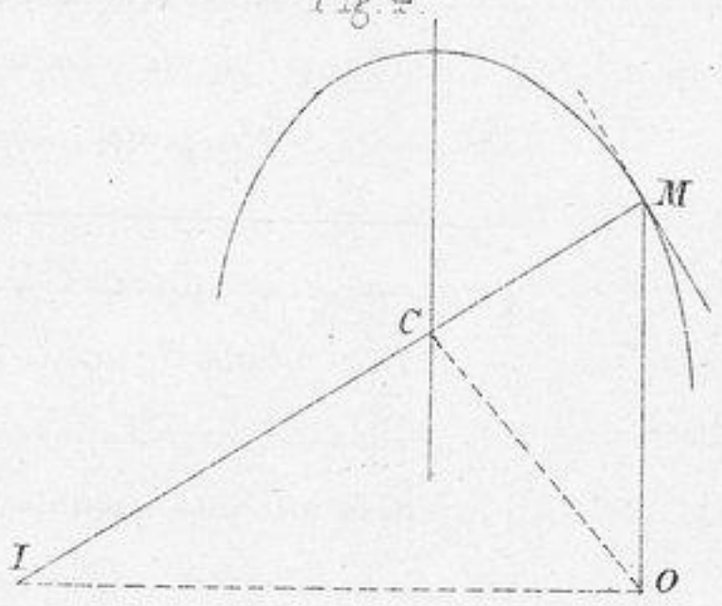


Fig. 4.

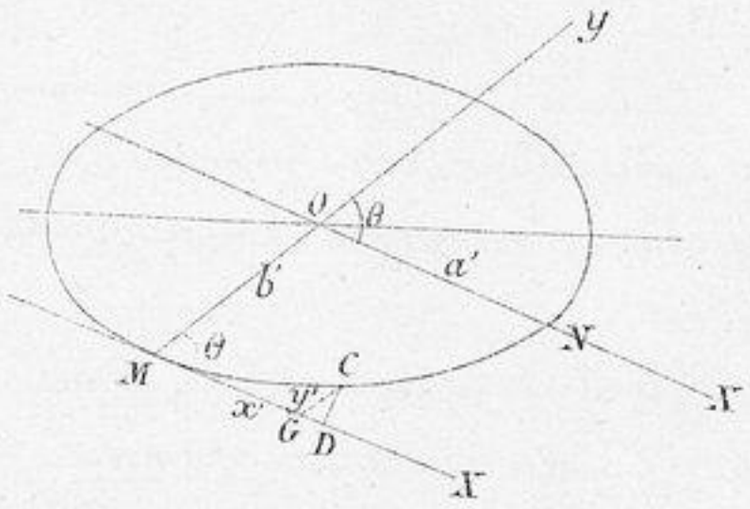


Sa rencontre avec la normale donne en I le centre de courbure.

Cette construction se fait aussi bien sur le petit axe que sur le grand. Elle est générale pour les 3 coniques. — Pour la parabole (fig. 4), le centre étant à l'infini, elle se modifie de la manière suivante :

Rapportons l'Ellipse à ses deux diamètres conjugués ; son équation est :

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$$



Transportons l'origine au point M. A cet effet, changeons dans l'équation y en $(y - b')$, l'équation devient :

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{2b'y}{b'^2} = 0$$

Prenons le point C infiniment voisin du point M, qui est actuellement l'origine. Soient x' et y' ses coordonnées. — Abaissons

Par le point M, on mène la normale MI et la parallèle à l'axe MO.

Par le point C, rencontre de l'axe et de la normale, une perpendiculaire CO à cette normale, jusqu'à la rencontre en O avec la parallèle à l'axe.

Enfin, du point O, on mène une perpendiculaire à l'axe OI, qui donne en I le centre de courbure.

Cela posé, (fig. 1) appliquons pour le méridien donné, la construction

---

la perpendiculaire CD sur la tangente qui est l'axe des x, on aura: $CD = y' \sin.\theta$, et le rayon de courbure a pour expression: $\rho = \frac{\overline{MD}^2}{2\,CD}$ (2e. Expression). Mais à la place de MD on peut prendre MG, c'est-à-dire x', qui n'en diffère que de la quantité du 2e. ordre GD. — On a en effet: $GD = GC.\cos.\theta$, et GC est du 2e. ordre. On aura donc:

$$(2) \qquad \rho = \frac{x'^2}{2y' \sin.\theta}$$

De l'équation (1) on tirera:

$$\frac{x'^2}{2y' \sin.\theta} = \frac{2b'a'^2}{2b'^2 \sin.\theta} - \frac{y'a'^2}{2b'^2 \sin.\theta}.$$

Supprimant le terme $\frac{y'a'^2}{2b'^2 \sin.\theta}$, qui tend vers zéro avec y'; il vient:

$$(3) \qquad \rho = \frac{a'^2}{b' \sin.\theta}.$$

D'après le théorème d'Apolonius on a: $a'b' \sin.\theta = ab$, et par suite: $b' \sin.\theta = \frac{ab}{a'}$; donc, en substituant:

$$(4) \qquad \rho = \frac{a'^3}{ab}$$

Le rayon de courbure d'une Ellipse en un point, a pour expression le cube du demi-diamètre conjugué de celui qui passe par le point, divisé par le produit des demi-axes.

Remarque. — Cette formule s'applique à l'hyperbole.

Rayons de Courbure aux sommets.

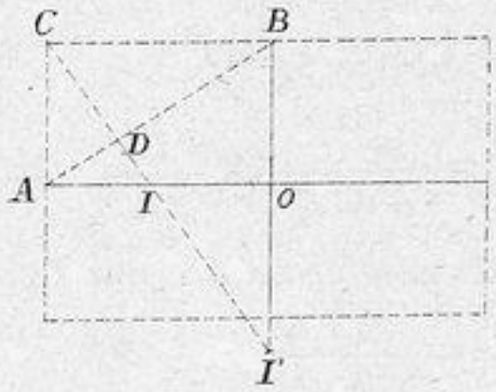
A l'extrémité du grand axe on aura:

$$r = \frac{b^3}{ab} = \frac{b^2}{a};$$

précédente en sens inverse.

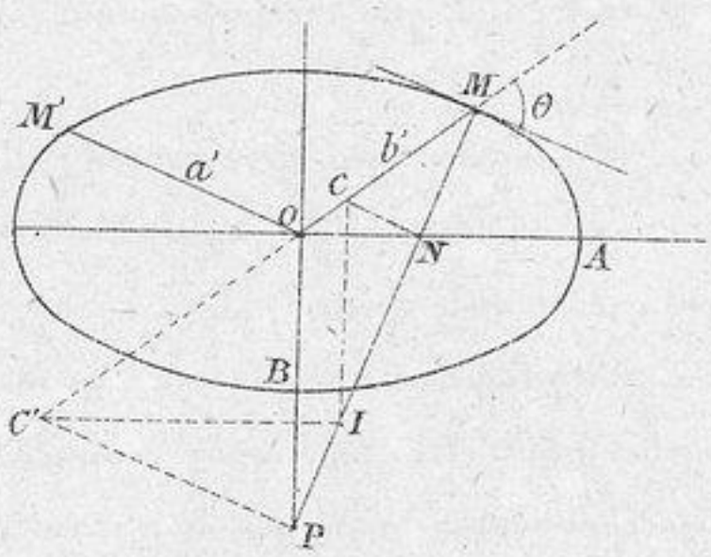
I étant le centre de courbure du méridien, et par suite, de la conique cherchée; Z'Z son axe: Menons KC perpendiculaire sur la normale, IC perpendiculaire sur l'axe. Prenons la rencontre C de ces 2 droites, et joignons CM, nous aurons en O, à la rencontre avec l'axe, le centre de la conique.

A l'extrémité du petit axe, on aura $R = \frac{a^2}{b}$. Ce qui conduit à la construction graphique suivante.



On mène la diagonale AB du rectangle construit sur les demi-axes, et en abaissant du sommet C du rectangle une perpendiculaire CD sur cette diagonale, on a par recoupement avec les axes, en I et en I' les deux centres de courbure.

Construction graphique du rayon de courbure de l'Ellipse ou de l'hyperbole pour un point quelconque



Supposons l'Ellipse rapportée à ses demi-axes, a et b. Soit M un point quelconque; MN la normale recoupant les axes en N et P.

Soit I le centre de courbure du point M; b' le demi-diamètre OM, et a' son conjugué OM'; — θ leur angle.

Nous avons trouvé pour le rayon de courbure, Equation (3):

$$\rho = MI = \frac{a'^2}{b' \sin\theta}$$

Par le point I menons IC parallèle au petit axe et calculons la longueur MC.

On aura par les triangles semblables:

$$\frac{MC}{b'} = \frac{\rho}{MP} \; ; \text{ mais on a (formule connue)} : MP = \frac{a\,a'}{b} \; ;$$

Cette dernière est donc déterminée, puisque l'on connaît son centre, ses deux axes en direction, un point M et la tangente en ce point.

Remarque. — Si la position I du centre de courbure est telle (fig. 2) que MC soit parallèle à l'axe, la conique osculatrice sera une Parabole.

Ayant la Conique osculatrice, en la faisant tourner autour de l'axe, elle engendrera une surface du 2e osculatrice de la surface donnée en tous les points d'un même parallèle.

---

d'où, en substituant les valeurs de ρ et de MP :

$$MC = \frac{\rho b'}{MP} = \frac{a'^2}{b' \sin.\theta} \times \frac{b'}{\frac{aa'}{b}} = \frac{b a'}{a \sin.\theta}.$$

D'un autre côté, élevons NC perpendiculaire sur la normale et calculons MC. — On aura : $MC = \frac{MN}{\sin.\theta}$.

Mais (formule connue) $MN = \frac{ba'}{a}$

Donc : $MC = \frac{ba'}{a \sin.\theta}$, même valeur que ci-dessus.

Ce qui conduit au tracé suivant : Par le point N où la normale rencontre le grand axe, on élève une perpendiculaire à cette normale, jusqu'à la rencontre en C avec le diamètre du point. Par ce point C, on mène une perpendiculaire au grand axe et l'on obtient en I par recoupement avec la normale le centre de courbure.

Remarque. — On aurait pu se servir du petit axe. Prolonger la normale en P sur le petit axe. Elever PC' perpendiculaire sur la normale et abaisser C'I perpendiculaire sur le petit axe.

Cette construction s'applique à l'hyperbole, et même à la parabole, puisque cette dernière courbe peut être considérée comme la limite d'une Ellipse dont le centre s'éloigne indéfiniment tandis que le paramètre reste constant.

Rayon de Courbure de la Parabole.

Soit M un point de la Parabole. — Cette dernière rapportée au diamètre Mx' et à la tangente My' en M, a pour équation $y^2 = 2p'x$, et l'on sait que le paramètre p' est égal à $\frac{p}{\sin^2\theta}$, θ étant l'angle de la tangente en M avec l'axe de la parabole.

Soit C un point infiniment voisin de M ; x' et y' ses coordonnées ; on

Lignes asymptotiques. – On nomme ainsi les lignes tracées sur une surface en tangentes aux asymptotes des indicatrices de tous les points par lesquels elles passent sur la surface. Nous ne les étudierons pas dans ces leçons élémentaires.

Lignes géodésiques. – Ce sont les lignes les plus courtes que l'on puisse tracer d'un point à un autre sur une surface.

---

aura comme ci-dessus:

$$(1)\qquad \rho = \text{Lim.}\ \frac{\overline{MG}^2}{2cD} = \text{Lim.}\ \frac{y'^2}{2x'\sin\theta}\ ;$$ de l'équation de la courbe on tire:

$$\frac{y'^2}{2x'\sin\theta} = \frac{p'}{\sin\theta} = \frac{p}{\sin^3\theta}\ ,\quad \text{donc:}$$

$$(2)\qquad \rho = \frac{p}{\sin^3\theta}\ .$$

Construction Graphique. – Soit N le point où la normale rencontre l'axe; la sous-normale KN est constante et égale à p. On aura donc: $MN = \frac{p}{\sin\theta}$.

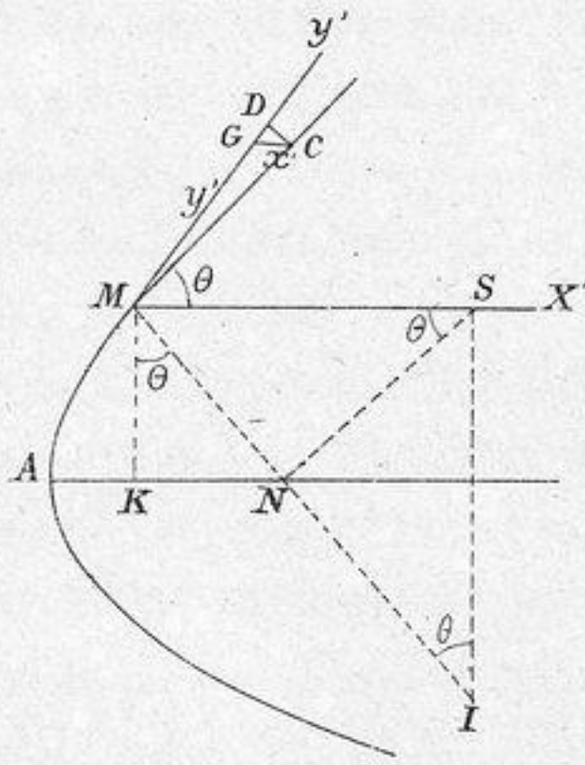
Menons NS perpendiculaire sur la normale.

On aura: $MS = \frac{MP}{\sin\theta} = \frac{p}{\sin^2\theta}$.

Enfin, élevons ST perpendiculaire sur l'axe, et prenons la rencontre en I avec la normale. On aura:

$$SI = \frac{MS}{\sin\theta} = \frac{p}{\sin^3\theta}\ ;$$

Donc $\rho = MI = \frac{p}{\sin^3\theta}$.



On retrouve ainsi la construction indiquée pour l'Ellipse et l'hyperbole.

Rayon de courbure au sommet.

On aura $\theta = 90°$ et $\sin\theta = 1$

$$R = p\ .$$

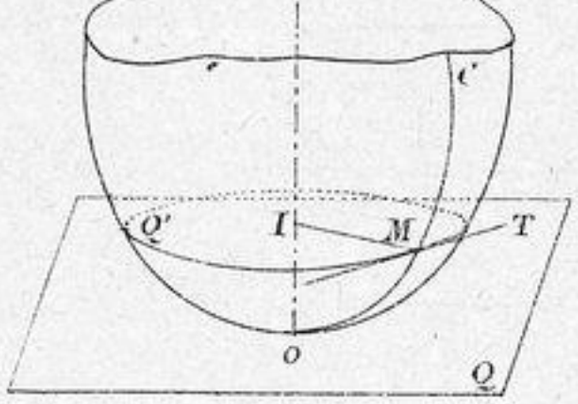
Le centre de courbure au sommet se trouve à une distance de ce sommet, qui est le double de la distance du foyer.

Théorème des Tangentes conjuguées.

Lorsqu'une surface développable est circonscrite à une surface quelconque, la tangente à la courbe de contact et la génératrice de la développable sont conjuguées par rapport à l'indicatrice.

En effet, soit O, un point de la surface ; Q le plan tangent en ce point ; M un point infiniment voisin, situé sur une courbe OC.

Menons le plan tangent en ce point et cherchons l'intersection des plans tangents en M et en O.



Si nous menons par M un plan Q' parallèle au plan Q, il donnera comme section une courbe semblable à l'indicatrice. Le plan tangent en M aura pour trace sur le plan Q' la tangente MT à l'indicatrice ; et cette droite MT, devient, à la limite, l'intersection des 2 plans tangents, c'est-à-dire la génératrice d'une développable qui serait l'enveloppe de ces plans tangents.

D'un autre côté, la courbe de contact, c'est-à-dire le lieu des points de tangence, est la courbe OMC, dont la tangente est, à la limite, le diamètre IM de l'indicatrice.

Or, dans une conique, un diamètre et la tangente à son extrémité sont conjugués ; le Théorème est donc démontré.

Conséquences. — La tangente à la courbe d'ombre propre d'une surface est conjuguée du rayon lumineux du point de contact.

La tangente au contour apparent d'une surface est conjuguée du rayon visuel du point de contour apparent.

Lorsque deux surfaces sont tangentes en un point, les lignes d'ombres propres n'ont pas les mêmes tangentes, à moins que les surfaces ne soient osculatrices.

La propriété des tangentes conjuguées se conserve en projection, car une conique et deux de ses diamètres conjugués se projettent suivant une autre conique et deux de ses diamètres conjugués.

Lignes d'ombre ou de perspective sur des surfaces à courbures opposées.

Coupons par un plan un corps limité ; nous obtiendrons ainsi une section plane. Si le plan sécant passe par le point lumineux, les tangentes menées du point éclairant à la section sont les rayons lumineux tangents au corps et situés dans ce plan. Les points de contact de ces tangentes sont des points de la courbe d'ombre propre sur le corps. Ces points sont dits réels ou virtuels, suivant que dans leur voisinage les rayons lumineux sont extérieurs ou intérieurs. Parmi les points réels, il y en a qui sont utiles au point de vue des ombres, et d'autres qu'il est inutile de conserver. Les arcs formés par la suite des points de contact sont réels ou virtuels. Les points d'intersection de ces arcs sont dits points de passage ou points limites.

Théorème. — En un point limite, le rayon lumineux est une asymptote de l'indicatrice de la surface du corps.

En effet, puisqu'il s'agit d'un point limite si on le considère comme appartenant à l'arc réel qu'il termine, il appartient à une tangente extérieure, mais il appartient aussi à une tangente intérieure, comme étant l'extrémité d'un arc virtuel. Le rayon lumineux est donc d'un côté, intérieur, de l'autre côté, extérieur à la surface. En ce point, la section faite par le plan auxiliaire présente une inflexion, et le rayon lumineux est tangent en ce point d'inflexion. Par suite, c'est une droite osculatrice à la surface. Or, on sait qu'une pareille droite est une asymptote de l'indicatrice comme répondant à un rayon de courbure infini. Comme dans une hyperbole l'asymptote est à elle-même sa conjuguée, on voit aussi qu'aux points limites, les rayons lumineux sont tangents à la courbe d'ombre.

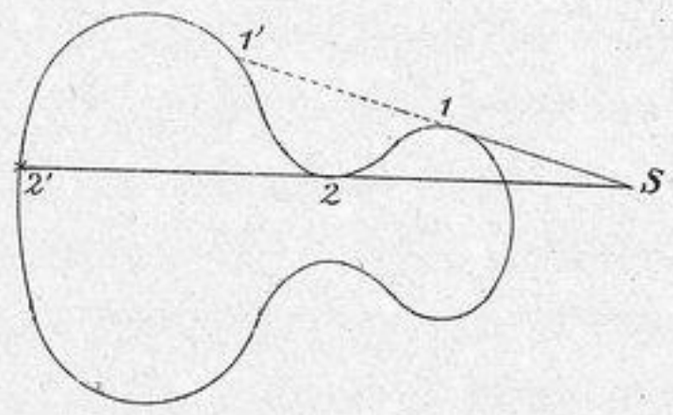
Réciproquement : Si du point lumineux on mène une tangente à la courbe d'ombre, le point de contact sera un point limite.

En effet, la conjuguée du rayon lumineux se confond avec le rayon lumineux lui-même. Donc, celui-ci est une asymptote de l'indicatrice ; par suite il est osculateur à la surface, et le point où il touche cette surface est un point limite.

Dans la pratique du dessin, si des projections du point éclairant on mène des tangentes aux projections de la courbe d'ombre, les points de contact sont les projections des points limites. Toutefois il faut s'assurer que les plans tangents à la surface aux points déterminés ne sont pas perpendiculaires aux plans de projection, car dans ce cas, la tangente à la projection de la courbe peut ne pas être la projection de la tangente à la courbe de l'espace.

On a vu que si une courbe a sa tangente passant par le point visuel, cette courbe présente en perspective un rebroussement, et que le cône perspectif présente lui-même un rebroussement le long de cette tangente. Le cône d'ombre est formé par les rayons s'appuyant sur la courbe d'ombre. Les génératrices qui sont tangentes à la courbe d'ombre sont des génératrices de rebroussement pour le cône. Ainsi, les rayons lumineux des points limites sont des génératrices de rebroussement du cône d'ombre.

Ombres portées. — Je coupe le corps par un plan passant par le point lumineux. La courbe d'ombre portée est le lieu des points tels que (1') (2'). A un point réel de la courbe d'ombre propre correspond un point réel de la courbe d'ombre portée. Un point d'ombre virtuel de la 1ère courbe donne un point virtuel de la 2e. Les points où, à la courbe réelle, succèdent des points de la courbe d'ombre portée virtuelle, sont dits points de passage de la courbe d'ombre portée.



Les points de passage appartiennent à la fois à la courbe d'ombre propre et à la courbe d'ombre portée.

En effet, pour passer d'un rayon tel que S.1.1' à un rayon tel que S.2.2', il faudra nécessairement que, dans une position intermédiaire, le point 1' vienne rejoindre le point 1 (fig. 2). Alors le rayon aura 3 points confondus communs avec la surface, c'est-à-dire sera une

asymptote de l'indicatrice. Ce point sera donc un point limite de la courbe d'ombre propre, tel qu'il a été défini plus haut, mais il sera aussi un point limite de la courbe d'ombre portée, puisque le point (1') de cette courbe, qui était d'abord réel (fig.1), c'est-à-dire situé au-delà du point de contact relativement au point lumineux, vient se placer (fig.3) entre ce point lumineux et le point 1 où le rayon touche la surface.

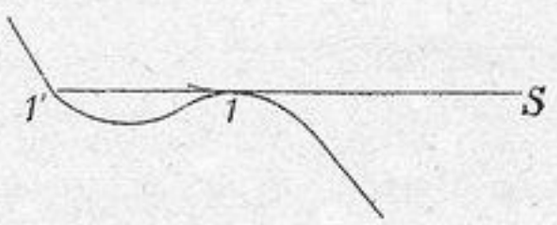


Fig. 1

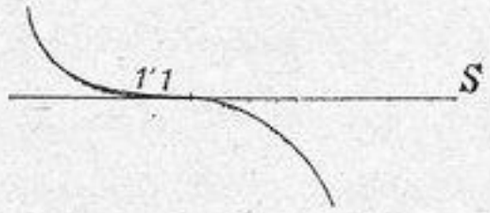


Fig. 2.

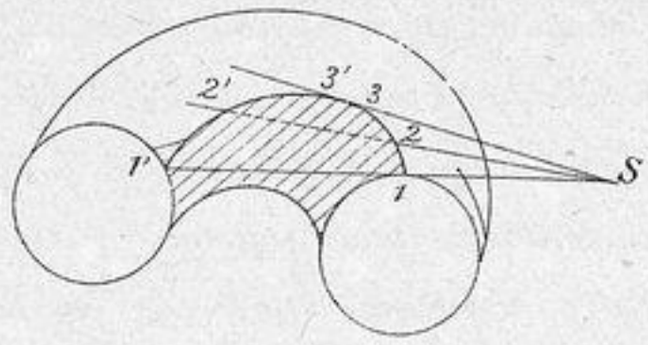
Fig. 3.

Construction de la tangente en un point de la courbe d'ombre portée.

Soit le rayon lumineux S1 qui donne le point 1' de la courbe d'ombre portée. La tangente en 1' est l'intersection du plan tangent en ce point à la surface, et du plan tangent au cône d'ombre le long de la génératrice S1. Ce plan est le même que le plan tangent au point 1 de la surface. Donc la tangente au point 1' est l'intersection des plans tangents à la surface aux points 1 et 1'.

En un point limite, tel que 1.1' (fig.2) ces deux plans tangents dont les points de contact sont infiniment voisins, d'après le théorème des tangentes conjuguées, se coupent suivant une droite conjuguée de la ligne qui joint leurs points de contact. Cette dernière ligne est l'asymptote de l'indicatrice. Donc: la tangente à la courbe d'ombre portée aux points limites est le rayon lumineux lui-même.

Nous avons vu qu'aux points limites, la courbe d'ombre propre avait pour tangente le rayon lumineux. Donc: Aux points limites, les courbes d'ombre propre et d'ombre portée sont donc tangentes entre elles. Prenons par exemple un tore; 1, 2, sont des points de la courbe d'ombre propre; 1'2' les points correspondants de la courbe d'ombre



autoportée. Lorsque les points tels que 1 et 1' se confondent en 33', on a les points limites, où les deux courbes se raccordent. La tangente de raccordement est le rayon lumineux lui-même.

Cherchons comment se coupent les courbes d'ombre propre et d'ombre portée. — Nous avons appelé plus haut, ces points des points de perte et nous avons démontré que la tangente à la courbe d'ombre portée était le rayon lumineux.

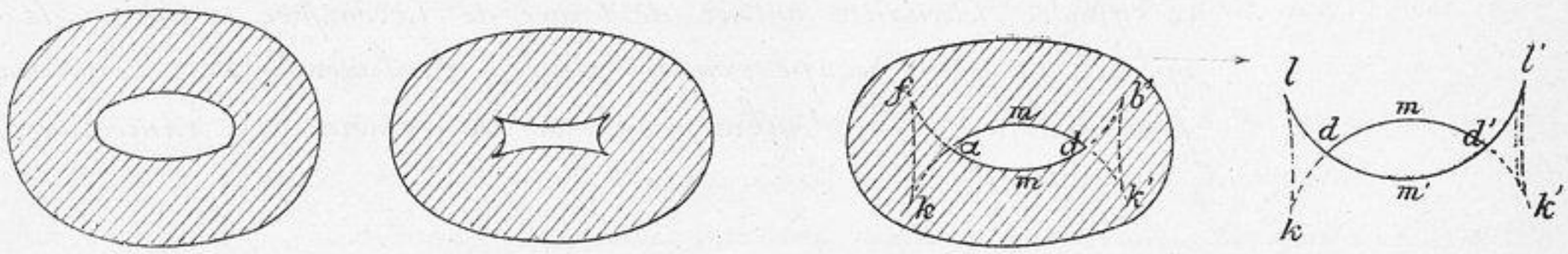
De tels points sont donnés par des rayons bi-tangents à la surface du corps. La tangente à la courbe d'ombre portée est l'intersection du plan tangent au point de la courbe d'ombre portée et au point où le rayon lumineux s'appuie d'abord sur le corps. Cette intersection est le rayon lumineux lui-même. Mais la tangente à la courbe d'ombre propre est la conjuguée du rayon lumineux. Donc, en un point d'intersection de la courbe d'ombre portée et de la courbe d'ombre propre, les tangentes à ces deux courbes sont deux droites conjuguées de l'indicatrice.

On retrouve comme cas particulier le théorème démontré plus haut sur les points limites :

Les rayons tangents que nous venons de considérer sont des génératrices doubles du cône d'ombre.

Les principes précédents s'étendent aux contours apparents en perspective et en projection ; mais certaines parties de ces courbes utiles en projection et en perspective peuvent ne plus l'être dans le cas des ombres. Prenons pour exemple le Tore, et supposons qu'on le projette sur le plan du tableau, en le plaçant obliquement par rapport à ce plan. Nous le considérons comme enveloppe d'une sphère dont le centre reste sur une circonférence fixe. Cette circonférence se projette suivant une ellipse, et la sphère mobile a à chaque instant pour contour apparent une circonférence de cercle dont le centre est sur cette ellipse. L'enveloppe se compose donc de deux courbes parallèles à l'ellipse, dont on a déjà étudié la forme, et que

rappellent les figures suivantes. Ces courbes sont des développantes de la développée de l'Ellipse.



l et l' sont les points limites séparant la partie réelle de la partie virtuelle. Les arcs lK et $l'K'$ sont des arcs virtuels ; Kd et $K'd'$ sont des arcs réels, mais cachés ; d et d' sont les traces de deux rayons bitangents à la surface. Les arcs ld, $l'd'$, utiles si l'on considère la projection de la surface, cessent de l'être si l'on cherche seulement l'ombre portée.

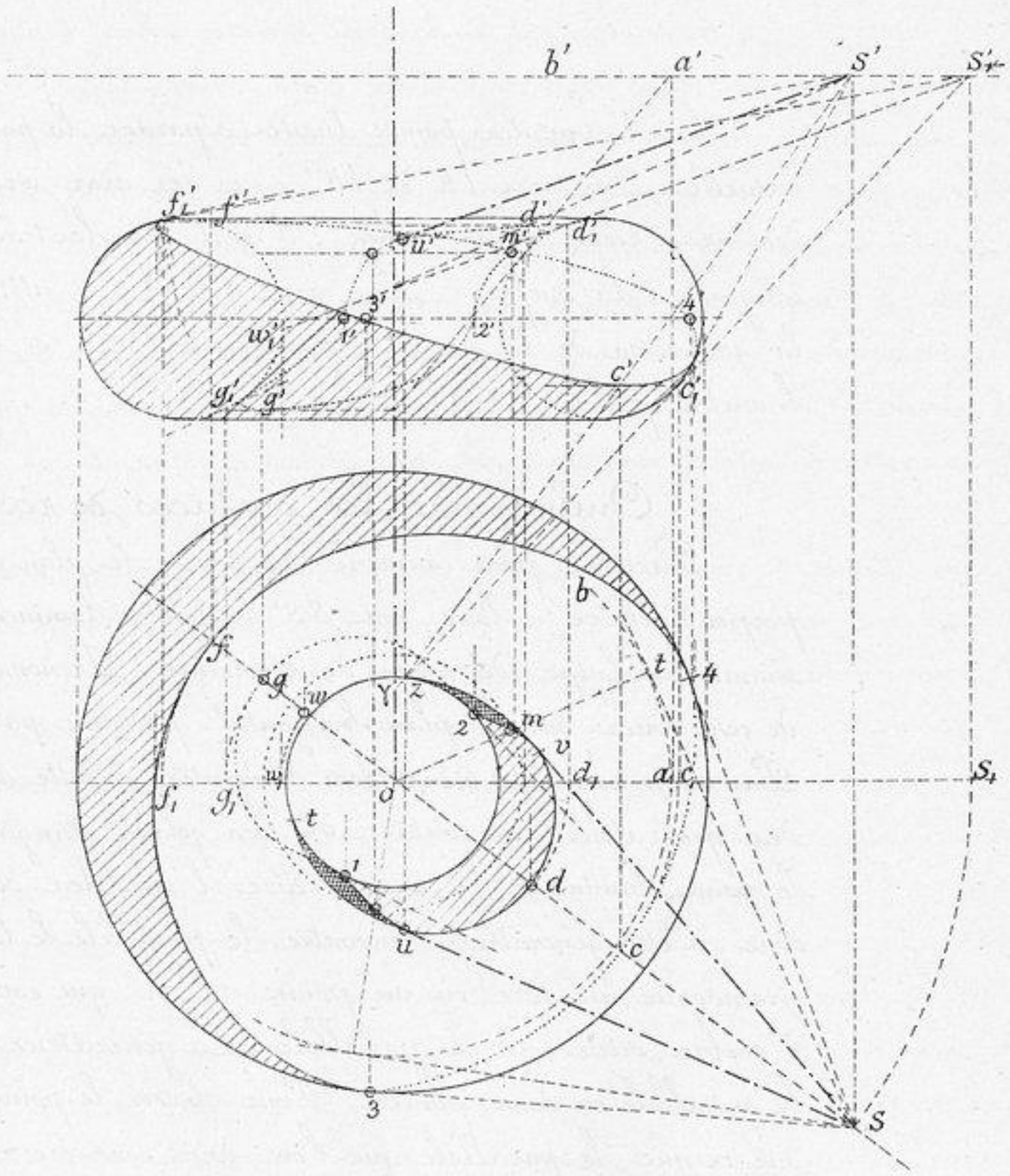
Ombres sur les surfaces de révolution.

Prenons pour exemple un tore ; le plan horizontal étant supposé perpendiculaire à l'axe, soit SS' le point lumineux. Considérons le tore comme enveloppe de cônes de révolution. Prenons la trace $ab - a'b'$ d'un de ces cônes sur le plan horizontal passant par le point lumineux. Par ce point, je mène des tangentes à cette trace, et j'en déduis l'une des génératrices de contact et des plans tangents menés au cône par le point lumineux, c'est-à-dire l'une des courbes d'ombre sur le cône. Cette génératrice rencontre le parallèle le long duquel le cône est circonscrit au tore en un point m, m' qui est le point de la courbe d'ombre situé sur ce parallèle. La génératrice rencontre en projection le parallèle en deux points. Pour choisir le point utile, on s'appuie sur ce que le parallèle que l'on doit considérer et la base du cône sont ou ne sont pas situés du même côté du sommet.

Le plan vertical OS est évidemment un plan de symétrie.

La courbe a donc dans ce plan ses points les plus hauts et les plus bas. Pour trouver ces points, il suffit de remarquer que

pour chercher les points de la courbe qui sont sur un méridien quelconque, on peut regarder le tore comme enveloppe d'un cylindre de révolution dont la section droite est la section méridienne du tore, ce cylindre tournant autour de l'axe de la surface. Dans le cas spécial qui nous occupe, on déterminera facilement les génératrices formant la courbe d'ombre propre de ces cylindres en ramenant leur



section droite, ainsi que le point lumineux dans le plan méridien de front.

Dans ce mouvement, le point SS' vient en $S_1S'_1$. Les tangentes menées du point S'_1 au méridien principal, sont $S_1c'_1$ (réelle), ——

$s'_1 d'_1$ (réelle) — $s'_1 f_1$ (réelle) et $s'_1 g'_1$ (virtuelle) — Ce dernier rayon donne en W_1' ramené en WW', un point de l'ombre autoportée.

Ces points seront ramenés facilement dans le méridien SO soit en traçant des cercles en projection horizontale, soit en se servant du cône des tangentes et en utilisant les points tels que γ où la tangente $S'_1 C'_1$ vient rencontrer l'axe.

En ces points les tangentes sont horizontales en projection verticale, et perpendiculaires à SO, sur la projection horizontale.

Enfin les points sur les contours apparents horizontaux ou verticaux s'obtiennent en menant des tangentes à ces contours par les projections du point lumineux.

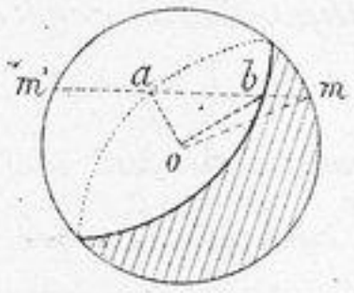
La courbe intérieure d'ombre ainsi obtenue est virtuelle sur une certaine étendue, limitée par les points de passage. On obtiendra ces points sur la courbe en lui menant, par le flambeau, les tangentes telles que Su — $S'u'$, et vérifiant que les points u et u' sont sur une même ligne de rappel.

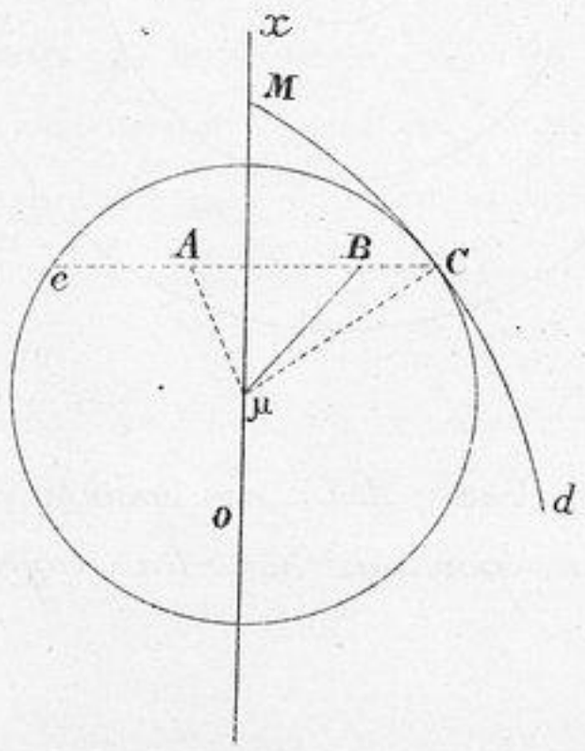
Aux points de passage u et v commence la courbe d'ombre autoportée, tangente également en u et v, aux rayons lumineux.

On a en WW' le point de cette courbe située dans le méridien OS. — Ce point est au-dessous de l'équateur, ainsi que le fait voir le point W_1', par suite, la courbe d'ombre autoportée rencontre en deux points t et z, le petit équateur.

Autre Méthode pour la détermination des ombres des surfaces de révolution.

Considérons la surface de révolution donnée comme enveloppe de sphères, et supposons-la éclairée par des rayons parallèles.





Soit ox l'axe de révolution, Mcd la courbe méridienne, et μc la normale en un point.

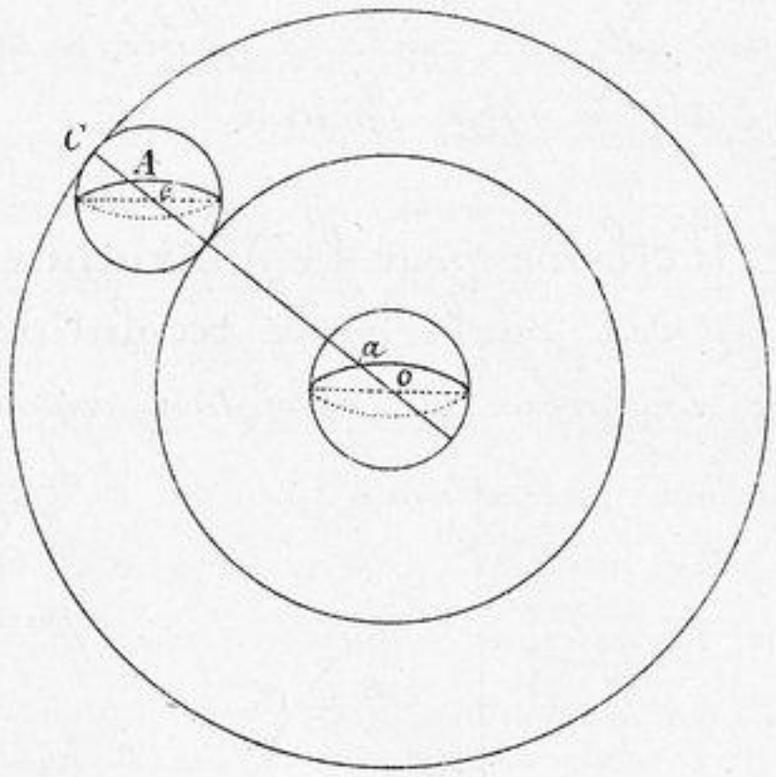
La circonférence ayant μc pour rayon est la

courbe méridienne, de la sphère tangente à la surface le long du parallèle c c ; la courbe d'ombre sur cette sphère est en projection une ellipse dont les rencontres avec la droite c c donnent deux points de la courbe d'ombre de la surface. Pour les diverses sphères auxiliaires, ces ellipses sont homothétiques et semblables ; il suffit donc de construire pour une seule de ces sphères la projection de la courbe d'ombre.

Soit o le centre de la projection de la sphère auxiliaire que l'on choisit pour la construction, je mène par o une parallèle om à la normale μ c de la surface de révolution ; par m je mène une parallèle m m' à la droite c c ; j'obtiens en a et b deux points sur l'ellipse d'ombre. Je mène par μ des parallèles μA . μB à oA . oB, et les points A et B sont deux points d'ombre sur la surface de révolution donnée.

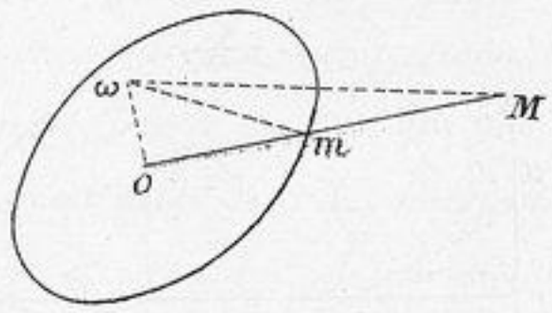
Ces constructions se simplifient si le flambeau est dans le plan du méridien principal, ou si les rayons lumineux sont parallèles au plan vertical.

Dans le cas du tore, en projection horizontale, il y a une simplification. Je prends pour sphère auxiliaire celle qui engendre le tore par sa rotation autour de l'axe. Je mène un méridien oc et la sphère inscrite au tore ayant pour centre le point e sur ce méridien ; je mène la sphère égale ayant o pour centre. Les courbes sur ces deux sphères sont deux ellipses égales ; ces ellipses rencontrent le méridien oc en des points a, A ; le point A est un point de l'ombre cherchée ; d'ailleurs il est évident que l'on a :



aA = oe ; donc, tous les points de la courbe d'ombre du tore s'obtiendront en portant sur les rayons vecteurs de l'ellipse centrale

à partir des points de cette ellipse une longueur constante égale à oc. La courbe d'ombre est donc une conchoïde d'ellipse.



On peut, en s'appuyant sur cette remarque, construire immédiatement la normale, et par suite la tangente à la courbe d'ombre. Rappelons qu'une courbe et sa conchoïde ont même sous-normale aux points correspondants m et M.

Traçons la perpendiculaire oω au rayon omM : la normale en m à l'ellipse rencontre cette droite en ω ; la normale à la conchoïde en M sera la droite ωM.

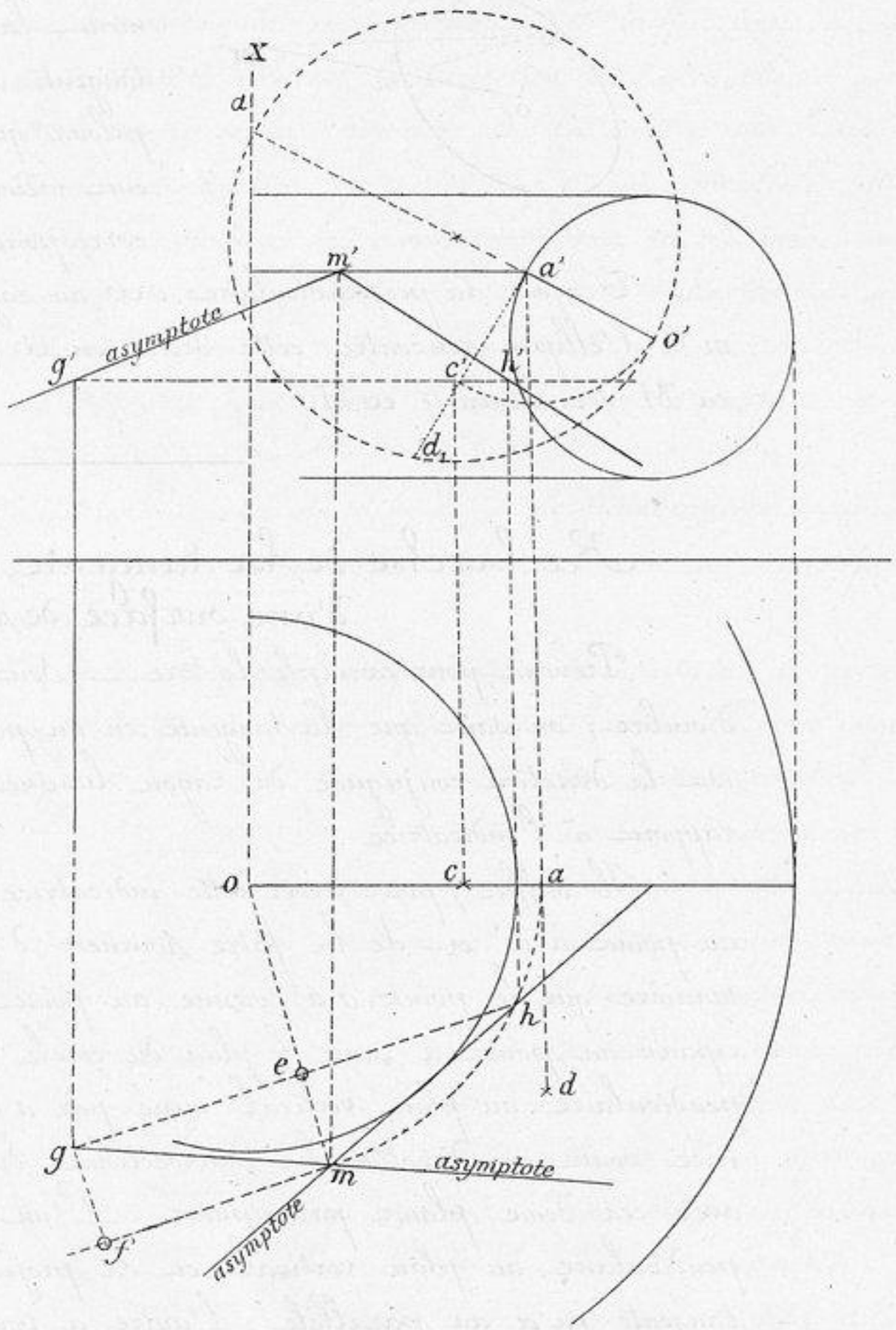
Recherche de la tangente à la courbe d'ombre d'une surface de révolution.

Prenons pour exemple le tore. — Soit m m' un point de la courbe d'ombre ; on sait que la tangente en un point à la courbe d'ombre est la direction conjuguée du rayon lumineux passant par ce point par rapport à l'indicatrice.

Il suffit, pour avoir cette indicatrice, de construire l'indicatrice au point a a' et de la faire tourner d'un angle convenable, de manière que le point a a' vienne au point m m'. Les plans principaux au point a sont le plan du cercle méridien et le plan perpendiculaire au plan vertical mené par a o'. Les axes de l'indicatrice sont en direction les intersections du plan tangent en a a' avec ces deux plans principaux. L'un de ces axes est donc perpendiculaire au plan vertical, et sa projection horizontale est la tangente en a au parallèle ; l'autre a pour projection verticale la tangente en a' au cercle méridien, et pour projection horizontale la droite oa.

Je prends pour longueur de ce dernier axe le rayon du cercle méridien. Comme cet axe est parallèle au plan vertical, il suffit de porter $a'c' = a'o$ sur la tangente en a'. On sait aussi que

l'autre axe est moyen proportionnel entre les deux rayons de courbure principaux, c'est-à-dire entre a'o' et a'd. Si donc on décrit sur do' comme diamètre une circonférence, et si l'on prend son intersection d_1 avec la tangente d'c', on aura en a'd_1 la longueur du second axe de l'indicatrice.



En portant sur la tangente en a au parallèle $ad = a'd_1$, on aura en ad la projection du second axe de l'indicatrice. Je fais tourner la figure autour de l'axe X, de manière que le point a vienne en m,

et j'ai, en me, mf, les projections horizontales des axes de l'indicatrice.

Les diagonales du rectangle construit sur me, mf, seront les projections horizontales mg, mh des asymptotes de l'indicatrice.

Pour avoir les projections verticales de ces asymptotes, on remarque que gh, parallèle à mf, est une horizontale du plan de l'indicatrice. La projection verticale de cette horizontale est la parallèle à la ligne de terre menée par c', puisque le point cc', dans la rotation, n'a pas changé de hauteur. Les points g et h sont donc projetés verticalement en g' et h', et $m'g'$. $m'h'$ sont les asymptotes de la projection verticale de l'indicatrice.

En prenant les directions conjuguées des projections du rayon lumineux passant par le point $m\,m'$ par rapport aux projections des asymptotes de l'indicatrice, on aura les projections de la tangente à la courbe d'ombre.

Objet de la 7e Epure.

On demande de trouver les ombres propres et autoportées d'un tore, ainsi que ses ombres portées sur le plan horizontal, en supposant les rayons lumineux parallèles entre eux et au plan vertical.

On déterminera directement un point sur un parallèle quelconque, par la méthode des Cônes circonscrits ou par celle des sphères, et on donnera le tracé de la tangente en ce point, en faisant usage de l'indicatrice.

Les points importants de l'épure seront trouvés directement. Les points de passage seront obtenus après coup, en menant sur les deux projections à la courbe d'ombre propre, des tangentes parallèles au rayon lumineux.

L'ombre portée sur le plan horizontal s'obtiendra, en prolongeant les rayons lumineux des points de l'ombre propre trouvés directement, et en prenant les enveloppes des ombres portées par les parallèles.

L'ombre autoportée se trouvera par la méthode des projections

obliquer, en se servant de l'ombre portée sur le plan horizontal.

En prenant les ombres portées par des parallèles très-rapprochées, on verra l'enveloppe de ces ombres accuser des rebroussements, ce qui permettra de vérifier de nouveau les points de passage.

Surfaces topographiques.

L'étude des surfaces topographiques est le complément de la méthode des projections cotées.

On nomme Surfaces topographiques, les surfaces formées par le sol. Généralement elles ne sont rencontrées par une verticale qu'en un seul point.

Les sections horizontales faites dans ces surfaces se nomment des lignes de niveau. — On représente les surfaces topographiques par un certain nombre de lignes de niveau équidistantes et cotées. La surface n'est par ainsi rigoureusement déterminée ; elle ne l'est qu'approximativement. Il en résulte que tous les problèmes concernant les surfaces topographiques ne sont susceptibles que de solutions approximatives.

1er Problème — Section faite dans une surface topographique par un plan quelconque.

Ce plan est défini par une ligne de pente cotée. (fig. 1)

On mène les horizontales du plan du même côté que les lignes de niveau de la surface. Les points d'intersection de ces droites avec les lignes de niveau correspondantes sont des points de l'intersection cherchée. On joint ces points par un trait continu, et l'on regarde la ligne ainsi tracée comme la section de la surface par le plan donné.

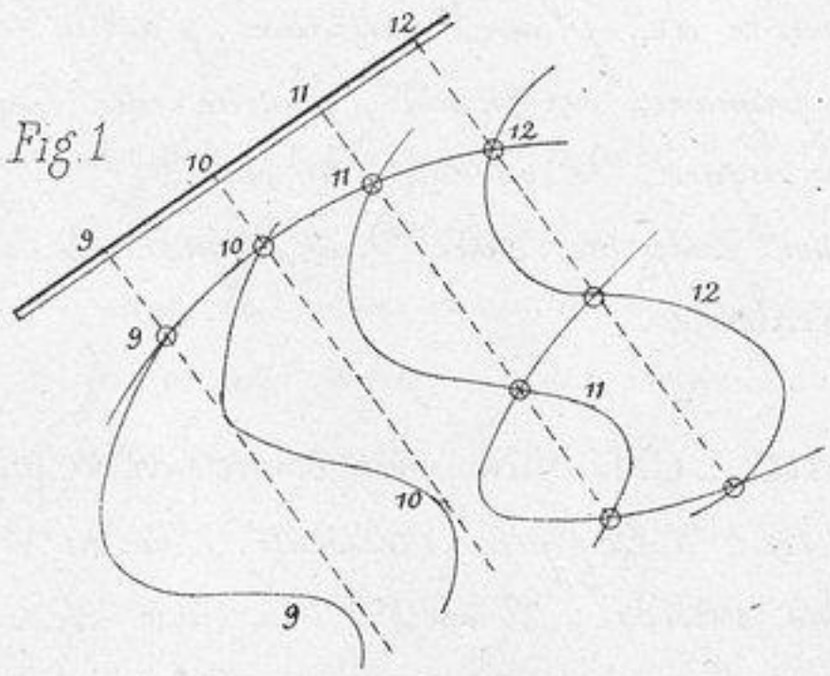


Fig. 1

Supposons (fig. 2) le plan donné vertical et défini par sa trace X.Y. On peut alors rabattre la section sur un plan horizontal quelconque.

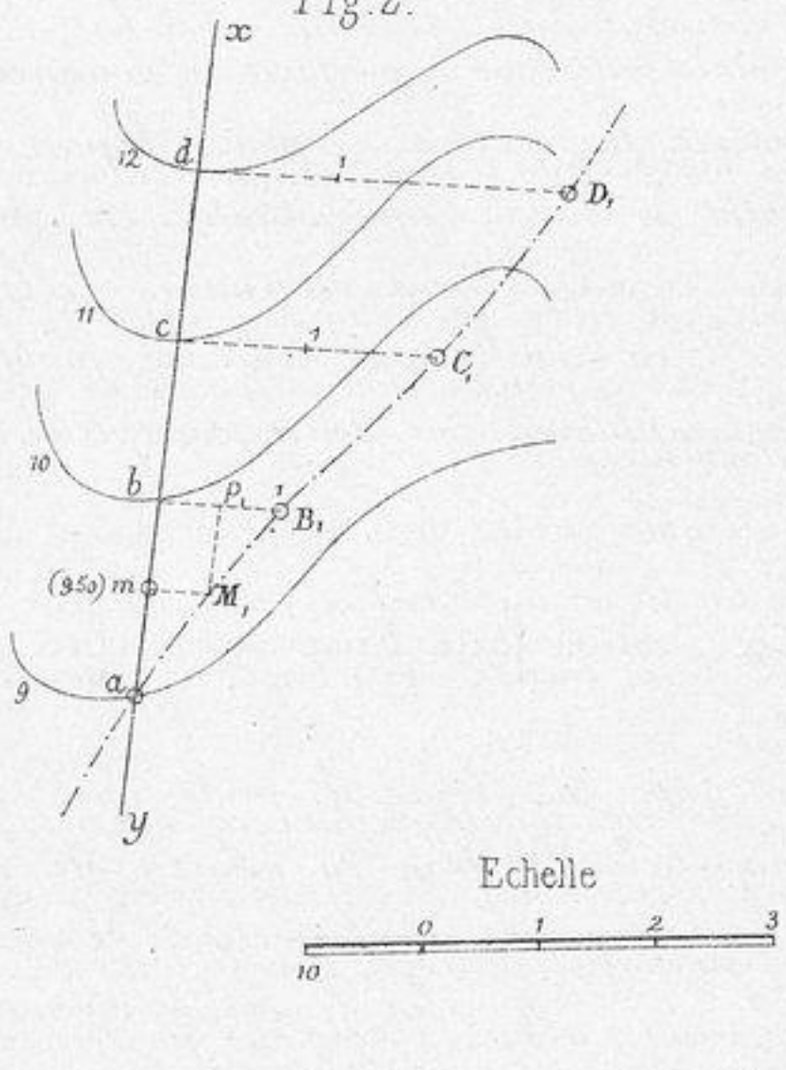
Rabattons par exemple,

sur le plan horizontal coté 9.

Le plan coupe la ligne de niveau (10) en un point b qui se rabat en B_1 tel que bB_1 = l'unité de l'échelle du dessin.

Ce plan coupe de même la ligne de niveau (11) en un point qui se rabat en C_1, tel que cC_1 = deux unités de l'échelle du dessin.

Fig. 2.



Echelle

On voit comment on obtiendrait les rabattements des points d'intersection du plan avec les autres lignes de niveau. En joignant la suite des points $A_1 B_1 C_1 \ldots\ldots$, on aura approximativement le profil de la section.

Pour avoir la position du point de la section ayant une cote donnée, la cote 9.50 par exemple, je prends le milieu p_1 de bB_1 ; j'élève en p_1 une perpendiculaire à bB_1. Cette droite rencontre le profil de la section en un point M_1 qui est le point cherché, dont la projection est m.

Si je fais la même construction pour un certain nombre de plans verticaux, j'aurai une suite de points de cote 9.50. En joignant ces points, j'aurai une ligne de niveau comprise entre les lignes de niveau (10) et (9).

Une ligne ainsi comprise entre deux lignes de niveau données s'appelle ligne intercalaire.

2e Problème. — Cote d'un point donné par sa projection horizontale.

Reportons-nous à la figure précédente. Soit m le point donné, je mène par m un plan vertical. Soit XY la trace de ce plan vertical sur le plan horizontal (9).

Je construis le profil de la section faite dans la surface par ce plan en élevant en m une perpendiculaire mM_1, j'obtiens le

point M_1.

mM_1 détermine la cote du point m.

3e Problème. — Intersection de deux surfaces topographiques.

Ces deux surfaces sont représentées par des lignes de niveau.

Les points d'intersection des lignes de niveau de même cote sont des points de l'intersection cherchée. Je joins tous les points par un trait continu, et j'obtiens ainsi la ligne cherchée.

4e Problème. — Intersection d'une surface topographique et d'une droite.

Je mène par la droite un plan quelconque, je cherche l'intersection de la surface et du plan, et je prends les intersections de la droite avec la section ainsi déterminée.

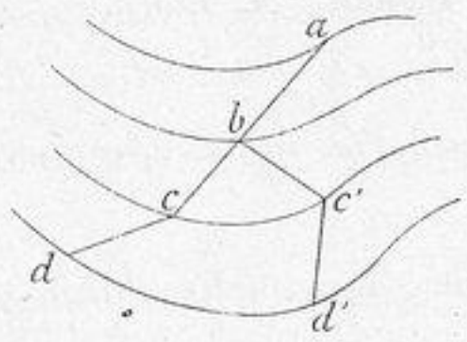
Ce procédé est applicable si au lieu d'une droite on a une courbe quelconque. On mène par la ligne une surface; on cherche l'intersection de cette surface avec la 1ère, et ensuite les points d'intersection de cette ligne avec la ligne donnée.

On choisit comme surface auxiliaire un cylindre ayant pour directrice la courbe donnée, et dont les génératrices sont horizontales. Les intersections de ces génératrices avec les lignes de même cote de la surface donnée, servent alors à résoudre facilement le problème.

Lignes d'égale pente. — On appelle ligne d'égale pente, une ligne telle que la tangente en chacun de ses points ait la même inclinaison sur le plan horizontal. Si nous considérons le cylindre vertical qui projette cette ligne, les tangentes font constamment le même angle avec les génératrices, et la ligne d'égale pente est une hélice tracée sur ce cylindre. On ne peut tracer qu'approximativement une ligne d'égale pente sur une surface donnée. On ne connaît exactement que les intersections de la surface par des plans horizontaux équidistants, et l'on admet que les cordes d'intersection de la ligne d'égale pente sont également inclinées sur le plan horizontal:

comme, du reste, leurs extrémités sont à des niveaux dont la différence est constante, il s'ensuit que les longueurs de leurs projections sont égales. Ainsi, pour tracer de a une ligne ayant une pente donnée, il suffira de décrire de a un arc de cercle de rayon égal à la projection de la corde qui fait l'angle donné avec le plan horizontal : on aura ainsi b ; de même pour c et ainsi de suite. On obtient ainsi en général deux directions à partir de chaque point. De b par exemple, on pourrait prendre la seconde direction bc' au lieu de bc, et l'on aurait obtenu c' en faisant ce que l'on appelle un lacet.

Fig. 3.

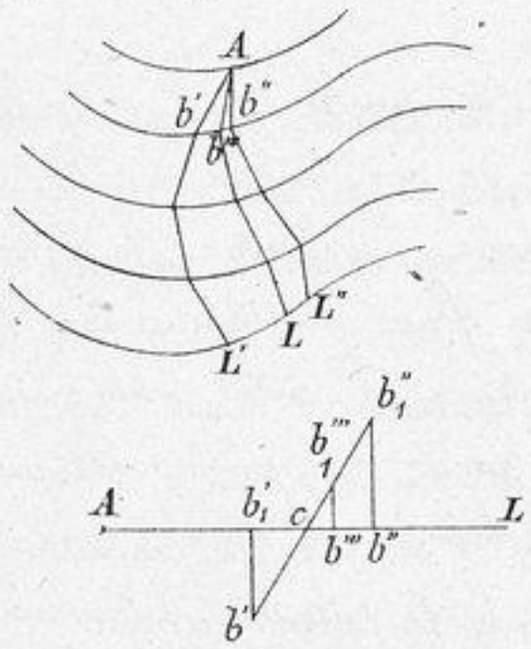


Trouver une ligne d'égale pente partant d'un point A, et aboutissant à un point donné L.

On connaît la distance AL et la différence de cote de ces deux points ; on connaît donc à peu près la pente qu'il faut choisir pour arriver près de L. — Soit p cette pente.

On choisit approximativement une longueur Ab' comme rayon ; on a : $Ab' = \frac{1}{p}$; poursuivant comme précédemment, on arrive en L' voisin de L, puis en L'' pour une autre longueur Ab' peu différente de Ab, puis en L''', ... &c. — Portons maintenant sur une droite L à partir de A les longueurs Ab', Ab'', Ab''', et des points b'b''b''' élevons des ordonnées égales à LL', L'L'' ; la courbe formée par les points b'_1 b''_1 b'''_1 ainsi obtenus, est une courbe d'erreur et détermine par son intersection avec L le segment Ac qui satisfait à la question.

Fig. 4.



Lignes de plus grande pente.

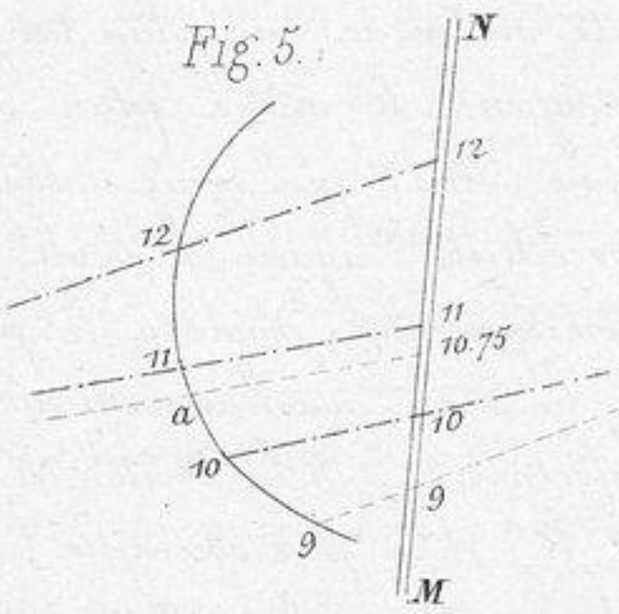
Une telle ligne a pour tangente en chacun de ses points la ligne de plus grande pente du plan tangent en ce point, c'est donc la trajectoire orthogonale des lignes de niveau.

Quand la surface est à courbures opposées et que le plan tangent est horizontal, on a ce que les topographes appellent un col.

Plan tangent à une courbe cotée et passant par une droite donnée.

Joignons les points de même cote, sur la droite MN et sur la courbe ; nous obtenons ainsi des horizontales s'appuyant sur la droite et sur la courbe, ou les génératrices d'un conoïde dont le plan directeur est le plan horizontal.

Fig. 5.

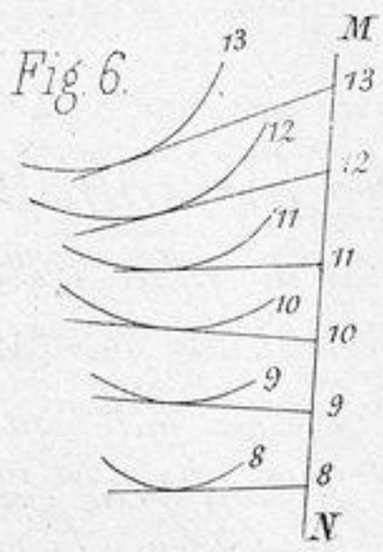


Mais d'après une remarque faite à propos du conoïde droit, le point de tangence du plan cherché est sur une génératrice singulière, c'est-à-dire sur une génératrice telle que la génératrice infiniment voisine lui est parallèle.

Il suffira de voir pour quelle cote 2 génératrices voisines seront sensiblement parallèles, et de prendre l'intersection de la génératrice correspondante et de la courbe. Ici, la cote est 10.75 et le point a est approximativement le point cherché.

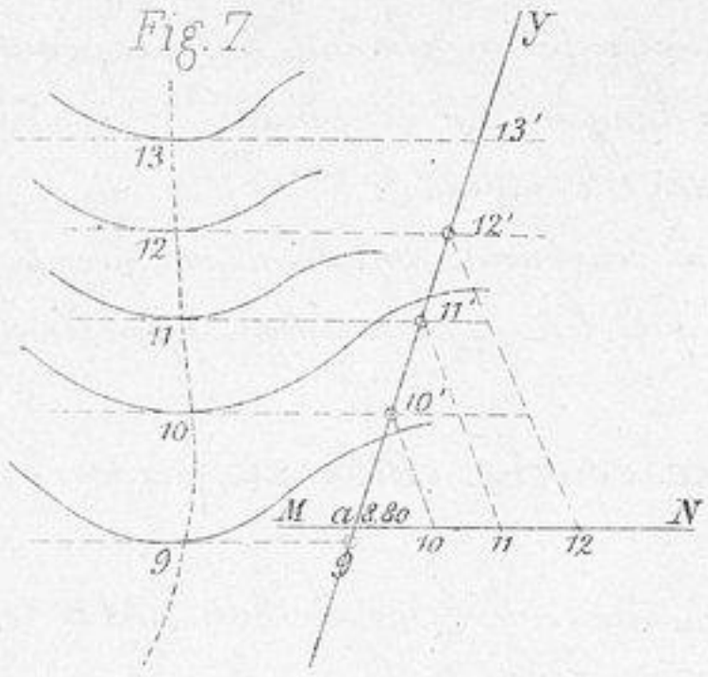
Même solution s'il s'agit non plus de courbe, mais de surfaces topographiques.

Fig. 6.



Pour avoir le plan tangent, on mène par les points de la droite des tangentes aux courbes de même niveau,

Fig. 7



et on cherche parmi ces horizontales celles pour lesquelles on a sensiblement des droites parallèles. — Ici les droites sont parallèles entre 9 et 10

Quand la droite donnée est horizontale, cette construction n'est plus applicable. On mène alors (fig. 7) des tangentes aux courbes de niveau, parallèles à la ligne donnée ; elles déterminent un cylindre circonscrit. Le plan tangent mené à ce cylindre sera tangent à la surface. Pour le déterminer, coupons le cylindre par un plan vertical XY ; — il coupe la droite en un point a, et le plan tangent suivant une droite tangente à l'intersection. Or, quelle que soit la droite qu'on mène par a, si par cette droite on mène un plan tangent à la courbe d'intersection, on aura toujours le même plan de contact.

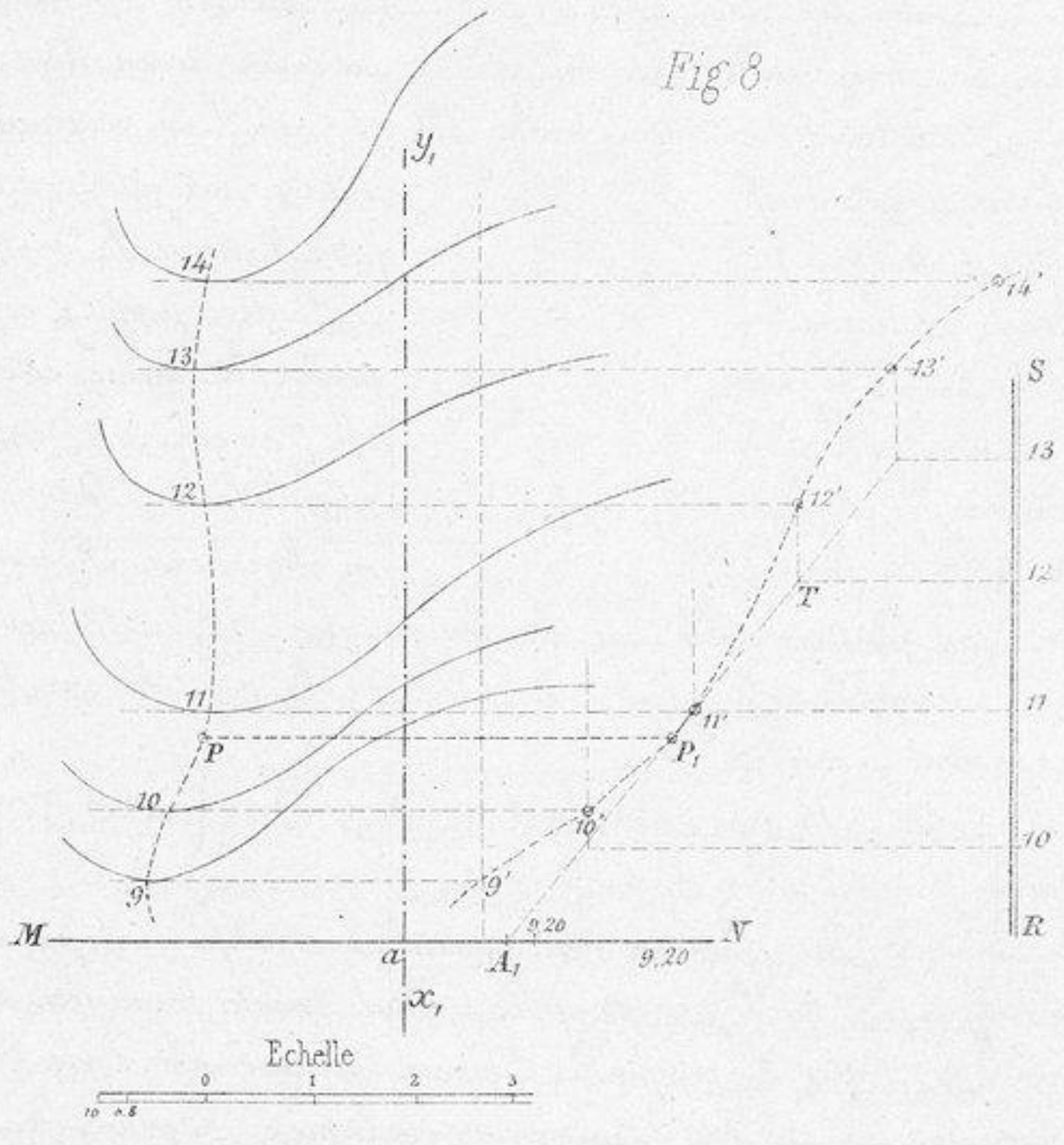
Menons alors par a une droite que nous cotons, et le problème est ramené au cas précédent : ayant le point de contact sur la courbe, la génératrice correspondante donnera le point de contact sur la surface. — Ici la droite auxiliaire menée par a a été prise ayant MN pour projection. — Si la droite MN est par suite si le point a, a pour cote 8, 80, par exemple, on tracera, comme nous l'avons indiqué dans la méthode des projections cotées, la droite aN cotée 10, 11 ..... On mène les droites 10.10' 11-11' ..... et on cherche comme ci-dessus le point pour lequel elles sont parallèles.

2ème Méthode — Par rabattement.

On coupe le cylindre précédent par un plan vertical X, Y, dont on prend, de préférence, la trace perpendiculaire sur MN. On rabat en 9', 10', 11', 12' ..... et en A, la section faite sur ce cylindre et sur la droite MN. Par le point A, on mène une tangente A,T, à cette section, et l'on a en T, le point de contact, donnant en

$P_1 p$ la génératrice de contact. — Le point p où cette génératrice rencontre la ligne 9 – 10 – 11 – 12 .... de contact du cylindre auxiliaire et de la surface, donne le point de contact du plan tangent cherché. Son échelle de pente s'obtiendra facilement en RS.

Fig 8



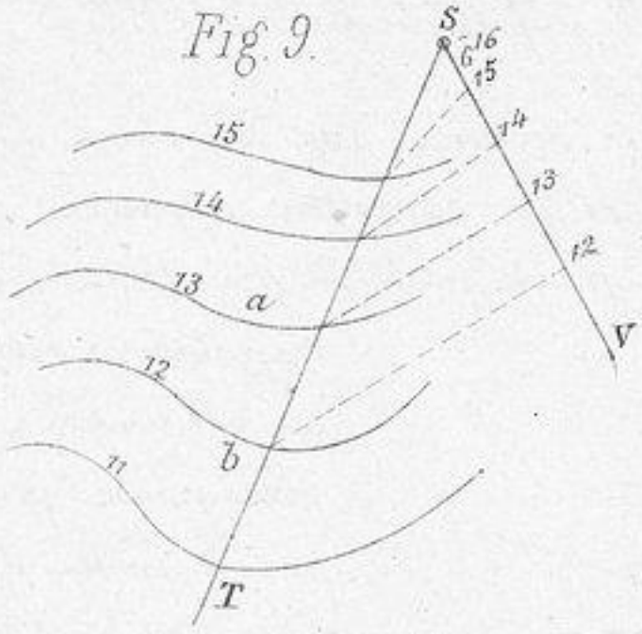
Circonscrire à une surface topographique un cône ayant pour sommet, un point donné S.

1ère Méthode. — On peut couper par des plans verticaux passant par le point S, rabattre les sections et déterminer dans chacune la tangente à la courbe de section.

2e Méthode. — On peut mener par S une droite quelconque et par elle un plan tangent à la surface; le point de contact est un des points cherchés; et en faisant varier la droite, on a la courbe de contact.

3e Méthode. — Prenons une seule droite auxiliaire SV. Cotons cette droite, et par elle menons des plans tangents aux diverses sections que l'on fait par des plans verticaux tels que ST, passant par S, problème que nous avons déjà traité.

Fig. 9.



Si l'on veut avoir un point de contact sur une certaine zône ab, on fait tourner la droite trace de la section verticale, jusqu'à ce qu'en joignant les points de même cote entre les limites ab, on ait des droites sensiblement parallèles. Dans le cas de la figure, on cherchera à donner au plan vertical une position telle que les horizontales 12 et 13 deviennent parallèles.

Pour le cylindre circonscrit, la solution est tout-à-fait analogue.

Représentation des Surfaces topographiques.

On représente, en général les surfaces topographiques par des portions de lignes de plus grande pente terminées aux lignes de niveau de la surface. On se dispense alors de tracer les lignes de niveau ; et les segments de lignes de plus grande pente constituent des hachures dont l'écartement, aussi bien que la longueur, indique la pente du terrain.

La ligne d'écoulement des eaux à la surface d'un terrain n'est pas la ligne de plus grande pente ; une molécule liquide se meut d'abord tangentiellement à un élément de ligne de plus grande pente ; mais l'instant d'après, la vitesse acquise l'empêche de continuer la direction de la ligne de plus grande pente.

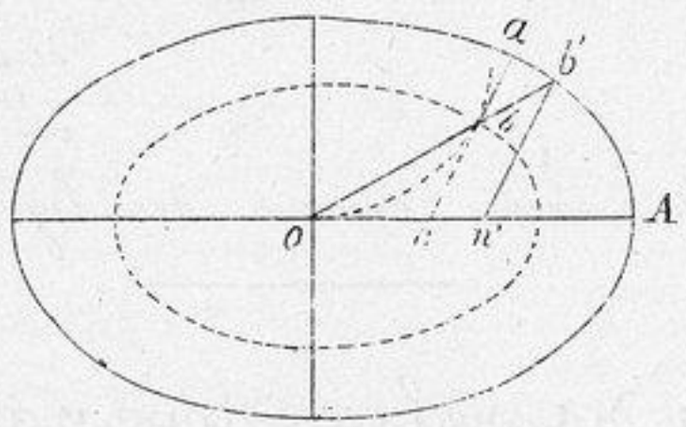
A partir d'un point, il peut y avoir sur un terrain une infinité de lignes de plus grande pente. Ceci se présente, par exemple, lorsque nous considérons le sommet d'une surface de révolution dont l'axe est vertical. En général, lorsqu'une surface

admet un plan tangent horizontal, à partir du point de contact, il y a une infinité de lignes de plus grande pente.

Examinons les lignes de plus grande pente dans 2 surfaces différentes :

1°. Ellipsoïde. — Les sections par des plans horizontaux sont des ellipses semblables à l'ellipse de contour apparent et semblablement placées. Les lignes de plus grande pente se projettent suivant des trajectoires orthogonales de ces ellipses. Ces lignes de plus grande pente passent toutes par le point o, et sont de plus tangentes au grand axe en ce point. En effet, le point o peut être considéré comme la projection d'une ligne de niveau infiniment petite. Si nous prenons un point b sur une ligne de plus grande pente, la tangente en b à la ligne de plus grande pente est la normale à l'ellipse de niveau qui passe par le point b. Or, la tangente en b à cette ellipse est parallèle à la tangente en b' à l'ellipse de contour apparent. Lorsque le point b vient se confondre avec le point o, le rayon vecteur ob devient la tangente à la ligne de plus grande pente. Cette tangente est encore parallèle à la normale en b' à l'ellipse de contour apparent. Le point b', à la limite, est donc un point tel que la normale b'n' passe par le centre. — b' a donc pour limite A, et la tangente a pour limite le grand axe OA.

Fig. 10.

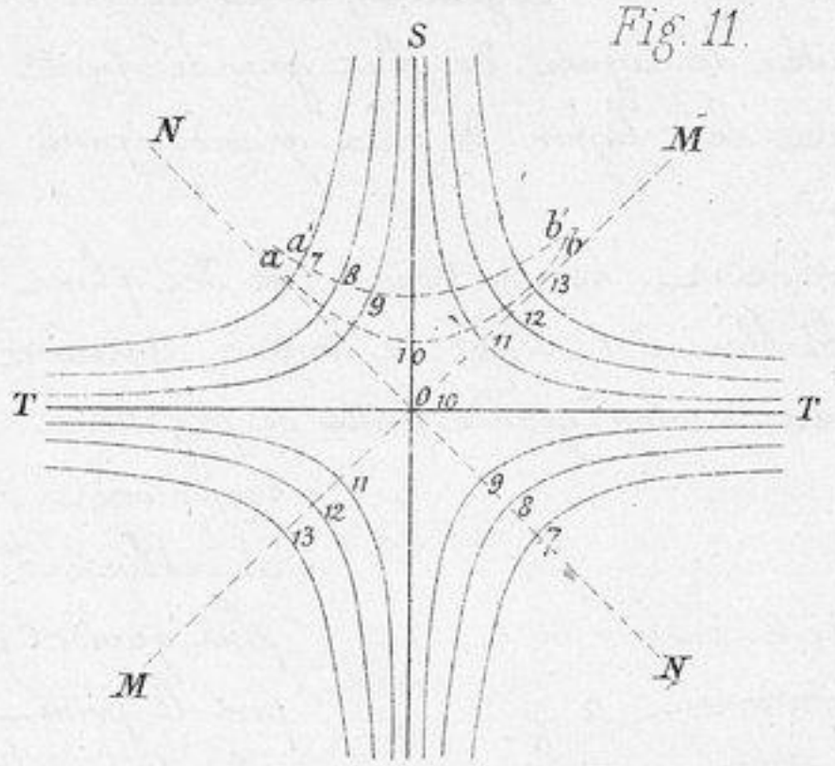


La tangente en o à l'une quelconque des lignes de plus grande pente oba, est donc confondue avec le grand axe de l'ellipse de contour apparent.

2°. Surface du 2d. degré à courbures opposées.

Les lignes de niveau ab — a'b' .... se projettent suivant des

Fig. 11.



hyperboles semblables et semblablement placées, parmi lesquelles les asymptotes OS et OT. Dans ce cas, les lignes de plus grande pente sont encore des trajectoires orthogonales de ces hyperboles. Elles s'éloignent du point O. Mais il existe encore 2 lignes de plus grande pente, OM et ON passant par le point O. — Ce sont les axes communs des lignes de niveau.

Application des surfaces topographiques à la représentation des Tables.

Table à simple entrée. — Lorsqu'on a une relation entre deux quantités $y = \log(x)$, par exemple, on la représente au moyen d'une courbe ou d'une droite cotée. Donnant à x diverses valeurs, les valeurs de y seront les logarithmes des valeurs correspondantes de x. Au lieu de tracer la courbe $y = \log.(x)$ nous porterons sur une droite, à partir d'un point, des longueurs proportionnelles aux logarithmes des nombres, et nous écrirons les nombres en regard des divisions. La droite ainsi graduée représente la projection de la courbe $y = \log.(x)$ sur une parallèle à l'axe des y.

Table à double entrée. — La même chose se répète pour une table à double entrée. La table de multiplication sera représentée par

$$z = xy.$$

Fig. 12

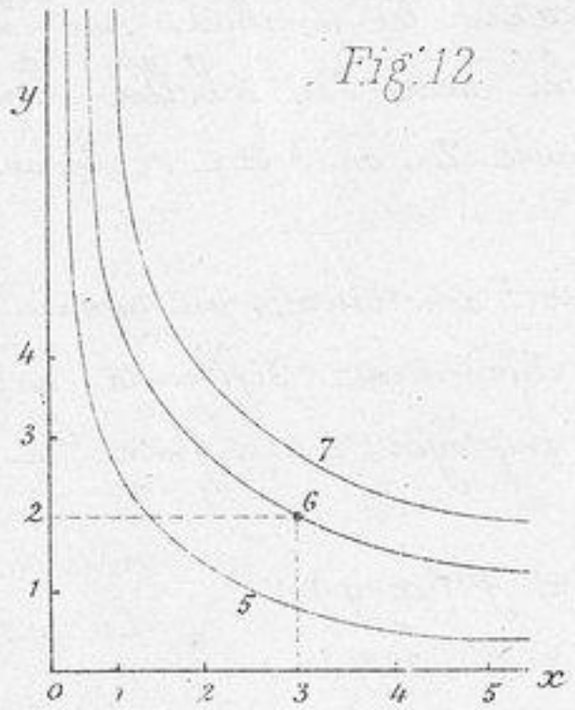
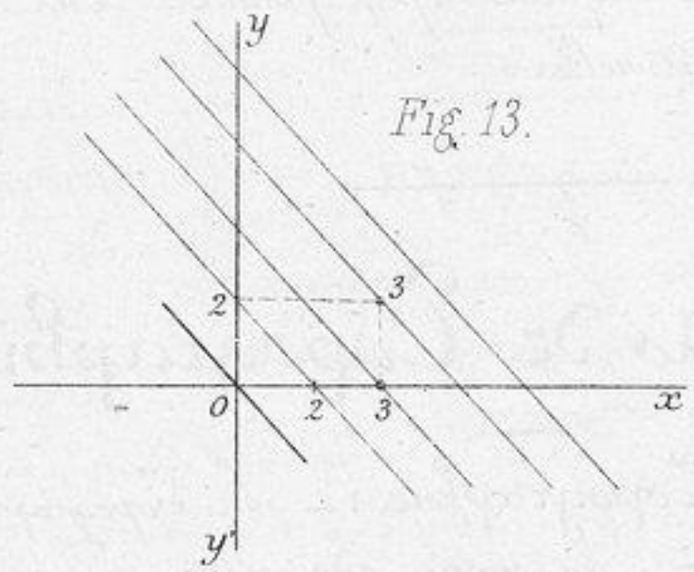


Fig. 13.



En considéran- x, y, z, comme les coordonnées d'un point de l'espace, la table à double entrée est représentée par la surface $z = xy$, c'est-à-dire par un paraboloïde hyperbolique.

Les lignes de niveau sont représentées par l'équation :

$$xy = \text{constante}.$$

Ce sont des hyperboles équilatères.

Sur les asymptotes ox et oy de ces hyperboles nous prendrons des longueurs égales, représentant chacune l'unité : si nous considérons alors le point d'abscisse 3 et d'ordonnée 2, il devra se trouver sur l'hyperbole cotée 6, c'est-à-dire sur l'hyperbole dont la cote est le produit 2×3.

Mais on peut au préalable, faire ce que l'on nomme une anamorphose. En prenant les logarithmes

$$\log z = \log x + \log y$$

ou $\log z = x' + y'$.

En posant : $x' = \log x$

$y' = \log y$,

Nous connaîtrons facilement le logarithme du produit connaissant les logarithmes des facteurs. Il suffit en effet de construire une série de droites parallèles à la bissectrice de l'angle $x\,oy'$.

Etant alors donnés les logarithmes des deux facteurs d'un produit, nous prendrons respectivement sur les axes ox et oy des longueurs proportionnelles à ces logarithmes et le point correspondant

sera sur une certaine parallèle dont la cote indiquera le logarithme du produit. Mais au lieu de coter les droites au moyen des logarithmes, nous pouvons prendre pour cotes les nombres eux-mêmes.

En prenant alors sur les axes des échelles logarithmiques, le point d'abscisse 3 et d'ordonnée 2, on devra le trouver sur la droite cotée 6.

C'est ainsi qu'on a pu construire un certain nombre d'abaques permettant d'opérer rapidement différents calculs.

Enfin, nous pouvons employer les lignes de niveau pour la résolution des équations :

$$z = f(x,y)$$
$$z = F'(x,y)$$

Ces deux surfaces donneront deux systèmes de lignes de niveau que nous rapporterons aux mêmes axes. — Les coordonnées des points de rencontre des lignes de niveau de même cote sont les valeurs de x et de y auxquelles correspondent pour z et π des solutions communes.

On utilise encore les surfaces topographiques dans la représentation de certaines lois naturelles.

Éléments de Topographie.

Définition de la Topographie. — La Topographie est l'art de construire et de dessiner, au moyen de certaines conventions, une représentation exacte d'une portion de la surface de la terre avec tous les objets naturels ou artificiels qui s'y rencontrent. Le dessin topographique est une figure semblable à la projection horizontale du terrain.

Échelle. — L'échelle est le rapport constant qui existe entre les longueurs horizontales sur le terrain et leurs homologues sur le plan.

Dans le dessin on traduit ce rapport par une ligne droite à laquelle on donne par extension le nom d'échelle et sur laquelle est figurée une série de longueurs égales à l'unité, réduites à l'échelle du plan. Nous avons indiqué plus haut sa construction.

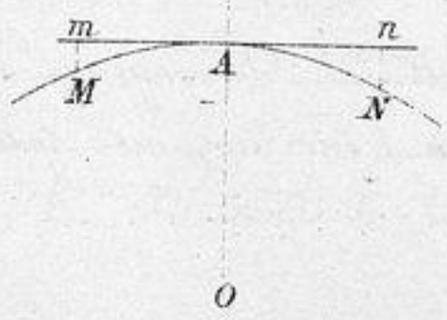
L'Echelle détermine les détails à représenter et les procédés de lever.

On admet, que sur un dessin, une longueur de 1/8 de millimètre est inappréciable à l'œil. Par conséquent, il sera inutile de s'inquiéter, dans un lever, des objets dont les dimensions, réduites à l'échelle du dessin auront moins de 1/8 de millimètre. Il sera de même inutile d'employer pour les levers, des instruments donnant les longueurs, à une quantité près qui, réduite à l'échelle du plan, sera inférieure à 1/8 de millimètre.

Par un calcul bien simple, il est facile de déterminer les erreurs que l'on peut, suivant l'échelle, commettre sans inconvénients, soit sur une longueur soit sur un angle, et de choisir, en conséquence, les instruments plus ou moins expéditifs dont on pourra se servir dans le lever.

Méthode de Projection. — On n'emploie que la projection horizontale et les cotes sont indiquées par des nombres, écrits près des points ou des courbes de niveau que l'on veut coter.

En topographie, la portion MN de la surface de la terre que l'on veut représenter est toujours assez restreinte, et voisine du plan tangent m n mené à la terre au point moyen A de cette région. C'est le plan tangent qui est pris comme plan de projection. Les projetantes telles que M m, — N n sont donc parallèles à la verticale A O du point moyen A. Le dessin topographique est donc une réduction à l'horizon des côtés et des angles qu'on obtiendrait en joignant par des droites les points caractéristiques du terrain.



La géodésie a donné les points dits

de 1er. ordre, sommets de très-vastes polygones formant le réseau géodésique d'une contrée.

Dans ce réseau géodésique, on opère une nouvelle triangulation, à mailles plus serrées, avec des sommets dits de 2e. ordre, bien choisis, faciles à voir et à retrouver et ayant des garanties de longue durée. C'est alors que dans ces triangles de 2e. ordre on vient opérer topographiquement en projetant sur le plan tangent au point moyen de ces triangles. Cette opération topographique nécessite le choix de nouveaux points dits de 3e. ordre, et la création de nouveaux triangles; mais on les relève à l'aide de procédés plus expéditifs, dans le détail desquels nous n'entrerons pas, car ils feront l'objet d'un cours spécial.

Il est même facile de voir que si la plus grande dimension du polygone qui fait l'objet de la carte topographique n'excède pas 150 kilomètres, et si on exécute le dessin à l'échelle de $\frac{1}{20.000^{e}}$, les erreurs maxima de niveau Mm commises en supposant la terre exactement plane dans cette étendue, erreurs ramenées à l'échelle, ne dépassent pas l'erreur de 1/8 de millimètre que l'on commet involontairement dans le dessin de la carte.

Planimétrie – Nivellement. — La Planimétrie est la réduction à l'horizon des longueurs et des angles du terrain. — Le nivellement a pour but de déterminer les hauteurs relatives des différents points au-dessus d'un même plan horizontal de comparaison.

On prend pour surface de comparaison la surface du niveau moyen des mers prolongée par la pensée à travers les terres jusqu'au-dessous de la verticale A a qui passe par le point moyen de la région que l'on veut représenter. Le plan horizontal de comparaison, de cote 0, est donc le plan a T, tangent en a, au sphéroïde de mer moyenne supposé prolongé jusqu'au-dessous de A.

Les procédés de nivellement seront indiqués dans un cours spécial.

Lignes de niveau — Lignes de pente — Équidistance.

Le terrain une fois relevé et nivelé, est figuré à l'aide de ses lignes de niveau et souvent aussi à l'aide de lignes de pentes plus ou moins espacées, comme nous le dirons plus loin.

Les lignes de niveau ont des différences d'altitude qui sont constantes, et ces différences d'altitude se nomment l'Équidistance.

Cette équidistance doit évidemment varier avec l'échelle du dessin, et lui être pour ainsi dire inversement proportionnelle.

Ordinairement, à l'échelle de $\frac{1}{1000}$, l'équidistance est de 10 mètres.

On nomme Équidistance graphique la longueur vraie qui, à l'échelle du dessin représenterait l'équidistance réelle de deux courbes de niveau successives.

Ainsi, par exemple, à l'échelle de $\frac{1}{10.000}$, si l'équidistance vraie est de 10 mètres, l'équidistance graphique sera $10 \times \frac{1}{10.000} = 0^{m}.001$ soit 1 millimètre.

Soient A et B deux points dans l'espace, situés sur deux courbes de niveau successives, et par conséquent dont les cotes diffèrent de 10^{m}; si la ligne AB est inclinée à 45°, c'est-à-dire à une pente $p = \frac{100}{100}$, les points a et b, en projection, seront à 10^{m} en réalité, et en dessin, à $0^{m}.001$.

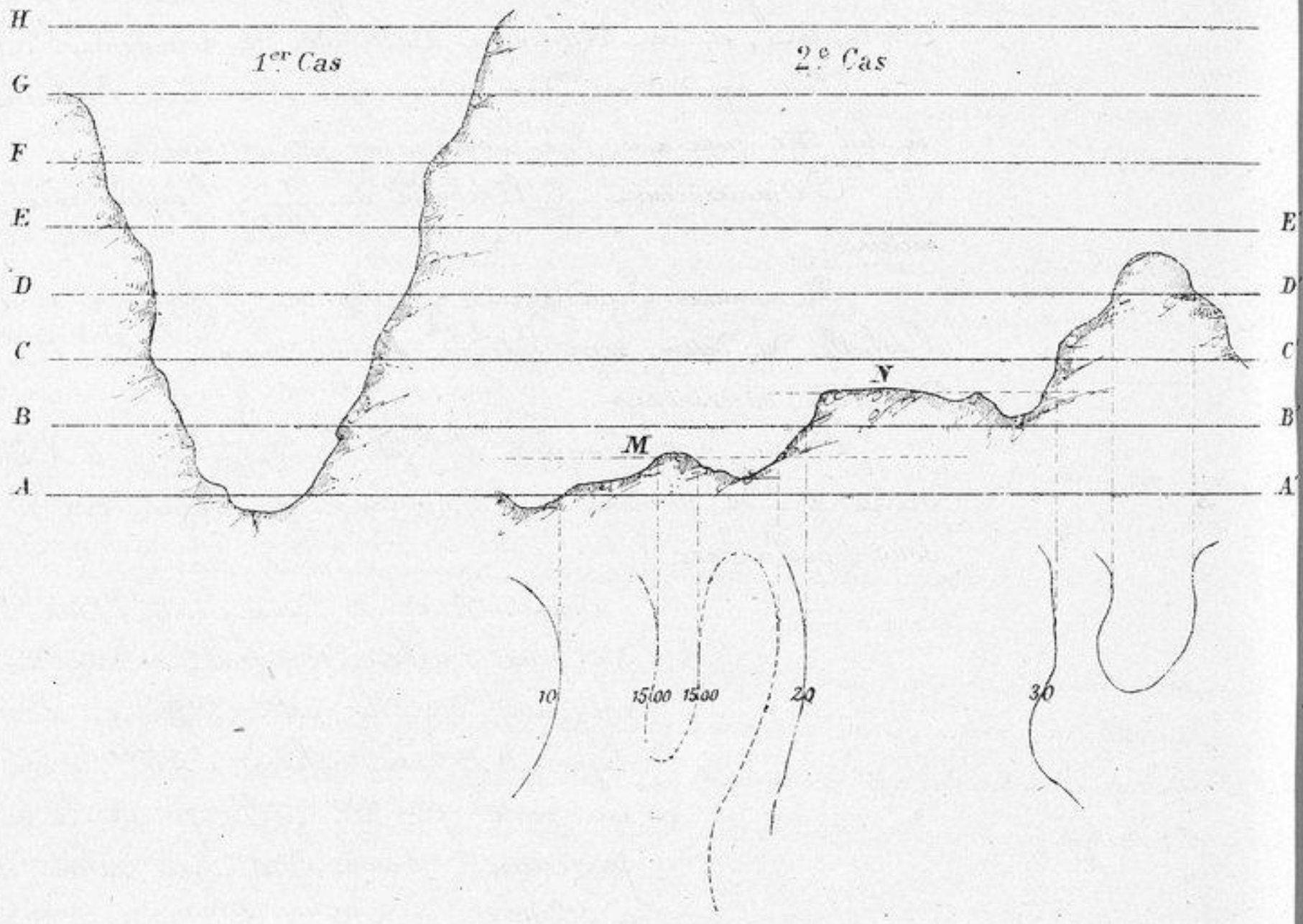
La longueur a b sera donc égale à l'équidistance graphique.

Il est des cas, où dans une même carte, il faut adopter des équidistances différentes suivant les régions que l'on veut représenter.

Supposons en effet (1er Cas) que nous ayons une région montagneuse, à pentes rapides. Si l'on fait des sections horizontales A,B,C,D, de 10^{m} en 10^{m}., par exemple, on rendra compte d'une manière bien suffisante de tous les mouvements de terrain, et de

plus, les courbes, en projection, seront tellement rapprochées qu'en les multipliant davantage on arriverait à la confusion.

Prenons les mêmes plans horizontaux A'B'C',.. dans une région plus plate (2e Cas). Nous aurons des plis de terrain, tels que M, N .... qui échapperont aux plans sécants et qui ne seront pas accusés sur la carte.



On devra donc dans ce second cas intercaler des courbes de 5m. en 5m. et même de 2m. 50 en 2m. 50, mais seulement dans les parties peu accidentées, où, d'ailleurs les lignes principales, celles de 10m. en 10m. sont largement espacées. On tracera ces lignes intercalaires, soit en ponctué, soit en trait discontinu pour éviter la confusion.

Le Dépôt de la Guerre, en France, a adopté pour l'équidistance vraie dans les levers, les nombres suivants, donnant les équidistances graphiques suivantes:

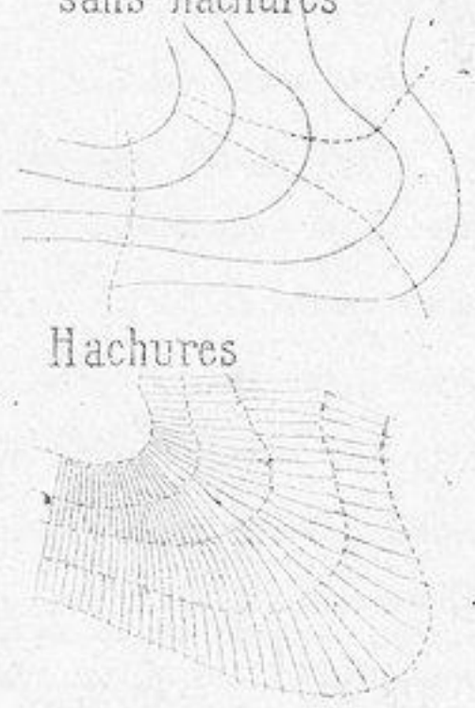
à l'échelle de $\frac{1}{10.000}$, 2m.50 ——— équidistance graphique $= \frac{2.50}{10.000} =$ 2mm.5

$\frac{1}{20.000}$ 5m.00 ——— ..... id ..... $= \frac{5m.}{20000} =$ 2mm.5

$\frac{1}{40.000}$ 10m.00 ——— ..... id ..... $= \frac{5m}{40.000} =$ 2mm.5

Avec ces conventions, on voit que l'équidistance vraie est prise égale à $\frac{1}{4000}$ du dénominateur de la fraction qui représente l'échelle et que l'équidistance graphique est la même pour toutes les cartes faites d'après ce principe, de telle sorte que sur tous les levers du Dépôt de la Guerre, une pente de 45° est marquée par une distance horizontale de 2mm.5 comptée sur la carte. On verrait facilement que dans ce système une même pente est marquée par une même distance horizontale quelle que soit l'échelle de la carte.

Dessin des Cartes. Dans le dessin des cartes topographiques on utilise à la fois les lignes de niveau et les lignes de plus grande pente. Les premières suffisent pour tous les travaux des Ingénieurs. Les secondes servent à donner plus de relief au dessin; mais alors on ne trace pas les lignes de pente dans toute leur longueur et on les interrompt à la rencontre des horizontales, ce qui dispense de représenter ces dernières par un trait continu. Ainsi réduites, ces portions de lignes se nomment **hachures**. En les serrant plus ou moins ou en les faisant plus ou moins épaisses, on peut produire avec leur aide des effets d'ombre et de lumière, donnant du relief au dessin.



Lumière oblique et lumière zénithale. — Deux systèmes sont adoptés pour l'éclairement conventionnel du terrain. Dans le premier, qui est le système de la Lumière oblique, on suppose les rayons lumineux obliques inclinés à 45° sur le plan horizontal, et arrivant de l'angle gauche supérieur du cadre. Ce

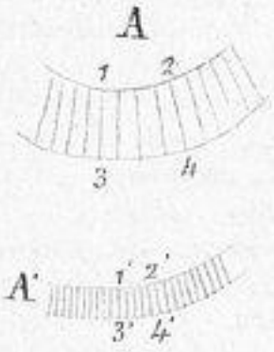
système donne beaucoup de relief au dessin ; mais il a l'inconvénient d'être difficile à exécuter et de ne pas permettre à première vue, l'appréciation exacte des pentes, puisque sur la même carte, le même mouvement de terrain peut être représenté par des intensités de teinte très-différentes suivant le sens où il est dirigé par rapport aux rayons lumineux.

Dans le second système, dit de la Lumière Zénithale, on suppose que les rayons lumineux sont verticaux : De cette façon, deux surfaces également inclinées, seront éclairées de la même manière, quelle que soit leur position sur le terrain. Les surfaces horizontales seront les plus blanches, et les surfaces inclinées seront grises ou noires.

On admet qu'une pente inférieure à $\frac{1}{64}$ est considérée comme horizontale, et que tout terrain plus roide que $\frac{1}{1}$ est considéré comme escarpement et figuré d'après un mode particulier.

La grosseur à donner aux hachures et leur espacement sont variables suivant les pentes : Elles sont fonction de la distance qui sépare deux lignes de niveau.

Soient sur une même carte deux séries de lignes de niveau A et A'. — La distance des deux premières A comptée sur la ligne de pente 1.3. est plus grande que celle des deux autres A'. — La pente est donc plus douce dans le premier cas que dans le second, par suite la teinte en A doit être plus claire qu'en A'.



On arriverait d'une manière simple à réaliser ces nuances, en convenant de faire les hachures d'un trait égal, dans tous les cas, mais de les espacer d'une façon constante (du quart par exemple) de la distance 1–3, ou 1'–3'.

Dans les dessins expédiés on se conforme à cette convention. Dans la gravure des cartes, on convient en outre de grossir le trait quand les hachures sont rapprochées. — Cela peut se faire soit

au sentiment, soit en se conformant à des modèles établis une fois pour toutes et auxquels on donne le nom de Diapasons de hachures.

Emploi du Lavis. — Dans les minutes on laisse subsister le trait des lignes de niveau et on fait les teinter au lavis, ce qui va plus vite et surcharge beaucoup moins la carte.

Signes conventionnels. — Dans les cartes à petite échelle, les détails que l'on veut représenter seraient, le plus souvent, à cause de leurs dimensions restreintes, très-difficiles à figurer. Il faut ou bien les grandir ou bien les représenter par un signe conventionnel. On trouve ces signes dans tous les traités de topographie, et dans l'instruction sur la lecture des cartes, publiée par le Ministère de la Guerre. On y trouve également les conventions faites pour figurer sur une carte les divers genres de cultures (bois - forêts - prairies, etc.)

Mouvements de Terrain.

1°. Eminences de la terre. — Une Montagne est une masse de terrain qui s'élève considérablement au-dessus du sol environnant.
Le Sommet ou la Cime, en est la partie la plus élevée.
Les Flancs de la montagne sont les pentes qui en descendent.
La Base est le plan ou la plaine, peu incliné, sur lequel elle repose, et le Pied est le périmètre de ce plan, c'est-à-dire la ligne assez peu définie d'ailleurs qui sert de passage entre la base à pente douce de la montagne, et les flancs à pente plus rapide.

Un Plateau est une plaine plus ou moins étendue située sur une montagne.

Un Monticule est une petite montagne. — Les plus petits prennent le nom de Butte ou mamelon.

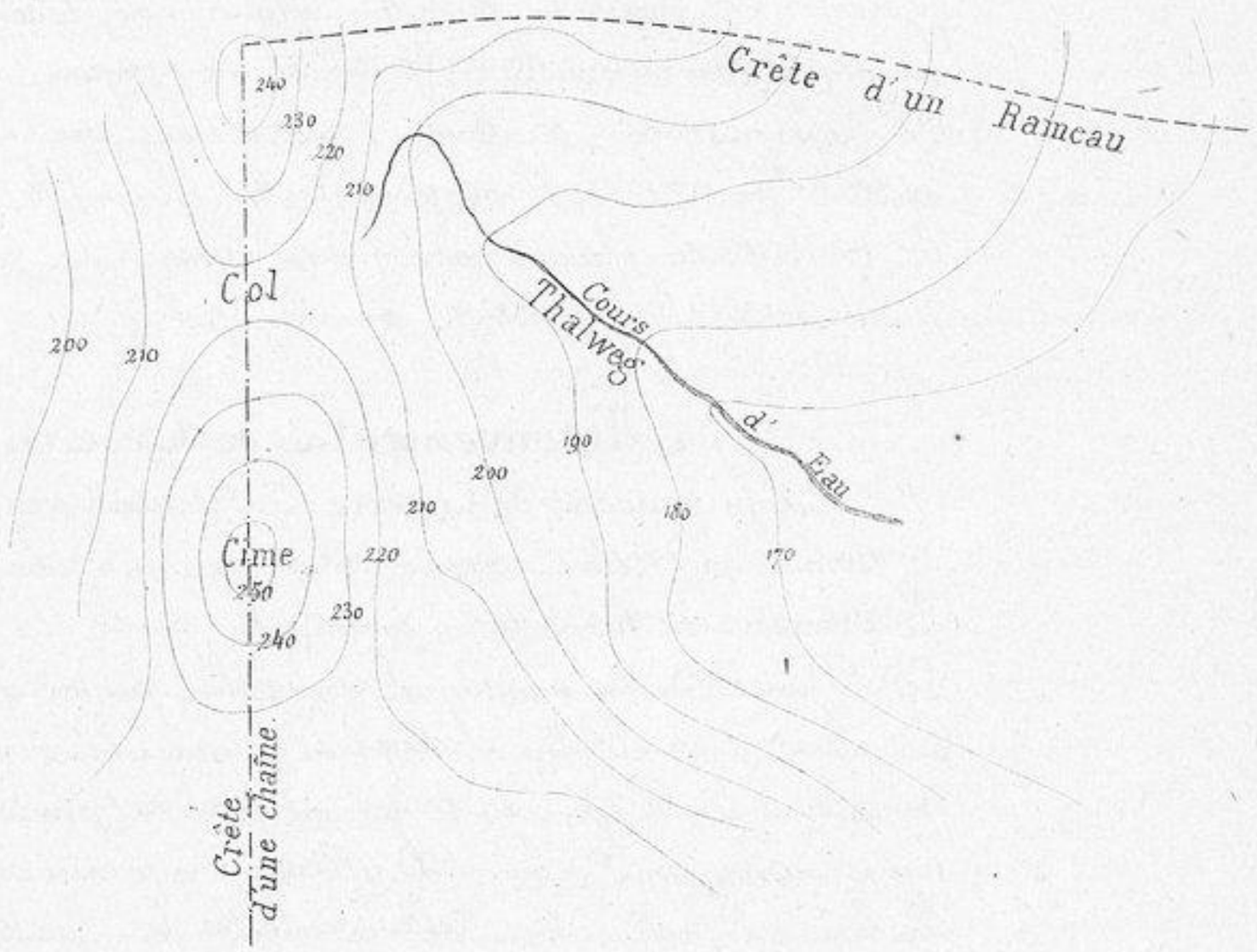
Lorsque la cime d'une montagne est arrondie elle forme un Dôme. — Si ses pentes sont abruptes, on la nomme Pic;

si elle forme une pointe aiguë très-élancée, on lui donne le nom d'Aiguille.

Les montagnes forment ordinairement des séries, que l'on nomme Chaînes de Montagnes, qui s'étendent dans des directions déterminées et jettent des ramifications à gauche et à droite.

Le faîte d'une chaîne est la ligne qui passe par les crêtes et par les sommets de toutes les montagnes qui la composent.

Ses flancs forment les Versants de la chaîne. En se déplaçant sur le faîte d'une chaîne, on trouve alternativement des élévations qu'on nomme Cimes et des abaissements qu'on nomme Cols.



Aux environs des Cimes, la surface du sol est convexe. Aux environs des Cols elle est à courbures opposées. Les formes affectées par les courbes de niveau sont analogues à celles qui sont dessinées sur le croquis ci-dessus.

Les versants d'une chaîne forment des surfaces très-ondulées,

en dom la pente est très-variable. Ordinairement, la pente moyenne d'un des deux versants est plus petite ou plus grande que l'autre.

Le faîte d'une chaîne forme la ligne de séparation ou de partage des eaux, qui, coulant de part et d'autre des deux versants, se rendent dans deux rivières différentes.

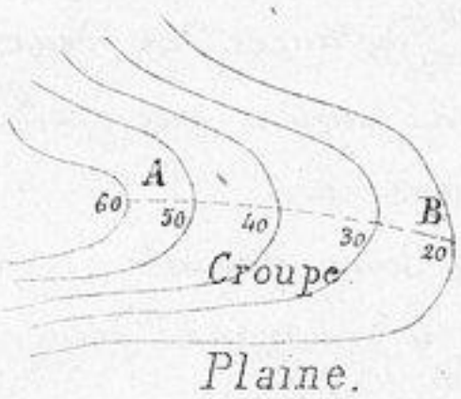
Chaque Cîme est le point de départ de deux chaînes secondaires, coupant transversalement la première et qui prennent des directions opposées. — Ces chaînes secondaires se nomment Rameaux: chaque col est le point de départ de deux vallées opposées.

Des rameaux, partent encore de nouvelles ramifications que l'on nomme des contreforts ou éperons.

Un rameau est même un contrefort qui a une certaine longueur peut être considéré comme une chaîne simple, car il présente alternativement des cols et des cimes.

Lorsqu'un rameau, en se prolongeant, n'atteint plus une grande élévation, on lui donne le nom de Colline.

Lorsqu'un rameau ou un contrefort se termine sur une plaine, il y a en ce point deux versants qui se rencontrent comme les deux pentes d'un toit. La surface convexe ainsi formée se nomme une Croupe.



Les lignes de niveau y sont disposées comme l'indique le croquis ci-contre. Il existe à son extrémité une ligne de pente AB, dont la pente est plus petite que celle de toutes les autres.

2°. Dépressions de la Terre. — Les rameaux qui se détachent de la chaîne principale, les contreforts et les éperons qui se détachent des rameaux, laissent entre eux des intervalles ou dépressions plus ou moins considérables que l'on nomme vallées, vallons, défilés, gorges, ravins, plis de terrain.

Une vallée est la dépression répondant à deux chaînes

principales. Le vallon est celle qui sépare deux rameaux ou deux contreforts, etc... Les défilés ou gorges sont des vallons étroits et dont les flancs sont escarpés. — Les ravins sont des excavations prolongées, à pentes rapides, et qui ont été creusées par les eaux. — Les plis sont des excavations dont la profondeur est peu sensible.

Les flancs ou versants des collines, rameaux ou contreforts qui laissent entre eux ces dépressions, se nomment aussi les flancs ou versants de la vallée, du vallon, etc.... — La ligne d'intersection plus ou moins sinueuse que forment en bas les flancs ou les versants, et que suivent les eaux se nomme le Thalweg.

Toutes ces éminences ou dépressions de la terre suivent dans leurs positions relatives certaines lois que nous indiquerons:

1°. On remarquera que toutes les fois que d'un côté d'une vallée ou d'un vallon, une croupe forme un avancement dans la vallée, avancement que l'on nomme Angle saillant, on voit, vis-à-vis et de l'autre côté un enfoncement, que l'on nomme Angle rentrant. Cette règle ne reçoit d'exceptions que dans les vallées d'une très-grande largeur.

2°. Si ces deux versants sont en pente douce, la vallée est en général très-évasée et régulière dans son cours; le Thalweg se trouve à peu près à égale distance des deux versants. — Si la pente d'un versant est plus rapide que celle de l'autre, le thalweg se rapproche de ce versant.

Les vallées formées par deux versants escarpés sont en général étroites et irrégulières. On y remarque des élargissements et des rétrécissements

La courbe du Thalweg présente un grand nombre d'inflexions, mais elle se rapproche toujours du côté le plus escarpé.

Les plaines sont de grands espaces qui paraissent horizontaux, quoiqu'ils ne le soient jamais rigoureusement. Le sol en est toujours plus ou moins accidenté. On y remarque de légères saillies formant des arêtes de partage, et de légères dépressions

dans lesquelles serpentent souvent des ruisseaux.

Lorsque ces saillies ont une pente un peu prononcée, on les nomme des coteaux ; lorsqu'elle est faible on les nomme gradeaux.

Examen des hauteurs, - des versants, - des basses plaines et des cours d'eau

1°. Les Hauteurs. — Si l'on chemine sur la crête d'une chaîne principale dont les flancs forment les demi-versants des vallées de deux fleuves se jetant dans la mer, on trouve alternativement des cimes et des cols. — En s'approchant de la mer, la hauteur des cimes et des cols va en diminuant, et la ligne de crête semble s'enfoncer dans la mer. Elle se continue sous les eaux ; et le point où elle se perd forme un Cap.

Revenant sur la crête de la chaîne principale, on voit de toutes les cimes, partir à gauche et à droite de nouvelles crêtes répondant à des rameaux, tandis que les cols sont le point de départ des lignes de thalwegs des vallées latérales, au fond desquelles serpentent des rivières destinées à se jeter dans l'un des fleuves qui répondent aux flancs de la grande chaîne.

Si l'on chemine sur la crête de ce rameau, on retrouve alternativement un col, une cime, un col etc. — Les cimes sont les points de départ des contreforts de ce rameau ; et les cols les points de départ de nouveaux thalwegs.

Les contreforts ne sont pas ordinairement perpendiculaires au rameau, mais ils s'infléchissent et convergent vers l'aval de ce rameau.

Cheminant sur les contreforts, on retrouve encore des cols et des cimes, et servant de départ à des éperons et à des thalwegs de 4e. ordre et ainsi de suite.

Les chaînes viennent se terminer à la mer et y forment des Caps. Les rameaux se terminent près du fleuve et y forment des Croupes ; les contreforts, près de la rivière, les éperons près des affluents de la rivière ..... etc..... et forment toujours

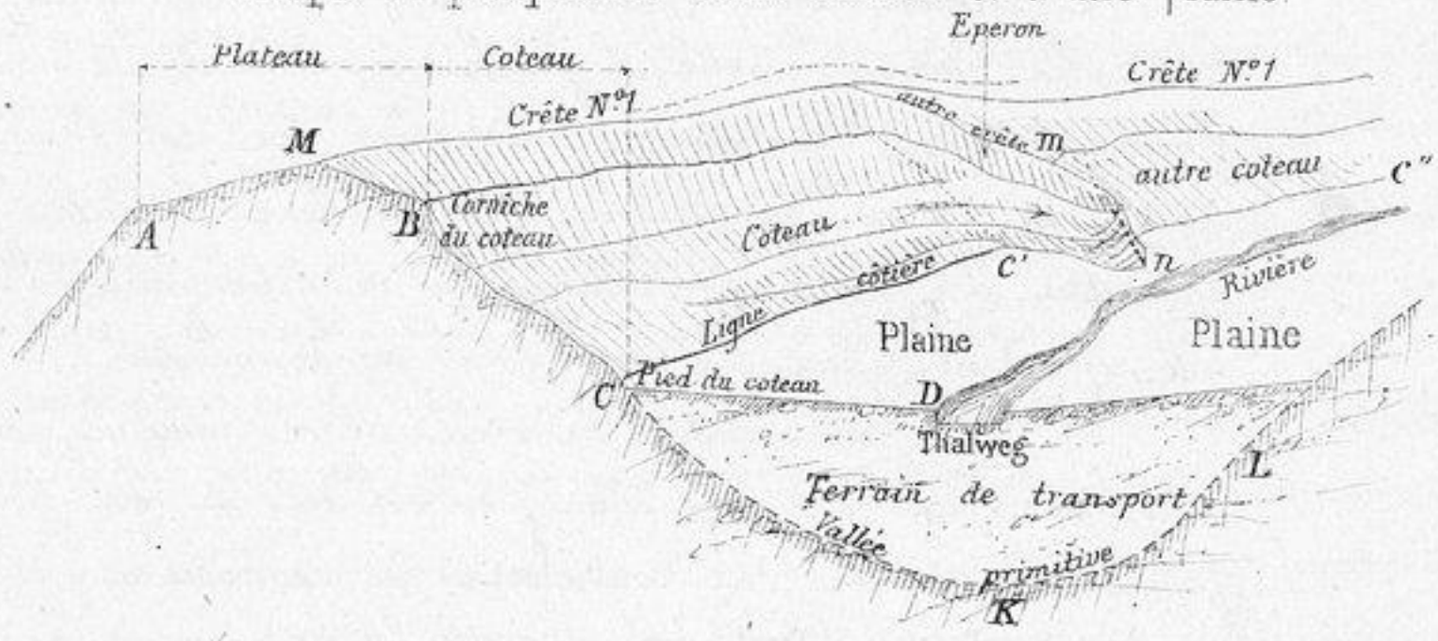
des croupes plus ou moins importantes.

2°. Les Versants. — Un versant est le flanc d'une montagne ou colline. Sa pente se compose ordinairement de trois parties qui sont: le Plateau, le Coteau, la Plaine.

Le Plateau (voir la coupe ci-contre) est la plaine située sur la montagne. Il n'est pas horizontal et est divisé par une crête de partage, M, qui peut être plus près d'une des limites A ou B du plateau et même se confondre avec l'une d'elles.

Le Coteau est la partie la plus rapide du versant; il est limité en haut par le bord inférieur A du plateau. On nomme cette ligne la Corniche du coteau; en bas il est limité en C par la plaine.

Coupe et perspective d'un coteau et d'une plaine



La ligne C se nomme le pied du coteau. Latéralement le coteau se retourne le long de deux éperons ou de deux contreforts, et vient se terminer sur la ligne de crête m n d'une croupe.

Les pieds de tous les coteaux qui peuvent exister dans le bassin d'une rivière ne forment qu'une seule et même ligne C. C'. C''... qui se nomme la Ligne Côtière de la vallée de cette rivière.

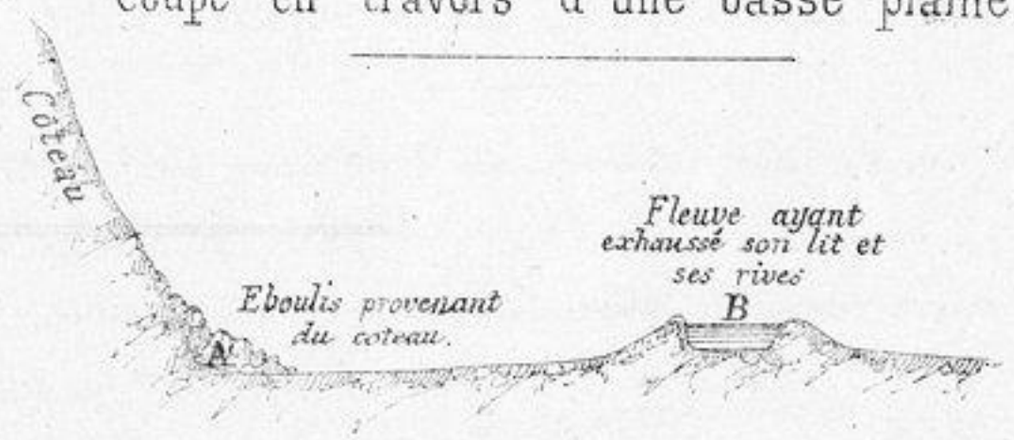
La Plaine d'un versant est la partie de ce versant qui s'étend depuis la ligne côtière jusqu'au thalweg.

3°. Les basses plaines. — Les basses plaines actuelles sont ordinairement formées par des terrains de transport, qui y ont été déposés soit par les eaux des rivières et des torrents pendant les crues, soit par les eaux de la mer pendant leur séjour sur nos continents. Les vallées primitives s'enfonçaient davantage que les vallées actuelles et possédaient des plaines moins étendues.

Le profil en travers des plaines se modifie journellement. A chaque pluie torrentielle, le terrain des coteaux est entraîné dans la plaine et précipité par petites quantités vers le Thalweg, ce qui tend à donner à la plaine deux pentes transversales descendant de la ligne côtière vers le thalweg. — D'un autre côté, à chaque crue de la rivière, du limon se dépose sur son fond et sur ses rives que cela exhausse. Après un certain nombre d'années cet effet d'exhaussement des rives est tellement sensible que le cours d'eau se trouve placé sur la partie la plus élevée de la plaine. Rompant alors ses digues, il quitte ce faîte qui n'est plus son vrai thalweg, et va dans la partie la plus basse se creuser un nouveau canal.

Le profil en long des basses plaines est très-variable. Sa plus forte pente est ordinairement vers son origine. — Certaines vallées ont des pentes en long alternativement rapides et douces, répondant à des étranglements et à des élargissements des deux coteaux. D'autres ont des pentes en long assez régulières.

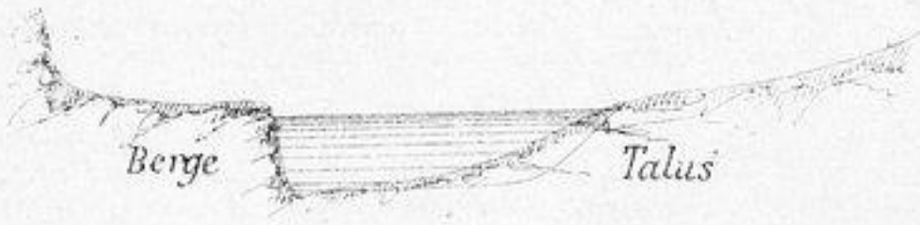
Coupe en travers d'une basse plaine.



4°. Les Cours d'eau. — Tout fleuve, toute rivière et tout ruisseau a un bassin, une source, un lit, des berges, des talus, une droite, une gauche, un amont, un aval, un confluent.

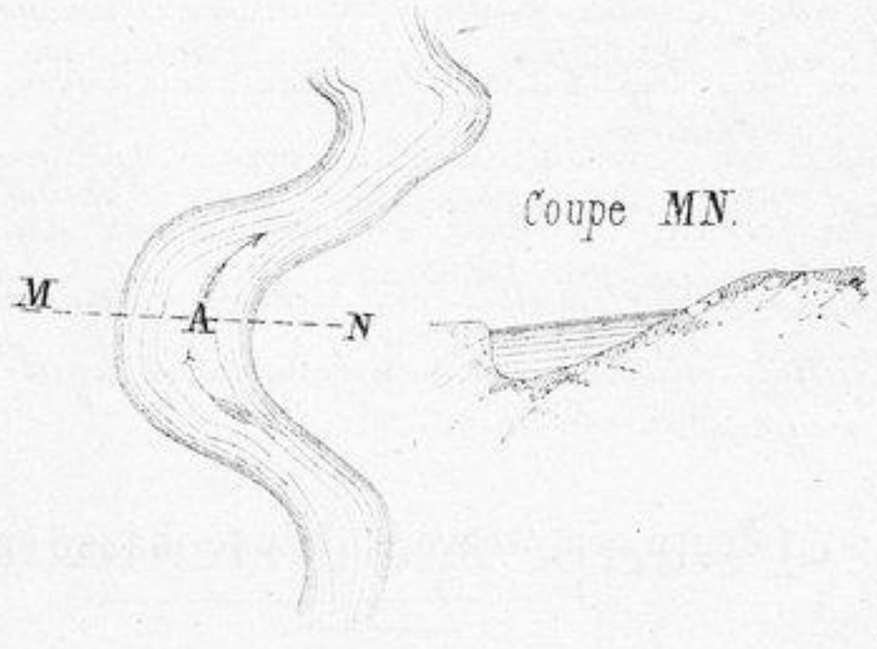
On connaît le sens de ces divers mots. — Rappelons que le lit d'une rivière est le canal dans lequel coulent les eaux en temps normal. A bord elles ne sortent que lors de leurs débordements. Les berges sont la partie de ses bords qui est verticale. Les talus sont celles qui sont en pente douce.

Le lit est ordinairement limité par une berge d'un côté et par un talus de l'autre.



Le plus souvent, le cours d'une rivière est très-sinueux. Il l'est d'autant plus que la pente est plus faible et que la vallée est plus large.

Lorsqu'une rivière présente un coude en A, la paroi du lit M qui est concave est en berge; — l'autre, N, est en talus. Cela tient à ce que les eaux, en vertu de la vitesse acquise corrodent la paroi M, qu'elles rencontrent avec plus de vitesse que N, tandis que sur la partie convexe N elles déposent les matières qu'elles tiennent en suspension.



Éléments de la Théorie du Lavis.

Généralités. — La théorie des ombres a pour but, connaissant la position d'une ou plusieurs sources de lumière directe, de déterminer sur la surface des corps les portions de ces surfaces qui sont éclairées et celles qui sont dans l'ombre.

La théorie du lavis a pour objet d'étudier les différences d'éclat ou de couleur que présentent ces surfaces en ayant égard :

1°. A la manière dont leurs différents éléments reçoivent la lumière directe ou les reflets.

2°. Aux positions que ces éléments occupent, par rapport au spectateur.

Elle donne la marche à suivre pour rendre ces différences sur les dessins à l'aide de couleurs, couleurs parmi lesquelles nous rangerons l'encre de Chine ou tout autre ton servant à produire les effets de l'ombre.

La théorie du Lavis sera basée sur l'étude de 3 principes :

1°. Le principe des orientations ;

2°. Le principe des couleurs ;

3°. Le principe des distances.

Principe des Orientations.

L'orientation d'un plan ou d'un élément plan de surface dépend de la position qu'occupe ce plan :

1°. par rapport aux corps lumineux, 2°. par rapport aux rayons visuels qui émanent du spectateur.

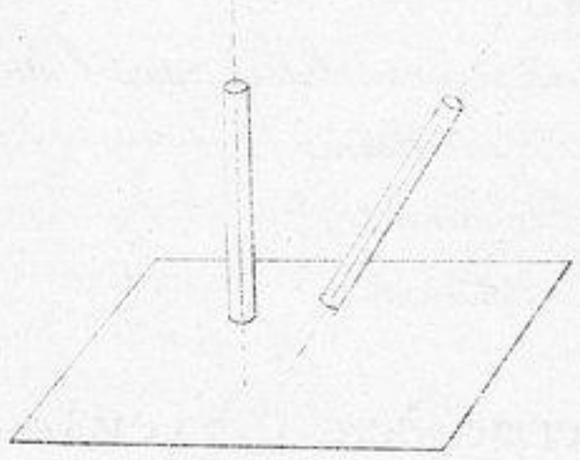
Rayons lumineux et rayons visuels. — Dans le dessin géométrique, les rayons lumineux sont parallèles et ont leurs deux projections inclinées à 45° sur la ligne de terre.

Le spectateur est supposé placé à l'infini, soit au-dessus du plan horizontal soit en avant du plan vertical, cela dépend de la projection qu'il regarde. Dans tous les cas, les rayons visuels sont perpendiculaires au plan sur lequel se fait la projection.

Corps dépoli et corps poli. — La lumière, en frappant la surface d'un corps, peut être renvoyée de deux manières différentes suivant que ce corps est dépoli ou poli. Dans le premier cas, la lumière est diffusée dans tous les sens; dans le 2e cas elle est réfléchie spéculairement.

Expérience sur les corps dépoli. On prend un plan parfaitement dépoli, une plaque recouverte de plâtre, par exemple, ou de papier blanc non glacé, que l'on éclaire par la lumière solaire.

Ce plan s'éclaire uniformément et paraît d'une teinte blanche parfaitement unie.

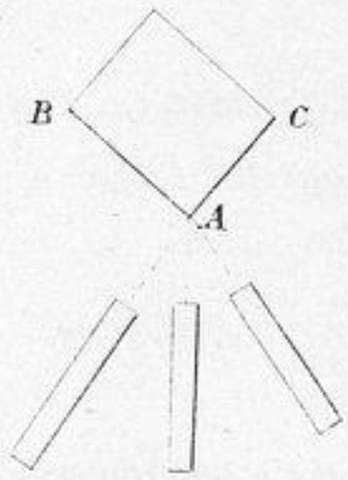


On prend un tube noirci intérieurement au noir de fumée, pour éviter les réflexions intérieures, et à l'aide de ce tube on regarde le plan dans toutes les directions.

L'extrémité ouverte paraît un rond blanc d'un certain éclat, dont il est impossible de saisir les variations quand on change l'inclinaison du tube, excepté lorsque l'on est très-près de l'incidence rasante, auquel cas il se produit un petit assombrissement dû aux aspérités de la surface qui se recouvrent les unes les autres et qui présentent chacune leur partie dans l'ombre.

Ces effets sont les mêmes que ceux qui se produisent avec une plaque de métal rougie au feu et devenue source de lumière.

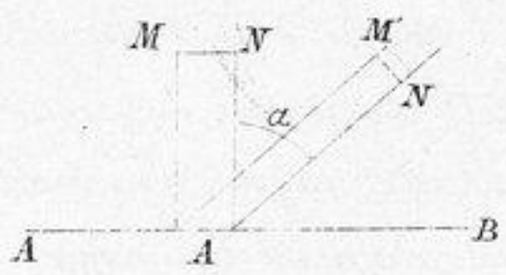
On peut faire l'expérience d'une manière plus concluante. On prend un prisme de plâtre dont l'une des arêtes est bien vive et on l'éclaire de telle sorte que deux de ses faces AB, AC,



paraissent également éclatantes.

Avec le tube précédent, on regarde l'arête A en quelle que soit la direction du tube, les deux faces paraissent également lumineuses.

Conséquences: — 1° Un élément plan d'une surface dépolie, se conduit une fois éclairé par une source de lumière, comme un corps lumineux par lui-même.



L'intensité des rayons émis par la surface est proportionnelle au cosinus de l'angle fait par les rayons émis avec la normale à la surface. Nous nommerons cet angle, l'angle d'émission. En effet:

Soit Q la quantité de rayons émis normalement par un élément de surface égal à A; Q' la quantité émise par le même élément sous l'incidence α.

Les premiers forment un cylindre dont la section droite est $MN = A$. Les seconds en forment un autre de section droite $M'N' = MN$, $\cos\alpha = A\cos\alpha$. Puisque, vu sous ces deux directions, l'élément paraît également éclatant, c'est que les quantités de rayons reçus sur l'unité de surface, en section droite, sont égales dans les deux cas.

Ces quantités sont:

$\frac{Q}{A}$ pour la direction normale, et $\frac{Q}{A\cos\alpha}$ dans la 2e direction.

On a donc: $\frac{Q}{A} = \frac{Q}{A\cos\alpha}$ $\qquad Q' = Q\cos\alpha$ C. Q. F. D.

3°. L'éclat apparent d'une surface dépolie ne dépend pas de la position du spectateur, mais uniquement de l'intensité de la source lumineuse et de l'angle sous lequel la lumière directe frappe cette surface.

4° Sur une surface dépolie, éclairée par une source unique de rayons lumineux, les lignes d'égal éclat apparent sont les lignes d'égal éclairement.

Éclairement total. — Éclairement unitaire ou

spécifique d'une surface plane.— L'éclairement total d'une surface plane égale à A est la quantité totale Q de lumière reçue par cette surface.

L'éclairement unitaire ou spécifique serait la quantité de lumière $\frac{Q}{A}$ reçue par l'unité de surface.

L'éclairement spécifique est important à considérer. Une surface dépolie nous semblera également éclatante si son éclairement unitaire ou spécifique est le même partout.

Théorème.— L'éclairement unitaire d'un élément de surface est proportionnel au cosinus de l'angle d'incidence des rayons lumineux.

En effet, soit ABCD un prisme à section droite carrée, servant d'enveloppe à toute une série de rayons lumineux en quantité Q; un premier plan P, normal aux rayons lumineux, recevra une quantité de lumière représentée par Q.

Soit A la section droite du prisme, l'éclairement unitaire du plan P sera:

$$E = \frac{Q}{A}.$$

Un plan P' incliné sur le plan précédent d'un angle α sera coupé par le prisme suivant une section de surface égale à $\frac{A}{\cos\alpha}$. La quantité de lumière reçue sera toujours Q et l'éclairement unitaire $E = \frac{Q\cos.\alpha}{A}$.

On a donc $E' = E\cos\alpha$ C. Q. F. D.

Conséquence.— Sur une surface dépolie, les lignes d'égal éclairement et par suite d'égal éclat, sont les lignes d'égale incidence.

Rayons de reflets ou indirects.

Si la lumière solaire était unique, si elle ne donnait par lieu à des reflets, tous les points dans l'ombre seraient absolument noirs. Or, il n'en est rien: ces points sont dans des demi-teintes d'éclat variable. Les ombres sont donc éclairées par des rayons indirects que nous nommerons rayons de reflets et dont nous allons étudier la nature et les effets.

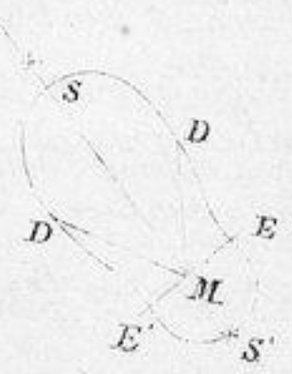
Les rayons de reflets peuvent provenir de la masse d'air environnante ou des objets situés dans le voisinage.

Nous ne nous occuperons de cette seconde espèce de reflets, que dans le dessin d'Architecture, et nous admettrons ici que les objets que nous représentons sont comme des aérostats, isolés au milieu de l'atmosphère et à une distance assez grande de la terre pour ne pas en éprouver de reflets.

Courbe représentative de reflets atmosphériques. — Sans chercher à les justifier théoriquement, nous admettrons les résultats expérimentaux qui suivent.

Lorsqu'on regarde le ciel avec une lunette dont l'objectif est remplacé par un verre dépoli, l'éclat maximum de ce verre a lieu lorsque l'on fixe le soleil. Lorsque la direction s'en éloigne, l'éclat diminue très-rapidement, si bien que pour un angle de 30° du soleil, l'éclat est environ quatre fois plus faible que pour un angle de 3°. Cet éclat passe par un minimum qui répond environ à un angle de 90°, augmente ensuite faiblement, et repasse par un maximum relatif pour un angle de 180°, c'est-à-dire par le point du ciel directement opposé au soleil.

Soit M un élément plan sur lequel agissent toutes les sources de lumière directe ou indirecte émanant du soleil ou de l'atmosphère. Si, de ce point nous menons des rayons vecteurs dans toutes les directions, et si nous portons sur ces rayons des longueurs proportionnelles aux intensités lumineuses dont nous venons de parler, nous aurons une courbe représentative qu'il suffira de faire tourner autour de SM pour avoir la surface représentative des éclairements dûs à la lumière directe et aux réflets atmosphériques sur un plan normal chaque fois aux rayons vecteurs.



Cette courbe présente deux maxima :

Le 1er, très-considérable, correspond aux rayons directs SM ; le second, beaucoup moins intense, correspond aux rayons inverses S'M et un minima que l'expérience seule pourrait déterminer

et que nous ferons correspondre pour simplifier, aux directions ME, ME' perpendiculaires sur le rayon direct.

Rayon atmosphérique principal. — Les choses se passeront donc, à peu près comme si nous avions deux soleils, l'un dirigé suivant la direction MS, qui serait le plus lumineux et qui nous enverrait les rayons directs. L'autre, dirigé suivant MS' et qui nous lancerait des rayons que nous appellerons rayons atmosphériques principaux.

Il faudrait y joindre, cependant, une infinité d'autres sources de lumière symétriquement placées par rapport à la ligne SS' et envoyant des rayons dont les effets sur un plan donneront en se totalisant, des éclairements représentés en grandeur, par les rayons vecteurs MD. ME, normaux aux plans. Nous nommerons ces rayons indirects, les rayons atmosphériques ordinaires.

Conséquences: — 1° Si nous masquons le soleil à un élément de surface, cet élément sera éclairé par des rayons indirects qui lui viendront du ciel.

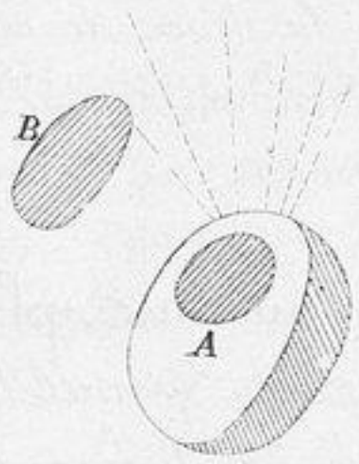
2° Plus il y aura de rayons indirects qui seront masqués, plus l'ombre sera noire, et inversement.

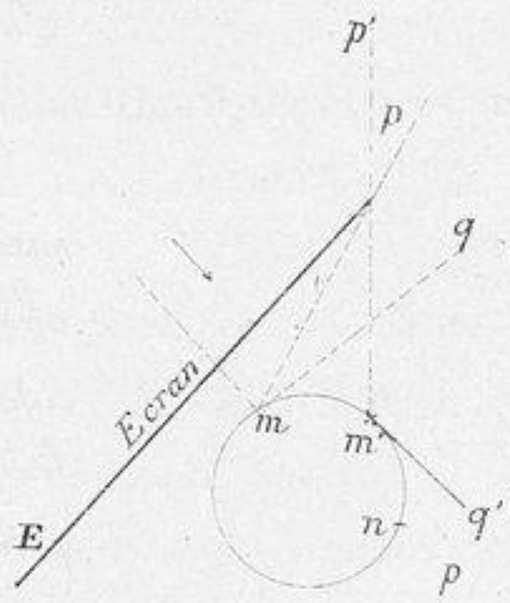
3° De deux éléments placés dans l'ombre, celui qui sera normal au plus grand rayon vecteur sera le plus éclairé.

4° L'ombre portée par un corps sur un autre diminue d'intensité lorsque la distance relative augmente; en effet, lorsque l'objet qui porte ombre est placé près, il masque un plus grand nombre de rayons atmosphériques que lorsqu'il est loin.

5° La ligne d'ombre propre, ayant ses éléments normaux à la direction des rayons vecteurs les moins intenses, sera plus noire que tout autre élément de surface pris dans l'ombre propre, sans être cependant complètement noire.

6° Lorsqu'une surface courbe possède une de ses régions dans l'ombre portée par une autre surface, cette région ne reçoit plus ni les rayons directs ni les rayons atmosphériques voisins





des rayons directs et qui sont les plus intenses.

Prenons deux éléments de surface, l'un voisin de l'incidence normale m, et l'autre m' voisin de la ligne d'ombre propre.

Pour fixer les idées, imaginons que l'écran E, qui projette une ombre, soit très-grand. L'élément m reçoit les rayons atmosphériques compris entre la ligne m p et la tangente m q, lesquels viennent les frapper très-obliquement, et l'éclairent très-peu.

L'élément m', à son tour, reçoit les rayons bien plus nombreux, compris entre m' p' et la tangente m q', parmi lesquels un grand nombre le frappent normalement.

L'élément m' sera donc plus éclairé que m.

Conclusions. (A) Dans l'ombre propre, un élément n sera d'autant plus éclairé par l'ensemble des rayons atmosphériques qu'il l'eut été davantage par le rayon atmosphérique principal supposé existant seul.

(B) Dans l'ombre portée, un élément m ou m' sera d'autant plus sombre qu'il eût été plus clair si cette ombre portée n'eût pas existé

(C) Les lignes d'égales teintes dans l'ombre portée seront les mêmes que si cette ombre n'existait pas; seulement les zônes qu'elles sépareront seront d'autant plus noires qu'elles eussent été plus éclairées sans l'existence de cette ombre portée.

(D) Dans l'ombre propre, les lignes d'égales teintes se traceront en faisant l'hypothèse d'un soleil fictif, existant seul et

directement opposé au soleil réel. Par conséquent, si le corps est dépoli, les lignes d'égales teintes étant les lignes d'égale incidence, on les obtiendra en continuant la trace de celles qui correspondent à la partie éclairée de la surface et comme si les rayons directs étaient susceptibles de les atteindre.

Lignes d'égales teintes sur une sphère dépolie (Epure)

Le rayon lumineux a été rendu parallèle au plan vertical nous désignerons par φ l'angle qu'il fait avec la ligne de terre.

On a:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Le point NN' d'incidence normale est le point le plus clair. Les lignes d'égale incidence et par suite d'égales teintes s'obtiendront en coupant par des plans perpendiculaires au rayon lumineux. Le nombre de ces plans est arbitraire ainsi que leurs distances relatives.

On a pris 7 plans équidistants, ce qui correspond à des angles d'incidence dont les cosinus décroissent en progression arithmétique.

Les lignes ainsi obtenues ont été désignées par des nombres positifs dans la partie en lumière et par des nombres négatifs dans celle qui est dans l'ombre. La ligne d'ombre propre est la ligne de teinte N°. 0.

En prenant pour nouvelle ligne de terre $x_1 y_1$, la sphère se présente comme si elle était en projection verticale avec le rayon

lumineux ramené à 45°. En prenant x_2 y_2 pour ligne de terre, on voit la sphère en projection horizontale.

Corps polis. Loi de la réflexion. — Les corps polis sont ceux qui renvoient spéculairement la lumière, c'est-à-dire dans une direction donnée. On sait que le rayon incident et le rayon réfléchi sont dans un même plan contenant la normale à la surface réfléchissante et que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

Intensité du rayon réfléchi. — L'intensité du rayon réfléchi varie : 1° avec la nature de la surface réfléchissante, 2° avec l'angle de réflexion.

Cette dernière variation est assez considérable pour certaines substances. Pour d'autres, (et les surfaces métalliques sont dans ce cas) l'intensité du rayon réfléchi varie très-peu avec l'incidence. Cette intensité est toujours plus grande sous l'incidence rasante que sous l'incidence normale.

Nous admettrons que les corps polis que nous allons étudier sont des métaux et que l'intensité du rayon réfléchi est indépendante de l'incidence. Cette intensité variera donc seulement avec celle de la source lumineuse.

Aspect d'un plan parfaitement poli éclairé par des rayons parallèles, dirigés dans une seule direction et regardé à l'aide de rayons visuels parallèles, c'est-à-dire l'œil étant à l'infini.

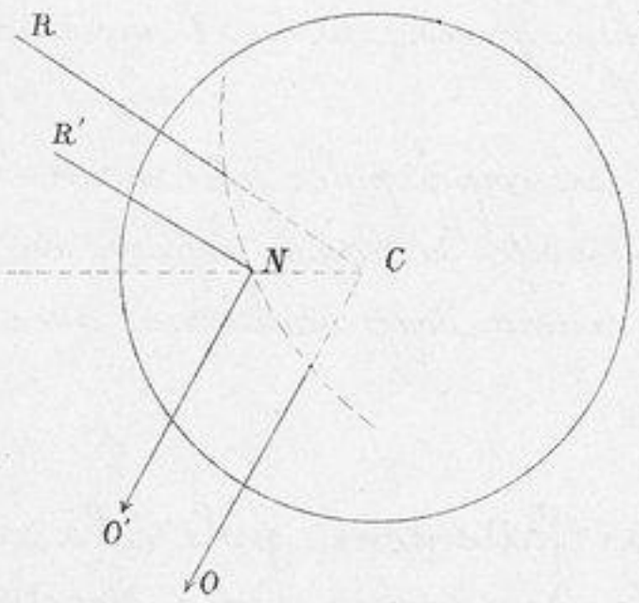
Les rayons se réfléchissent d'après la loi connue. Si les rayons visuels sont parallèles aux rayons réfléchis, tous les points du plan paraissent lumineux, sinon ils seront obscurs et le plan ne semblera pas exister.

Aspect d'un plan poli éclairé par des rayons parallèles venant dans toutes les directions, l'œil étant

à l'infini. — C'est le cas de la lumière solaire jointe aux lumières indirectes émanant de l'atmosphère. L'œil ne recevra des rayons directs ou indirects que ceux qui, après la réflexion, auront pris la direction du rayon visuel.

Si ce sont les rayons de reflets les plus intenses qui sont renvoyés à l'œil, le plan paraîtra très-lumineux et d'un éclat uniforme et inversement.

Aspect d'une sphère polie éclairée par des rayons lumineux parallèles dirigés dans une direction unique, l'œil étant à l'infini. — On mène le rayon lumineux central RC, le rayon visuel CO, la bissectrice de leur angle CN; Au point de sortie de cette bissectrice N, un rayon incident R'N' sera réfléchi suivant NO', c'est-à-dire dans la direction de l'œil. Le point N sera le point brillant de la sphère polie.



Ce point seul sera brillant. Tous les autres seront obscurs et l'existence de la sphère ne se révélera que par ce point brillant.

Aspect d'une sphère polie éclairée par des rayons parallèles venant dans toutes les directions, l'œil étant à l'infini. — C'est le cas d'une sphère éclairée par la lumière solaire directe et par toutes les lumières indirectes.

Chaque direction de rayon donnera son point brillant. Comme elles sont en nombre infini, il y aura de ces points brillants sur toute la surface de la sphère; seulement, ils n'auront pas le même éclat. Pour avoir des lignes d'égales teintes, si nous admettons que la variation de l'angle d'incidence ne modifie pas l'éclat des rayons réfléchis, il faudra:

1° Classer les rayons indirects, d'après leurs différences d'éclat

ce qui se ferait à l'aide d'une courbe représentative analogue à celle que nous avons étudiée plus haut.

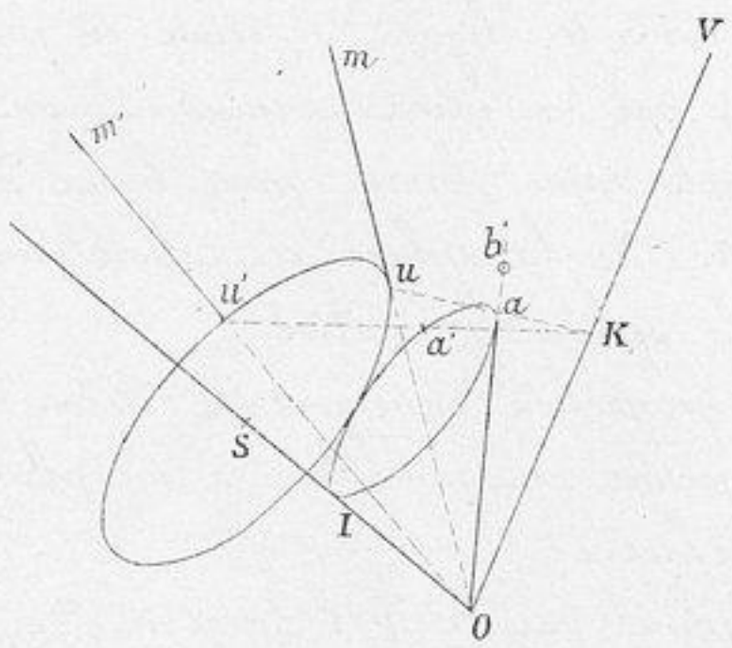
2°. Grouper les rayons d'égale intensité. Ils formeront une série de cônes de révolution, ayant tous pour axe, le rayon lumineux direct.

3°. Chercher sur la sphère, le lieu des points brillants des rayons d'égale intensité. Pour une série de rayons d'égale intensité, les points brillants auront le même éclat et leur lieu géométrique sera une ligne d'égale teinte.

Lignes d'égales teintes sur une sphère parfaitement polie.

Soit O, le rayon direct; $MU, M'U' \ldots\ldots$ une série de rayons indirects d'égale intensité et disposés suivant les génératrices du cône.

Les points d'incidence UU' se trouvent sur un cercle de la sphère, puisque les rayons d'égale intensité forment un cône de révolution.



Soit OV le rayon visuel, K son point de sortie sur la sphère.

Cherchons le point brillant de la direction MV. Menons la bissectrice Oa de l'angle V.O.V.

Le triangle VOK est isocèle, puisque OV et OK sont deux rayons de la sphère. Le point a est le milieu de la droite KV.

Si l'on prolonge Oa jusqu'en b', rencontre avec la sphère, b' sera le point brillant de la direction MV. Mais le lieu des points a est un cercle homothétique du cercle u u', par rapport au point K. Le plan de ce cercle est parallèle au plan du cercle u u' et situé à une distance du point K, sortie du rayon visuel, qui est moitié de celle du premier.

Le lieu des points brillants b' sera donc l'intersection de la

sphère et du cône ayant le cercle a a' pour directrice et le centre O pour sommet.

Epure. — Par une rotation, le rayon lumineux est supposé rendu parallèle au plan horizontal et projeté à l'angle φ sur ce dernier.

Soit OS, O'S', le rayon direct. Prenons une série de rayons indirects d'égal éclat. Ils formeront un cône ayant OS pour axe. La ligne des points d'incidence sera le cercle u t, projeté horizontalement en ligne droite et perpendiculairement au rayon direct. Ce cercle peut être considéré comme l'intersection de la sphère et du plan vertical qui aurait u t pour trace horizontale.

K est le point de sortie du rayon visuel.

Joignons tk, ik, uk, et prenons le milieu de ces lignes; nous aurons en t' i' u', le cercle homothétique du premier, qu'il faut prendre pour directrice d'un cône ayant son sommet au point O.

Si nous décrivons la sphère ayant OK pour diamètre, ce cercle u' t' peut être considéré comme l'intersection de cette sphère par un plan parallèle au premier.

Nous aurons donc les lignes de teinte en prenant la petite sphère OK; la coupant par des plans perpendiculaires au rayon lumineux: prenant les cercles ainsi formés pour bases de cônes ayant leurs sommets au centre de la sphère et cherchant les intersections de ces cônes avec la sphère primitive.

Les courbes en projection horizontale seront des coniques puisque ce plan de projection est parallèle à un plan diamétral commun aux deux surfaces.

Prenons pour plan des x y l'équateur de la sphère, le centre O pour centre des coordonnées et l'axe des x, parallèle à la ligne de terre.

Soit $y = \alpha x$ l'équation du rayon lumineux en projection horizontale

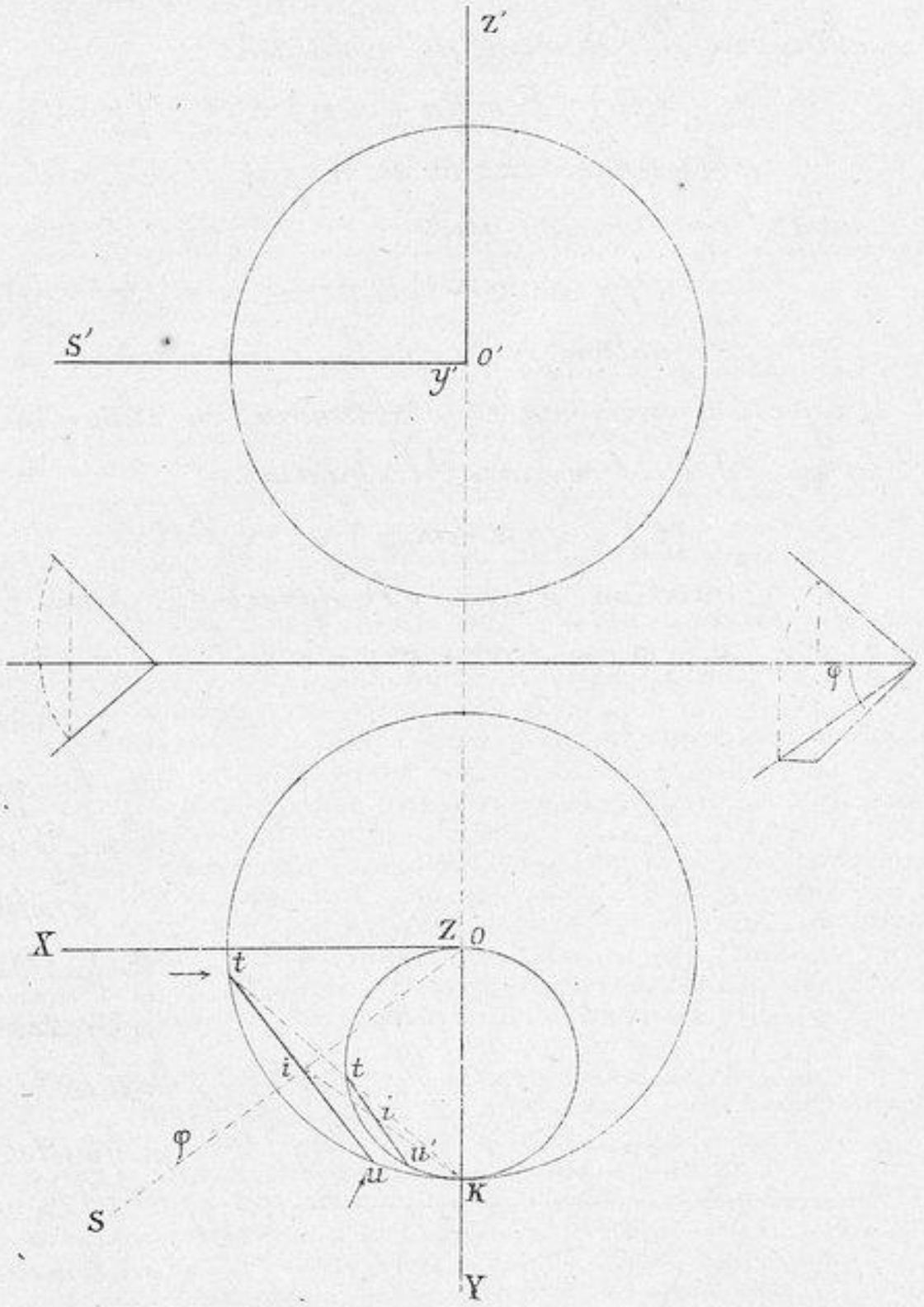
$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

l'équation de la grande sphère.

La petite sphère aura pour équation:

$x^2 + (y - \frac{R}{2})^2 + Z^2 = \frac{R^2}{4}$ ou en simplifiant :

(2) $\qquad x^2 + y^2 - Ry + Z^2 = 0$.



Un plan perpendiculaire au rayon lumineux aura pour équation :

(3) $\qquad y = -\frac{1}{\alpha} x + \beta$ $\qquad$ β étant indéterminé.

Les Equations 2 et 3 définissent la directrice du cône.
Le cône ayant son sommet à l'origine, les équations d'une de

ses génératrices, seront :

$$(4) \qquad y = mz.$$

$$(5) \qquad x = nz.$$

On exprimera que cette droite rencontre la directrice ; on éliminera pour cela $x\ y\ z$ = entre les équations 2.3.4 et 5. On obtiendra l'équation de condition

$$(6) \quad Rm(n+\alpha m) = \alpha\beta(n^2+m^2+1).$$

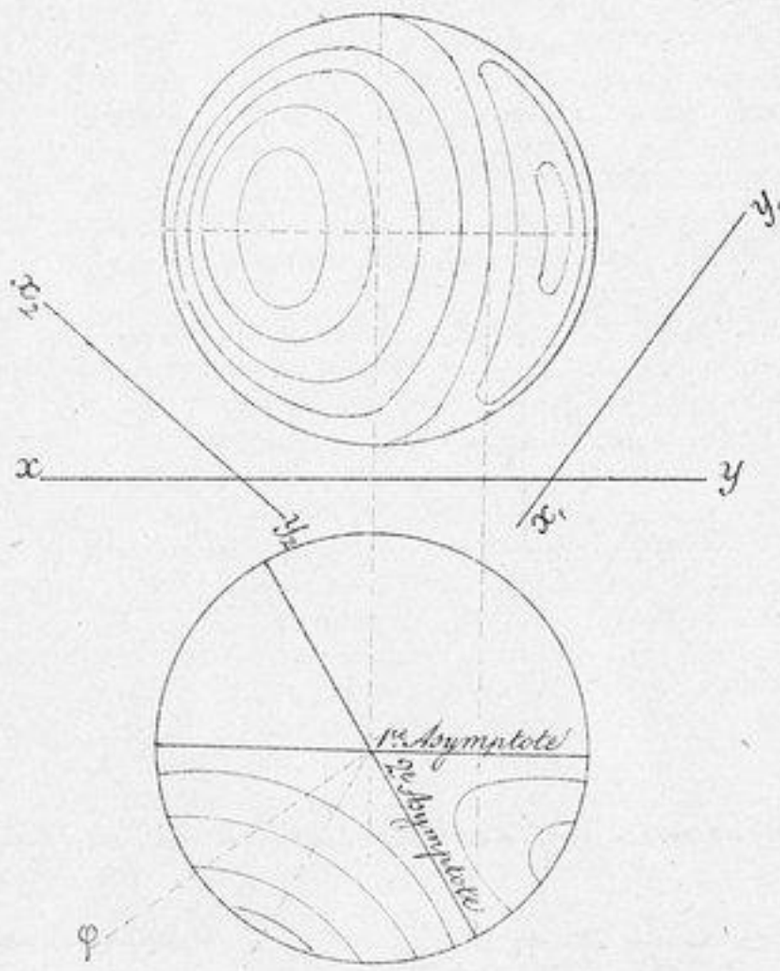
Remplaçant m et n par leurs valeurs tirées de (4 et 5) on aura l'équation du cône

$$(7) \quad Rxy + R\alpha y^2 = \alpha\beta(x^2+y^2+z^2)$$

L'équation de la courbe d'intersection du cône et de la sphère en projection horizontale s'obtiendra en éliminant z entre les équations (1 et 7) et l'on aura l'équation

$$(8) \quad y(x+\alpha y) = \alpha\beta R.$$

Equation d'une Hyperbole dont les asymptotes sont les droites $y = o$ et $x + \alpha y = o$.



L'une est le méridien de front de la sphère, l'autre est la ligne d'ombre propre.

Toutes les lignes d'égales teintes dans cette hypothèse se projetteront horizontalement suivant des hyperboles ayant mêmes asymptotes.

La connaissance d'un point seulement suffira donc pour les tracer par points. On en déduira ensuite les courbes en projection verticale.

L'épure projection verticale, une fois faite en prenant $x_1\ y_1$, pour ligne de terre, la sphère se présentera dans la position ordinaire d'une élévation ; en

prenant x_2 1/2 on la verra en plan.

On ne s'étendra par d'avantage sur l'étude d'une sphère polie placée dans les conditions précedentes, conditions tout-à-fait en dehors de celles qui se présentent ordinairement.

Nous avons admis en effet :

1° Que l'incidence ne modifiait par l'éclat du rayon réfléchi (ce qui n'est par exact)

2° Que la sphère était isolée au milieu de l'atmosphère et placée très-loin de la terre.

3° Que l'éclat des diverses parties du ciel était conforme à la loi figurée par la courbe représentative.

Or les nuages modifieront cet éclat et les objets qui entourent le corps poli viendront s'y réfléchir et former image.

Lorsque l'on voudra, dans un dessin, rendre l'aspect d'un corps parfaitement poli, on devra figurer à sa surface, les images des objets environnants. La Géométrie donnerait le moyen de trouver ces images brillantes, mais les épures seraient fort compliquées et il serait oiseux pour un cas si rare dans la pratique, de faire une pareille étude. Il sera préférable, si le cas se présente, d'agir comme les peintres, de faire poser le modèle et de le copier

Corps mi-polis. — Les corps mi-polis participent, comme propriétés, des corps polis et des corps dépolis.

Les lumières intenses s'y réfléchissent plus qu'elles ne s'y diffusent, et les lumières faibles font le contraire.

Une lumière intense donnera donc lieu sur leur surface à une image brillante, comme s'ils étaient polis. Nous chercherons ce point brillant comme nous l'avons fait ci-dessus.

Nous tracerons l'ombre propre comme si la surface était dépolie, et nous adopterons comme lignes de teintes, une série de courbes passant graduellement du point brillant à la ligne d'ombre propre.

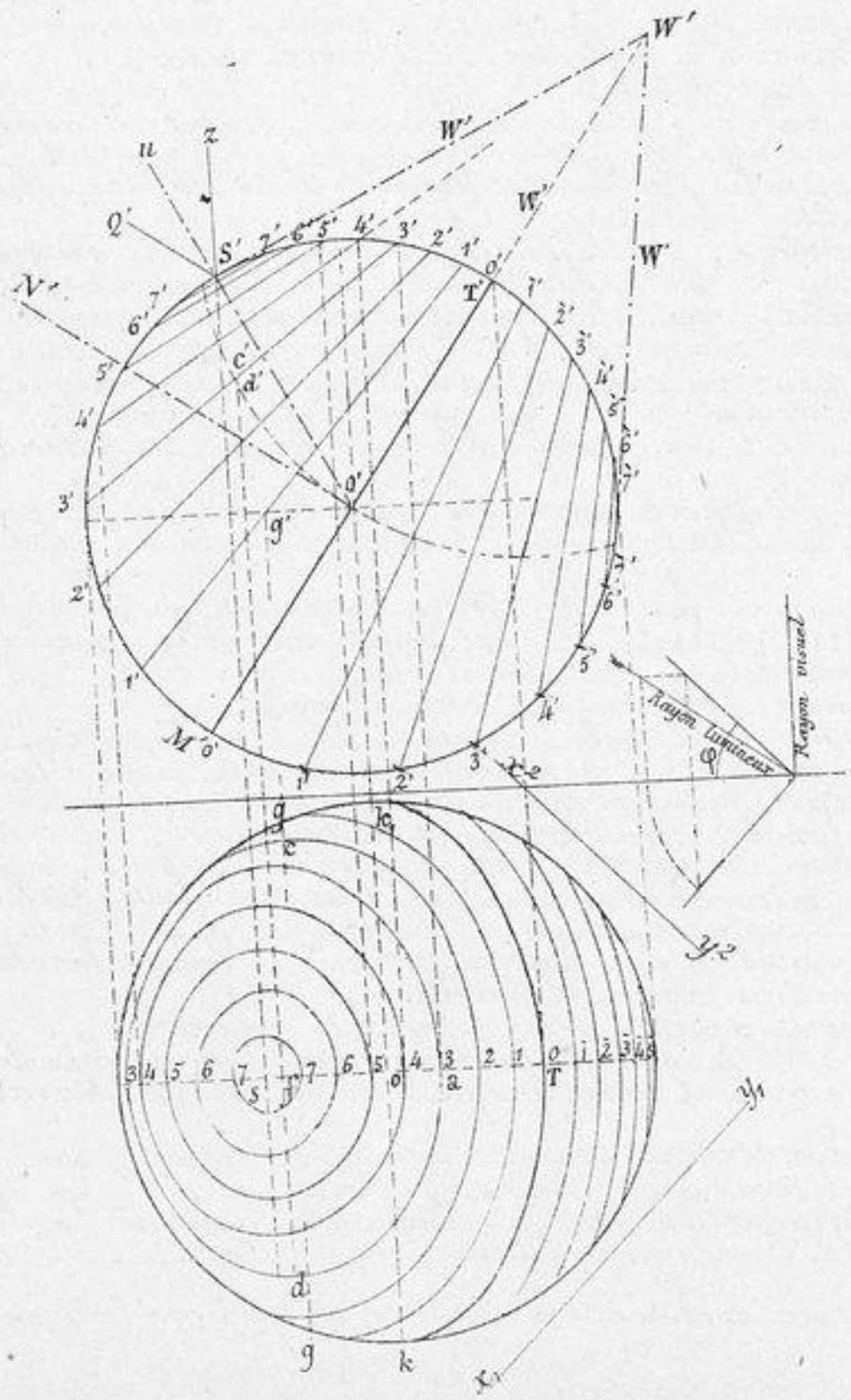
Epure :— Nous avons adopté la construction conventionnelle suivante, s'appliquant à un observateur qui regarderait la projection horizontale. OO' est le centre de la sphère. Le rayon lumineux est rendu par une rotation parallèle au plan vertical et projeté à l'angle φ sur ce plan.

Le point brillant sera situé sur le méridien de front.

Le rayon visuel est perpendiculaire au plan horizontal. On a mené le rayon lumineux N'O' qui passerait par le centre. La bissectrice O'S' a donné en S'S le point brillant.

L'ombre propre est déterminée par le grand cercle M'T' perpendiculaire au rayon lumineux.

Pour simplifier, on a pris pour lignes de teinte des courbes planes.



On a mené le plan tangent S'W' au point brillant et l'on a pris l'intersection projetée tout entière en W' de ce plan tangent et du plan d'ombre propre.

Les lignes de teinte seront les sections faites par des plans non plus parallèles, mais passant tous par la ligne W' perpendiculaire au plan vertical.

Comme pour la sphère dépolie, on a pris sept plans divisant l'hémisphère éclairé en 8 zônes.

A cet effet, l'arc T'S' a été partagé en 8 parties égales. Ces lignes ont été affectées de nombres positifs. On a prolongé le même tracé

dans l'hémisphère ombré et les lignes ont été affectées de nombres négatifs.

On remarquera que dans une sphère polie ou mi-polie, le point brillant est beaucoup plus éloigné du contour apparent que dans une sphère dépolie. Le contour apparent est plus sombre sur la sphère mi-polie que sur l'autre.

Echelles de teintes. (Voir les échelles données à la fin du cours).

Ayant tracé les lignes de teintes sur une sphère polie ou mi-polie, il sera facile d'en déduire les lignes de teintes sur des cylindres ou sur des cônes de révolution placés dans des positions quelconques.

Il suffira de circonscrire à la sphère, le cylindre ou le cône, de déterminer la ligne de contact, de prendre les points de rencontre de cette ligne avec les courbes de teintes et de faire passer par ces points, les génératrices des cônes ou des cylindres dont on veut faire le lavis.

Les échelles de teintes adoptées sont au nombre de quinze. Elles s'appliquent aux corps mi-polis qui sont ceux que l'on rencontre le plus souvent dans le dessin de machines.

Cylindres. — L'Echelle N°1 s'applique aux cylindres en relief ou en creux dont les génératrices seraient perpendiculaires aux plans de projection ou parallèles à la ligne de terre.

Les Echelles N°s 2 et 3 donnent les lignes de teintes pour un cylindre en relief ou en creux dont les génératrices seraient parallèles au plan horizontal, ou au plan vertical, ou à un plan de profil et seraient, de plus, inclinées à 45° et perpendiculaires en projection au rayon lumineux.

L'Echelle N°2 s'applique au plan, et l'Echelle N°3 à l'élévation.

Nous appellerons ce cylindre, cylindre à 45°, en lumière.
Les Echelles 4 et 5 s'appliquent à un cylindre à 45° dans l'ombre.
Les génératrices sont inclinées à 45° en projection horizontale, mais

parallèles et non plus perpendiculaires au plan projetant horizontalement le rayon lumineux. Pour s'en servir, on prend sur une bande de papier la largeur du cylindre que l'on veut laver, on inscrit cette bande entre les lignes extrêmes de l'échelle et on reporte ensuite ces points sur la base du cylindre.

Cônes. — On a pris des cônes de révolution dont les axes seraient perpendiculaires aux plans de projection, ou parallèles à la ligne de terre.

A cet effet, on a divisé le demi-méridien de la sphère en huit parties égales, ce qui a déterminé des parallèles, le long desquelles on a circonscrit des cônes à pointe en haut, et à pointe en bas.

Les demi-angles au sommet de ces cônes seront donc en commençant par le plus aigu : 22°½ — 45° et 67°½.

Les Echelles 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, s'appliquent à ces cônes, les unes aux élévations, les autres aux plans.

Pour se servir de ces échelles sur les plans, on les inscrit entre les deux tangentes à 45° menées à la base du cône et perpendiculairement au rayon lumineux, on ramène les points obtenus sur le cercle de base par de nouvelles lignes à 45° et l'on obtient ainsi les pieds des génératrices qui formeront les lignes de teintes. Le croquis qui accompagne chaque échelle fait comprendre cette manière d'opérer.

Contours apparents circulaires. — L'Echelle N°15 donne les points où les lignes de teinte viennent se raccorder avec le contour apparent d'une surface lorsque ce contour apparent est la projection d'un cercle parallèle au plan de projection.

Tel est le cas pour la sphère, le tore et le plus généralement pour toute surface de révolution projetée sur un plan perpendiculaire à son axe.

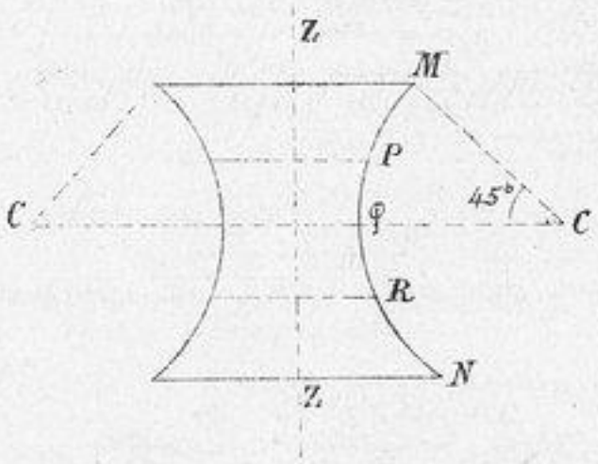
On s'en sert comme on l'a indiqué pour les cônes en plan.

Sujet du 1er Exercice de Lavis théorique.

On dara, dans le premier lavis théorique, faire l'application des échelles précédentes au lavis de cylindres et de cônes dans les positions auxquelles se rapportent ces échelles.

On les utilisera également pour la représentation d'une sphère et d'une portion de tore, engendrée par un arc de cercle MN de 90° tournant autour d'une droite ZZ située dans son plan.

Si nous prenons sur cette surface le parallèle M, le cône qui serait circonscrit le long de ce parallèle serait un cône à 45° pointe en bas, en élévation (échelle No. 11'). Nous aurons donc, en nous servant de cette échelle 11' des pointes de courbes de teintes sur la ligne M. Au point P, milieu de l'arc MQ, le parallèle correspondant servirait de ligne de contact à un cône de 22° ½, pointe en bas, en élévation et ainsi de suite. On aura, de cette manière, assez de pointes des courbes de teintes pour les tracer facilement.



On remarquera que la courbe des pointes No. 0 sera la ligne d'ombre propre, réelle ou virtuelle.

Pour la Sphère, on procèdera de même, mais en se servant en plus des Echelles des cylindres à 45° dans l'ombre et dans la lumière (Echelles nos. 2' et 4') et de l'échelle no. 15' qui donnera les pointes situées sur les contours apparents.

Principe des Couleurs.

Tons simples et purs. — En peinture, lorsqu'on ne cherche pas à se tenir dans les lois rigoureuses de la physique, on admet trois couleurs simples, que nous nommerons les tons simples, et qui, par leur réunion, formeront le blanc, ce sont :

Le Jaune, couleur claire et brillante,
Le Rouge, couleur éclatante et demi-claire,
Le Bleu, couleur sombre.

Le noir est l'absence de lumière ; ce n'est pas une couleur.

Lorsque ces tons sont à leur maximum d'intensité et qu'ils ne sont mêlés ni de noir, ni de blanc, on dit que ces tons sont purs.

Tons rabattus, tons éclaircis. — S'ils sont mêlés de noir, on dit que les tons sont rabattus ; s'ils sont mêlés de blanc, on dit qu'ils sont éclaircis.

Suivant la fraction de noir ou de blanc qu'ils contiennent, ils peuvent être éclaircis ou rabattus à 1/10e, 2/10, 3/10, etc. . . . . .

Tons composites de 1er, 2e ou 3e Ordre. — Si l'on mélange par parties égales, les tons simples, on obtiendra les tons composites de premier ordre qui pourront être rabattus ou éclaircis.

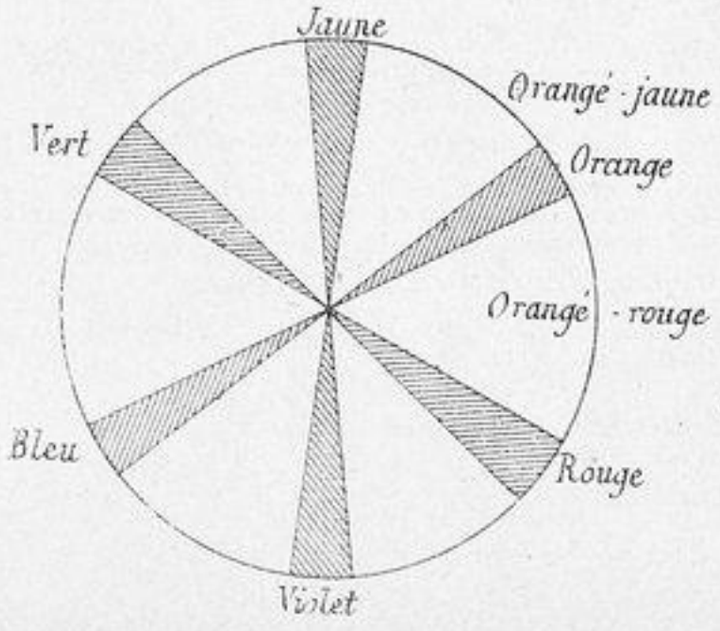
Rouge et Jaune donnent Orangé
Jaune et Bleu donnent Vert
Bleu et Rouge donnent Violet.

Si l'on mélange un ton composite de premier ordre avec le ton simple, qui en est le plus voisin, on aura un ton composite de 2e ordre.

Orangé et Rouge donnent Orangé-Rouge
Orangé et Jaune donnent Orangé-Jaune,
etc. . . . . .

Les tons de 3e ordre s'obtiendront en mélangeant l'un des précédents avec la couleur simple ou composite qui l'avoisine.

Orangé-rouge et rouge donnent Orangé-rouge-rouge,
etc. . . . . .



Rosace des couleurs pures. — On trace un cercle : on prend les points situés aux sommets d'un triangle équilatéral et l'on y place les trois couleurs simples

Sur les points situés à égale distance des précédents on placera les tons composites du premier ordre, et ainsi de suite.

Cette rosace a été construite par M. Chevreul pour servir aux usages de la Manufacture des Gobelins. Il a construit également d'autres rosaces, donnant les tons de la précédente, mais éclaircis ou rabattus à 1/10e, 2/10, etc. Il les a classés en sorte lorsqu'il lui a été facile, étant donné un ton quelconque, d'indiquer la rosace à laquelle il appartient et la place qu'il y occupe.

Couleurs complémentaires. — Deux tons sont complémentaires lorsque par leur mélange ils donnent du blanc ou du gris non coloré.

Si l'on admet que les trois tons simples sont nécessaires pour former le blanc, on aura, d'une manière approchée, tous les tons complémentaires les uns des autres, en prenant sur la rosace des couleurs celles qui sont aux extrémités d'un même diamètre.

Le Rouge a pour complément le Vert
Le Jaune ——— id ——— le Violet
Le Bleu ——— id ——— l'Orange

Couleurs usuelles. — On ne trouve que très-difficilement dans le Commerce les couleurs pures, elles sont toujours plus ou moins mêlées à un pigment noir, de telle sorte que si l'on mélange deux couleurs complémentaires, on n'obtiendra pas du blanc, mais du gris.

Si de même on mélange un jaune pur et un bleu pur du commerce, on n'obtiendra pas un vert pur, mais un vert un peu gris, c'est ce qui explique les efforts des fabricants de couleurs pour arriver à créer directement toutes les nuances des tons purs et composités.

Pour le dessin de machines et le lavis, on n'a besoin que des couleurs suivantes:

Celles qui ne sont pas indispensables sont marquées d'une croix.

Encre de Chine: (Ombres);

Ocre jaune
Gomme gutte
× Jaune Indien
× Sépia
} Jaunes.

Terre de Sienne brûlée
Carmin
× Vermillon
} Rouges.

Bleu de Prusse
× Indigo
× Outremer ou Cobalt
} Bleus.

Teintes Conventionnelles. — On a adopté, dans le dessin de machines, les teintes conventionnelles suivantes, pour rendre la coloration des principaux matériaux que l'on emploie en mécanique.

Composition des Teintes conventionnelles :

Fer, Tôle, Acier	Bleu de Prusse	18	20
	Encre de Chine	2	
Fonte	Bleu de Prusse	15	20
	Encre de Chine	4	
	Carmin	1	
Laiton, Bronze	Gomme Gutte	18	20
	Carmin	2	
	Jaune Indien, si c'est possible	"	
Cuivre Rouge	Terre de Sienne brûlée	10	20
	Carmin	10	
Bois	Ocre jaune	4	20
	Sépia	4	
	Terre de Sienne brûlée	10	
	Carmin	2	

Terrains : — Sépia ou Sienne brûlée avec touches plus intenses, faites au pinceau.
Ouvrages en Coupe : — Carmin très-étendu.

Lavis en Camaïeu. — On nomme Camaïeu, une peinture faite avec un seul ton (bleu, rouge ou noir). Un lavis à l'encre de Chine est un camaieu.

Il est facile de voir que dans un pareil lavis, on rendra d'une manière approchée les effets des couleurs en se servant d'une teinte très-légère pour le jaune, puisque c'est une couleur claire, d'une teinte plus accentuée pour le rouge, et d'une teinte plus foncée encore pour le bleu.

Causes de la Couleur des objets.

Saturation, Sursaturation, Sous-Saturation. — Un objet éclairé par la lumière blanche, nous paraît coloré parce que cette lumière est décomposée à sa surface. Une portion est pour ainsi dire absorbée, tandis que l'autre est renvoyée. Si le rouge est absorbé, le vert est renvoyé. La couleur renvoyée est complémentaire de celle qui est absorbée.

Il existera un instant où la limite d'absorption sera atteinte. A ce moment, si l'on éclaire davantage la surface, toute la lumière blanche reçue ne sera pas décomposée : une portion nous sera renvoyée, et l'objet nous paraîtra teinté de sa couleur propre, mais mêlée de blanc, c'est-à-dire éclaircie.

Au contraire, si la lumière blanche éclairante diminue d'intensité, l'objet paraîtra plus sombre et teinté de sa couleur propre rabattue.

Il y aura saturation, dans le premier cas, sursaturation dans le second, et sous-saturation dans le troisième.

Conventions. — Orientations saturées, sursaturées et sous-saturées. — En dessin géométrique, il nous faut un point de départ défini, quoique conventionnel.

Nous conviendrons qu'un plan est à sa limite de saturation, c'est-à-dire à son maximum de coloration, ni teinté de noir ni teinté de blanc, lorsqu'il est parallèle au plan de la projection que l'on regarde. Nous nommerons orientation saturée celle qui correspond à cette position. Si le plan se place plus normalement à la lumière, il se sursature et s'éclaircit ; s'il fait le contraire, il se sous-sature et se rabat.

Il est facile de voir, en consultant les échelles, que sur les surfaces courbes, la zône saturée, c'est-à-dire celle sur laquelle nous devrons trouver la couleur propre de l'objet, ni rabattue ni éclaircie, sera celle comprise entre les lignes de teinte N°4 et N°5.

Des Teintes. — Transparence et intensité d'une teinte.

Une teinte d'encre de Chine ou de couleur appliquée sur le papier agit comme un verre coloré ou teinté qui ne laisse passer qu'une fraction de la lumière qui est distribuée à ce papier et qui nous en renvoyée par lui.

Nous appellerons transparence d'une teinte, la fraction de la lumière que laisse passer cette teinte.

L'intensité serait la fraction de lumière arrêtée.

Si on représente par T la transparence et par I l'intensité, on aura:

$$T + I = 1.$$

Problème N°1. Quelle est la transparence finale T'' de deux teintes superposées, de transparence T et T'? — On aura:

$$T'' = T \times T'.$$

Conséquences: 1° Si l'on prend une série de teintes égales superposées, tandis que le nombre des teintes croîtra en progression arithmétique, la transparence finale décroîtra en progression géométrique.

2° Si l'on passe une même teinte sur deux autres teintes inégales, l'assombrissement relatif le plus considérable sera produit sur la teinte la plus faible.

Problème N°2. Réaliser au lavis à l'encre de Chine une teinte de transparence connue, 2/3, par exemple.

Avec un tire-ligne rempli d'encre absolument noire, on tracera une série de traits parallèles et équidistants. Ces traits auront une épaisseur constante, 1/2 millimètre, par exemple, et les blancs compris entre eux auront un millimètre. Vue de loin, une feuille de papier ainsi réglée paraîtra teintée. La surface

des blancs sera les $\frac{2}{3}$ de la surface totale et par suite la transparence de la teinte ainsi figurée sera $\frac{2}{3}$. Il sera facile ensuite de mélanger d'eau une teinte d'encre de chine de telle sorte que la teinte qu'elle fournira au pinceau, soit équivalente à celle que nous venons de créer au tire-ligne.

Mélange des teintes dans le Godet. — Problème 3. On a dans un 1er godet un volume V de teinte de transparence t et dans un deuxième godet, un volume V', de teinte de transparence t'. On les mélange; quelle sera la transparence t'' de la teinte ainsi formée?

Imaginons, pour fixer les idées que la couche d'eau teintée déposée par le pinceau ait une épaisseur constante E.

Répartissons la teinte du premier godet, entre n diaphragmes sans épaisseur, séparés entre eux par une distance E. Au lieu du volume V on pourra, si les diaphragmes ont pour surface l'unité, prendre la quantité nE.

$$V = nE.$$

La deuxième teinte répartie de même aura un volume V' représenté par $n'E$.

La transparence de la teinte comprise entre deux diaphragmes du premier vase est T, et puisque nous avons n diaphragmes, la transparence finale des n diaphragmes du 1er vase regardés en totalité sera $T = t^n$ de même la transparence finale des n' diaphragmes du 2e vase regardés en totalité sera:

$$T_2 = t'^{n'}$$

si nous plaçons les deux vases au bout l'un de l'autre, la transparence totale sera:

$$T_3 = T \times T_2 = t^n t'^{n'}.$$

Mais il est évident qu'il reviendrait au même de mêler d'abord ces deux teintes et de les diviser en $n + n'$ diaphragmes, ou de faire ce que nous venons d'indiquer. D'ailleurs, il est facile de vérifier par expérience que si dans une cuve transparente, on place deux teintes d'inégale intensité, séparées par une lame de verre, la transparence totale sera la même, si on laisse cette lame

sans mêler les teintes ou si on a enlevé la lame en les mêlant.

Soit t'' la transparence de la teinte résultante, d'épaisseur E comprise alors entre deux diaphragmes, on aura :

$$T_3 = t''^{(n+n')} \quad \text{d'où l'on déduit :}$$

$$t''^{(n+n')} = t^n t'^{n'}, \quad \text{ou :}$$

$$t''^{(v+v')} = t^v t'^{v'}, \quad \text{et :}$$

$$t'' = \sqrt[v+v']{t^v t'^{v'}}.$$

Cette formule donnerait le moyen de créer par des mélanges convenables, une teinte de transparence déterminée, une fois constituée, comme ci-dessus, une autre teinte de transparence connue.

Si l'on veut opérer par des additions d'eau, l'eau ayant une transparence $t = 1$, on fera dans la formule $t = 1$. Si, de plus, on prend pour unité le volume de la teinte à modifier, la formule précédente se simplifiera, en faisant $v' = 1$.

Exemple. Quel volume d'eau faut-il ajouter à un volume égal à l'unité de teinte $\frac{2}{3}$ pour obtenir la teinte $4/5$.

La formule générale est $T''^{(v+v')} = T^v \times t'^{v'}$.

On fera : $t = 1 \quad v' = 1 \quad t = \frac{2}{3} \quad t'' = \frac{4}{5}$.

Il viendra : $t''^{(v+1)} = t' \quad$ et : $(v+1) \log. t'' = \log. t''$

$$V = \frac{\log. t' = \log. t''}{\log. t''} = \frac{\log. \frac{2}{3} - \log. \frac{4}{5}}{\log. \frac{4}{5}} = \frac{0.07918}{0.09681} = 0.82.$$

Pour faire un godet de teinte $\frac{4}{5}$ avec un godet $\frac{2}{3}$, il faudra l'additionner de 0.82 de son volume d'eau pure.

Dans la pratique, on ne s'inquiète jamais de faire rigoureusement ces mélanges. Ce n'est qu'après avoir exécuté de nombreux exercices de la vie que l'on arrive à la juste appréciation des mélanges à faire pour avoir les teintes convenables.

Classification des teintes. — Nous diviserons ces teintes en quatre séries :

1° La teinte d'ébauche (Teinte N°0). C'est une teinte d'encre de Chine, de transparence $\frac{2}{3}$ environ, que l'on place sur tout ce qui est dans l'ombre propre ou portée.

2°. Les teintes d'ombre propre et les demi-teintes, au nombre de quatre (teinte 1.2.3.4). Ce sont encore des teintes d'encre de Chine.

La teinte N°. 1, s'obtient en additionnant de 1/2 environ, d'eau pure, la teinte 0, et se passe entre les lignes +1 et $\overline{1}$.

La teinte N°. 2 se passe entre +2 et $\overline{2}$. On l'obtient en additionnant la teinte 1 de $\frac{1}{3}$ d'eau, et ainsi de suite.

3°. Les teintes de couleurs au nombre de 3 (teintes 5, 6 et 7)

Elles sont diversement composées, suivant la nature de l'objet et vont en augmentant de transparence. (Voir teintes conventionnelles). On les passe entre +5 et $\overline{5}$ — +6 et $\overline{6}$ — +7 et $\overline{7}$. Sur le modèle en Chromolithographie, il n'y a pas de teinte N°. 8, et l'on a laissé la zône brillante complètement blanche. Dans les dessins lavés, on passera une teinte N°. 8 excessivement légère.

4°. Teintes d'ombres portées (Teintes N°s. 9. 10. 11. 12, etc)

D'après ce qui a été dit sur l'intensité des ombres, on sait qu'une zône dans l'ombre portée sera d'autant plus noire qu'elle eût été plus claire si elle n'eût pas été dans l'ombre.

Si donc (ce qui n'a pas lieu pour les corps que l'on représente dans le 1er. exercice de lavis) certains cônes ou cylindres étaient dans l'ombre portée, la zône +7 devrait être la plus noire; viendraient ensuite les zônes +7, +6, +5, etc.....

On devrait donc, dans ce cas, passer une première teinte noire, plus noire que la teinte d'ébauche, sur la zône 7. — Une deuxième teinte s'étendant jusqu'à la ligne +6 et recouvrant les zônes +7 et +6 et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à la ligne n°0.

On remarquera que ces teintes doivent être plus intenses que les précédentes, pour plusieurs raisons: il faut qu'elles détruisent l'effet de dégradation produit par les précédentes et en sens inverse de celui que l'on veut maintenant obtenir; 2°. il faut qu'elles produisent une nouvelle dégradation; 3°. Elles s'appliquent sur une région fortement teintée déjà, et comme on l'a vu plus haut, leur effet relatif en est diminué.

Principe des distances. — Lorsqu'un objet s'éloigne de nous, deux effets se produisent :

1° La lumière qu'il nous envoie, et, par suite, l'éclat total qu'il possède pour nous, décroît en raison directe du carré de la distance; cet effet est absolument nul pour notre œil, et s'il existait seul, les objets paraîtraient aussi éclatants de loin que de près. En effet, plus un objet est loin, moins il nous envoie de lumière, c'est vrai, mais plus il paraît petit dans notre œil, de telle sorte que celui-ci, recevant moins de lumière, mais la condensant sur un espace plus petit, l'éclat par unité de surface de cet espace reste constamment le même, et l'objet doit paraître aussi éclatant de loin que de près. Dans les pays où l'atmosphère est très-pure, en Égypte notamment, les distances ne modifient que la grandeur apparente des objets, mais presque pas l'intensité de leur coloration.

2° Lorsqu'un objet s'éloigne, il s'interpose entre lui et nous une sorte de brouillard formé par l'air; ce brouillard est d'autant plus intense que l'air est moins pur. Il agit :

1° Par réflexion, en recevant de la lumière et nous la renvoyant, ce qui diminue d'autant l'éclat des objets situés derrière.

2° Par transparence, en colorant de sa couleur, qui est bleue, les objets devant lesquels il s'interpose.

Des différents plans en peinture. — En peinture, on classe les objets suivant leur distance à l'œil par les places qu'ils occupent.

Les objets placés très-près sont dits en premier plan; on admet que sur eux l'effet de l'air est nul; donc les objets en premier plan posséderont leur couleur absolue.

Placés un peu plus loin, les objets sont dits en deuxième plan; en deuxième plan, les objets jaunes paraîtront moins jaunes et un peu bleuir ou mieux, un peu neutraliser comme couleur.

Les objets rouges paraîtront moins rouges et un peu bleuir, c'est-à-dire un peu violets.

Les objets bleus paraîtront moins bleus s'ils sont bleu foncé, et au contraire un peu plus bleus s'ils sont bleu très-clair.

Encore plus loin, les objets sont en troisième plan; tous les effets indiqués ci-dessus devront être accentués.

Enfin, tout-à-fait au loin, les objets sont dits dans le lointain; la couleur bleue augmente, et l'on peut dire que toutes les couleurs viennent se fondre dans le bleu.

Le jaune devient bleu-jaune, c'est-à-dire un peu verdâtre.

Le rouge devient rouge-bleu, c'est-à-dire un peu violacé.

Le bleu devient moins foncé s'il était d'abord foncé, et plus foncé, au contraire, s'il était très-clair; en tout cas, jamais ce bleu de lointain ne peut devenir intense; il ne doit évidemment pas dépasser le bleu de ciel, qui est le bleu de l'air à son maximum d'intensité.

Manière de rendre en Camaïeu, à l'Encre de Chine, les effets de la distance. —

Les effets de distance se rendront à l'encre de Chine de manières différentes suivant l'intensité des tons. En effet, un objet est-il foncé? En s'éloignant, il doit: 1° perdre de sa coloration, c'est-à-dire s'éclaircir; 2° prendre le ton de l'air, c'est-à-dire se foncer.

Suivant que l'un ou l'autre de ces deux effets l'emportera, on devra diminuer ou augmenter la teinte du premier plan.

Exemples:

1° Un objet jaune en lumière, se rendra en premier plan par une teinte d'encre de Chine pour ainsi dire nulle; en s'éloignant, c'est l'effet d'assombrissement de l'air qui l'emportera; on rendra l'éloignement en ajoutant de légères teintes d'encre de Chine qui, cependant, ne devront jamais, même pour les lointains, dépasser la teinte que l'on jugera devoir représenter le bleu de ciel.

2° Un objet jaune dans l'ombre, et, plus généralement tout objet dans l'ombre se rendra, en premier plan, par une teinte d'encre de Chine en général assez intense; en éloignant l'objet, c'est l'effet d'éclaircissement qui l'emportera et on devra diminuer les teintes.

3° Pour un objet rouge en lumière, le rouge étant un ton demi-sombre, la teinte d'encre de Chine qui le rendra ne sera ni claire ni foncée, et à peu près celle qui conviendrait comme bleu de lointain; il pourra donc se faire que l'éloignement conduise à ne modifier que très-peu la teinte rendant le rouge. Cependant, comme il ne faut jamais, en dessin, rester dans l'indécision, on devra franchement adopter un rouge clair ou un rouge foncé; s'il est clair, on en rendra les effets comme on l'a fait pour du jaune; s'il est foncé, on agira comme il va être dit pour le bleu.

4° Un objet bleu dans la lumière, le bleu étant une couleur sombre, se rendra, en premier plan, par une teinte d'encre de Chine un peu accentuée; en s'éloignant, cette teinte devra diminuer, tandis que l'air viendra pour la foncer; le premier effet l'emportera; par conséquent, pour les bleus, surtout les bleus sombres (ceci ne s'appliquerait pas aux bleus clairs) la distance se rendra en diminuant le ton de premier-plan.

Règle Générale. Veut-on savoir en faisant un lavis, si tel ton d'ombre ou de lumière doit être rabattu ou éclairci en s'éloignant, on commencera par établir le ton qui conviendrait aux lointains, et qui sera très-voisin de celui qui figurera le ciel; les tons plus clairs que celui-là s'assombriront en s'éloignant, mais sans jamais dépasser comme ton celui des lointains; les tons plus foncés que celui des lointains devront s'éclaircir en s'éloignant, mais sans jamais devenir plus clairs que le ton des lointains. En résumé, tous les tons en s'éloignant tendront à se rapprocher d'un ton unique, qui est celui des lointains.

Effets de contraste et d'irradiation.

Ces effets sont physiologiques, et se produisent sur les nerfs de la rétine. Leur influence est considérable sur l'aspect apparent des objets; le dessinateur doit les connaître, afin de les produire dans ses lavis en les exagérant, afin d'augmenter ainsi l'illusion produite par eux sur le spectateur. Voici les principaux effets

de contraste et d'irradiation :

1° Si deux surfaces, placées à côté l'une de l'autre sont, l'une noire et l'autre blanche, leur différence d'éclat s'exagère par le seul fait de leur juxtaposition.

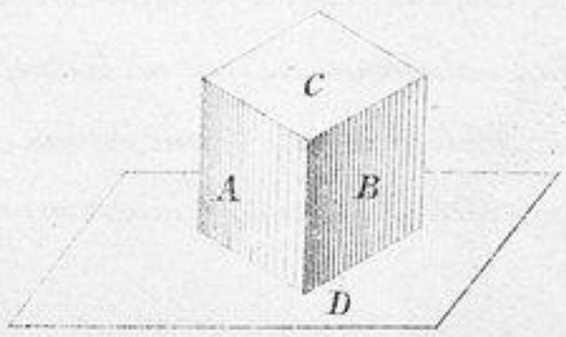
2° Une même surface légèrement grise, paraîtra presque noire si on la fait se détacher sur un fond très-blanc ou très-lumineux, et presque blanche si on la met sur un fond noir.

3° Un cercle très-blanc placé sur un fond moins blanc semblera entouré d'une auréole dégradée grise. Au contraire un cercle très-noir placé sur un fond presque blanc semblera entouré d'une auréole plus blanche que le fond et se dégradant vers le blanc du fond en s'éloignant du cercle.

4° Une surface d'une certaine couleur, verte par exemple, se détachant sur un fond vert un peu différent d'elle, paraît moins verte que si on la place sur un fond d'une couleur complémentaire, rouge par conséquent. Autrement dit : Deux tons de couleurs analogues s'atténuent réciproquement, et deux tons de couleurs opposées, c'est-à-dire complémentaires, s'exaltent l'un par l'autre.

5° Un rond d'une certaine couleur placé sur un fond blanc, paraît entouré d'une auréole dégradée, teintée de la couleur complémentaire.

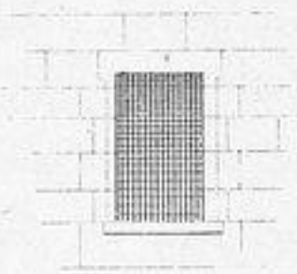
6° Effet d'irradiation. Deux surfaces égales, l'une noire et l'autre blanche, placées à côté l'une de l'autre, ne paraissent par égales, et la surface blanche paraît plus grande. C'est par un effet analogue que le croissant de la lune, alors que la lumière cendrée est visible, semble déborder sur la partie obscure du disque. Un fil fin, obscur, visible sur un fond gris, disparaît si le fond devient plus éclairé. Les plombs des vitraux d'église paraissent beaucoup plus minces qu'ils ne le sont en réalité. Dans certains cas, c'est à peine si on les voit. En résumé, il y a empiètement du clair sur l'obscur.



Conséquences. — (A) Si deux plans A et B se coupent suivant une arête vive CD, si l'un deux est éclairé, et si l'autre est dans l'ombre, la face dans l'ombre paraît

plus noire aux environs de l'arête CD et la face éclairée plus blanche. Le dessinateur devra donc dans son lavis accuser cet effet en l'exagérant.

(B) En architecture, les fenêtres qui se détachent sur les murs qui, même dans l'ombre, sont beaucoup plus éclairés que l'intérieur des pièces auxquelles appartiennent ces fenêtres, paraissent très-noires et plus foncées en haut qu'en bas. Ce dernier effet tient à ce que, dans les appartements les parties basses des murs sont plus éclairées que les parties hautes.

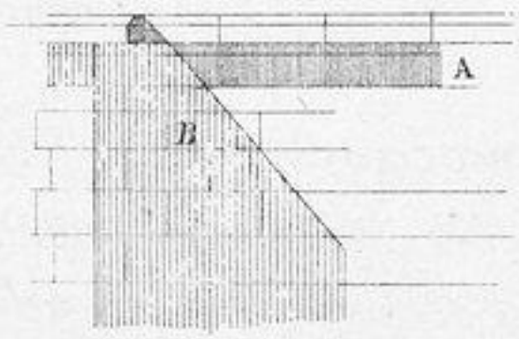


(C) Dans un édifice, les toits paraissent presque toujours sombres ; à moins qu'ils ne fassent miroir et ne réfléchissent la lumière. Cela tient à ce qu'ils se détachent sur le ciel qui est presque toujours très-brillant. Les ombres dans les toits paraissent toujours très-noires.

(D) Le ciel étant bleu, les objets qui se détachent sur lui doivent paraître plus <u>orangés</u> qu'ils ne sont. Ce fait est surtout sensible pour les Édifices en pierres jaunes. Aussi les Architectes ont-ils l'habitude, dans leurs lavis, lorsqu'ils veulent rendre l'effet d'un édifice en pierre jaune ou rouge, de passer la teinte plus intense à la partie supérieure.

Plus généralement, à cause du contraste puissant dû au ciel très-clair, tous les tons, que ce soient des tons d'ombre ou des tons de couleur, doivent être plus intenses à la partie supérieure des édifices qu'à la partie inférieure. On donnera plus loin une seconde cause de cet effet.

(E) En architecture, les ombres fines portées par les moulures de faible saillie, se détachent ordinairement sur un mur blanc à grande surface éclairée, et paraissent plus fines et plus noires qu'elles ne sont. Au contraire, les grandes ombres portées par des corps de bâtiment en saillie, paraissent plus claires et plus transparentes que les précédentes. Pour un dessin on devra exagérer ces effets comme l'indique le croquis ci-contre.



A plus noir que B

Des reflets dans le dessin de Machines et dans le dessin d'Architecture.

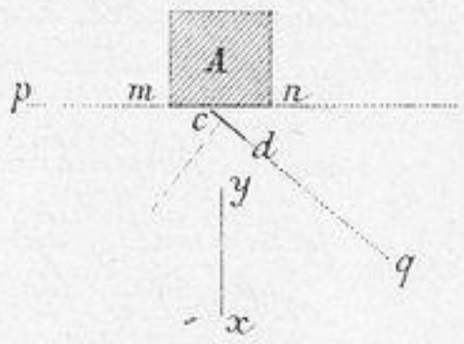
Dans le dessin de machines, on ne cherche pas à réaliser un effet artistique. Le lavis a surtout pour but de rendre la forme des objets ; on ne fait sentir la position relative des objets, que par les ombres qu'ils portent les uns sur les autres, et par les différences d'intensité des tons qui les recouvrent. Dans bien des cas, on ne trace même pas les ombres portées et on rend chaque objet comme s'il était isolé dans l'espace. On trace donc sa ligne d'ombre propre, et on fait le lavis soit par teintes fondues, soit par teintes plates, à l'aide des lignes d'égales teintes, en ne tenant compte que du rayon atmosphérique principal. Nous donnerons plus loin quelques exemples de solides géométriques levés d'après ces conventions et en faisant usage des échelles.

En Architecture, les édifices reposant sur le sol, qui est fortement éclairé, et souvent de couleur claire, les reflets atmosphériques doivent être combinés avec les reflets émanant du sol. Ces derniers sont même plus intenses que les premiers.

Cherchons à nous rendre compte de la direction suivant laquelle ils ont le plus d'intensité.

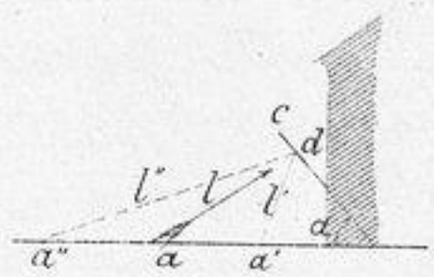
Cette direction combinée avec celle du rayon atmosphérique principal nous donnera celle des rayons de reflets totaux.

Rayon terrestre principal. — Soit en projection horizontale A un édifice rectangulaire, reposant sur un sol, mat, éclairé et renvoyant de la lumière par diffusion et non par réflexion, comme ferait une nappe d'eau. Il est évident que si nous plaçons un petit élément plan vertical c d, dans une position inclinée sur la face m n de l'édifice, il ne recevra de reflets que des points du sol situés dans l'angle p. c. q, et sera d'autant moins éclairé qu'il sera plus loin d'être parallèle à



la face m n. On peut donc dire que le rayon terrestre principal doit être dans un plan vertical, x y, perpendiculaire sur la face m n de l'édifice.

Quel angle avec le plan horizontal fait-il dans ce plan? — Pour nous en rendre compte, faisons une coupe verticale sur l'édifice.

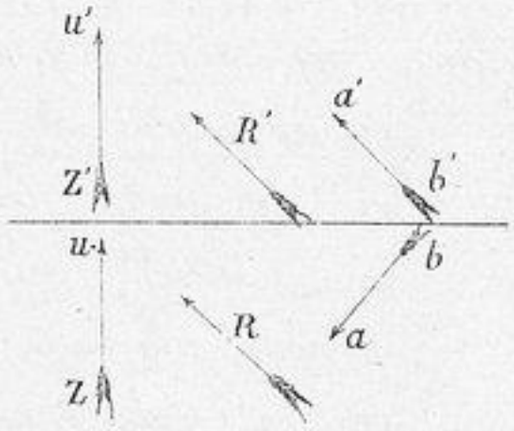


Un petit élément plan, c d, incliné à l'angle α, reçoit de la lumière d'une infinité de points, tels que a', a, a''.... situés à des distances l', l, l'', lui envoyant de la lumière, dont l'intensité varie avec l'angle d'incidence et avec la distance. En combinant tous ces effets, il est facile de reconnaître:

1°. Que l'élément c d sera plus éclairé quand il sera près du sol que quand il en sera loin.

2°. Qu'il sera éclairé au maximum quand il fera avec le sol un certain angle α que le calcul peut déterminer (on trouve: — tang. $\alpha = \frac{\omega}{2}$). Le rayon de reflet maximum dû au sol, sera pris normal au plan c d dans la position précédente.

Combinaison des reflets du sol et des rayons atmosphériques. — Rayon aéro-terrestre principal. — Combinons les reflets du sol, représentés par le rayon terrestre Z u — Z' u' situé dans un plan de profil Z u, et dirigé de bas en haut; on a le rayon atmosphérique principal représenté en a b — a' b'; (dans l'hypothèse du rayon à 45°) Le premier est plus intense que le second, et on pourra les réunir en un seul, m n — m' n', que nous nommerons le rayon aéro-terrestre principal; on le prend ordinairement en architecture, dirigé suivant la diagonale d'un cube, mais non plus directement opposé aux rayons solaires. On prend les reflets inclinés à 45°; dirigés de droite à gauche, — de bas en haut et d'arrière en avant. Les projections d'un de ces rayons



seraient les droites R et R'.

Conséquences. — (A) Dans un dessin d'Architecture représentant la façade ou la coupe d'un édifice, toutes les ombres doivent être plus claires en bas qu'en haut.

(B) Les moulures qui dans l'ombre sont tournées du côté du sol, doivent être moins noires que celles qui sont tournées du côté du ciel. Plus généralement, le point le plus clair d'une moulure placée dans l'ombre, est celui pour lequel le rayon aéro-terrestre lui est normal

(C) **Contre-ombres.** Les reflets du sol sont quelquefois assez intenses pour produire des ombres dans les ombres. On nomme ces dernières des contre-ombres. On ne les trace que dans les ombres portées en les supposant produites par le rayon aéro-terrestre principal, tel que nous l'avons défini. Seulement, il ne convient pas de donner à ces contre-ombres des contours aussi définis qu'aux ombres directes, ni de les prolonger aussi loin. En effet, les reflets qui viennent de tous les points du sol produisent des pénombres très-considérables, qui font que les contre-ombres disparaissent à très-petite distance des objets qui les portent et que leurs contours s'estompent très-rapidement. On fait ordinairement les contre-ombres à l'aide de teintes très-rapidement adoucies ou fondues.

Application. — Soit à faire le larmier de la portion de corniche indiquée sur le croquis ci-après. Un larmier K est soutenu par un talon G accompagné d'une baguette F. — Un bandeau C est surmonté d'un cavet renversé, B, et soutenu par un talon D. Enfin, une console A est placée sous le larmier. Le tout est dans l'ombre N a', portée par le larmier sur la frise: on opèrera comme il suit:

1°. On commence par passer une teinte générale donnant le ton de la pierre, et composée, si cette dernière est jaune, d'ocre jaune et de terre de Sienne brûlée. On la dégrade de haut en bas: on la tient donc plus intense à la partie supérieure qu'à la partie inférieure. On a soin de ménager en blanc les filets de lumière sur

les arêtes éclairées, telles que ff'. — Ces filets se trouvent en haut et à gauche.

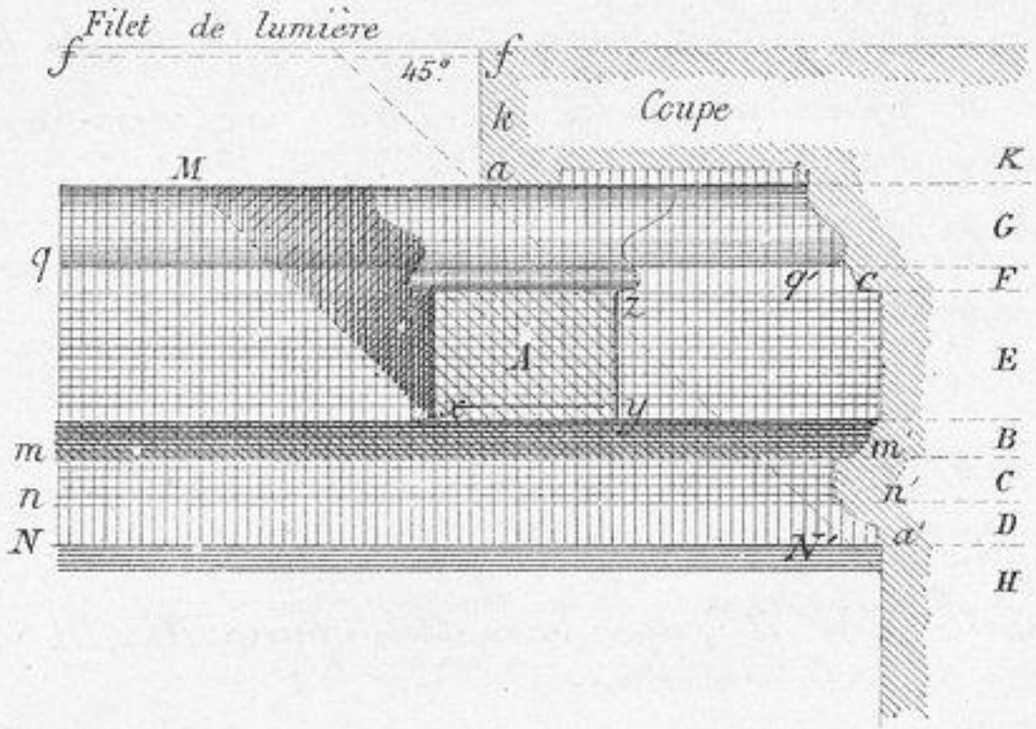
2°. On passe ensuite la teinte d'ébauche. — Elle est composée d'encre de Chine soit pure soit un peu violacée par de la laque carminée et une pointe de bleu de Cobalt. Cette teinte est placée sur tout ce qui est occupé par les ombres propres ou portées. On doit la passer d'un seul coup en sorte de réserver. Cette teinte assez peu intense doit posséder le ton que l'on veut attribuer dans les ombres aux parties les plus en reflet. Ces parties sont le dessous des talons G ou D ou bien encore la partie inférieure de la baguette F. Cette teinte d'ébauche est dégradée de haut en bas.

3°. On fait tourner les moulures. — Le modelé des moulures se rendra soit à teinter plates soit à teinter fondues. Les parties les plus noires sont celles pour lesquelles les normales seraient dirigées vers le ciel et non vers le sol. Dans les dessins à petite échelle, on fait ces teintes au tire-ligne.

4°. On lave les surfaces planes. Vous trouverez des surfaces planes en E, en H, en C et en A sur la face antérieure de la console. On est fixé sur l'intensité de la teinte qui répond à ces surfaces en regardant sur les moulures contiguës dont le lavis est fait et qui sont situées aux mêmes plans qu'elles, les éléments de ces moulures pour lesquelles le plan tangent est parallèle aux plans que l'on veut laver. On placera donc sur ces plans les teintes voulues pour qu'il y ait concordance d'intensité. Ces teintes sont placées en réserve, c'est-à-dire en ménageant les filets de reflets sur les arêtes qui regardent le rayon aéro-terrestre. Vous trouverez ces filets en N N' — n n' — q q' et sur la console en x y et y z, c'est-à-dire en bas et à droite. Sur la face A de la console, qui est en avancement sur le plan E', on passera une teinte légère, qui la rendra plus noire et la fera avancer.

5°. On fait les contre-ombres. — On passera une teinte de contre-ombre sur le cavet B qui regarde le ciel et échappe aux rayons de reflets.

Cette teinte sera modelée si le cavet est grand; elle sera plate



si le cavet est de petite dimension.

e Nous aurons également la contre-ombre portée par la console A. Nous la tiendrons assez noire aux environs de cette console, et nous la dégraderons rapidement de bas en haut et de droite à gauche.

6°. Les Retouches. — Le lavis général, une fois fini, il est utile pour augmenter l'effet produit, de revenir soit avec de la teinte de couleur, soit avec de la teinte d'ombre sur certaines parties, soit pour les faire tourner, soit pour les faire avancer ou reculer. — On fait avancer les parties en lumière en y plaçant quelques tons plus chauds, c'est-à-dire plus jaunes, ou plus rouges, et les parties dans l'ombre en forçant et même en colorant en bistre les teintes d'ombre. On fait reculer les plans en y passant des teintes bleuâtres, ou neutres, très-légères.

On fait également avancer une partie de l'édifice, en la faisant davantage, c'est-à-dire en y plaçant plus de détails et rendant avec plus de recherche l'effet de ces détails; on la fait reculer en la laissant dans le vague, et comme dessin et comme lavis.

2e Exercice de Lavis théorique.

— Lignes d'égale teinte du Tore. —

1°. Le tore en projection horizontale. — On a considéré le tore comme étant l'enveloppe d'une sphère mobile. On a pris les caractéristiques, et, à l'aide des échelles, on a trouvé les

points des lignes de teinte situés sur quelques unes de ces caractéristiques. Pour mieux faire comprendre la loi du tracé de ces courbes, on a figuré au centre du tore une sphère égale à la sphère génératrice avec ses lignes de teinte.

L'Echelle N°1' donne immédiatement les points situés sur les caractéristiques I.III du tore et sur les méridiens m'm"_ m'm' de la Sphère.

L'Echelle N°2' s'appliquera aux caractéristiques II.II du tore et au méridien n'n' de la sphère.

L'Echelle N°4', aux caractéristiques III.III et au méridien p'p'.

L'Echelle N°15 (échelle des contours apparents circulaires) donnera les points de tangence des courbes d'égales teintes avec les deux contours apparents. Pour le contour extérieur, on en servira droite. Pour le contour intérieur on la prendra renversée.

Théorème._ Les courbes d'égales teintes du tore en projection horizontale sont des conchoïdes des lignes de teintes de la sphère génératrice que l'on aurait placée au centre du tore. Ce centre est le pôle de la conchoïde. Le paramètre est le rayon du cercle décrit par le centre de la sphère génératrice.

(Evident d'après le tracé précédent)

Certaines courbes ne rencontrent par les contours apparents, et de plus, présentent des sommets z_1 z_2 z_3 qu'il serait utile de déterminer directement.

A cet effet, on prendra la sphère centrale, et on mènera de son centre des tangentes aux Ellipses 5, 6 & 7, qui sont les seules pour lesquelles on puisse le faire. Les points de tangence obtenus seront reportés sur les caractéristiques correspondantes du tore et donneront les sommets.

Points de passage et ombre autoportée.

En joignant les points N°0, on aura les deux courbes d'ombre propre, extérieure ou intérieure._ Cette dernière sera virtuelle

sur une certaine étendue. On la conservera cependant partout, car même lorsqu'elle est virtuelle, elle n'en est pas moins, cependant une ligne d'égale teinte.

On aura le point de passage, u, u en menant à la courbe N.° 0 les tangentes à 45°. La courbe d'ombre autoportée commence au point de passage et sa tangente en ce point est aussi la ligne à 45°. On la tracera d'ailleurs, de sentiment. On aura soin de la faire se perdre tangentiellement en α et β au contour apparent intérieur. Elle diffère très-peu de la ligne d'ombre virtuelle.

2°. Le Tore en élévation. On trouvera des points sur l'équateur et sur les parallèles situés à 22°1/2 – 45°. – 67°1/2, comme on l'a fait dans le premier exercice de Lavis.

De plus, sur le méridien de profil, on appliquera l'échelle N.° 1' et sur les deux demi-cercles de contour apparent, les échelles N.° 15'.

On remarquera que les deux horizontales $h'h'$ – $h'h'$ qui forment la partie supérieure et inférieure du contour apparent sont les projections des deux parallèles suivant lesquelles le tore aurait un plan pour surface de raccordement.

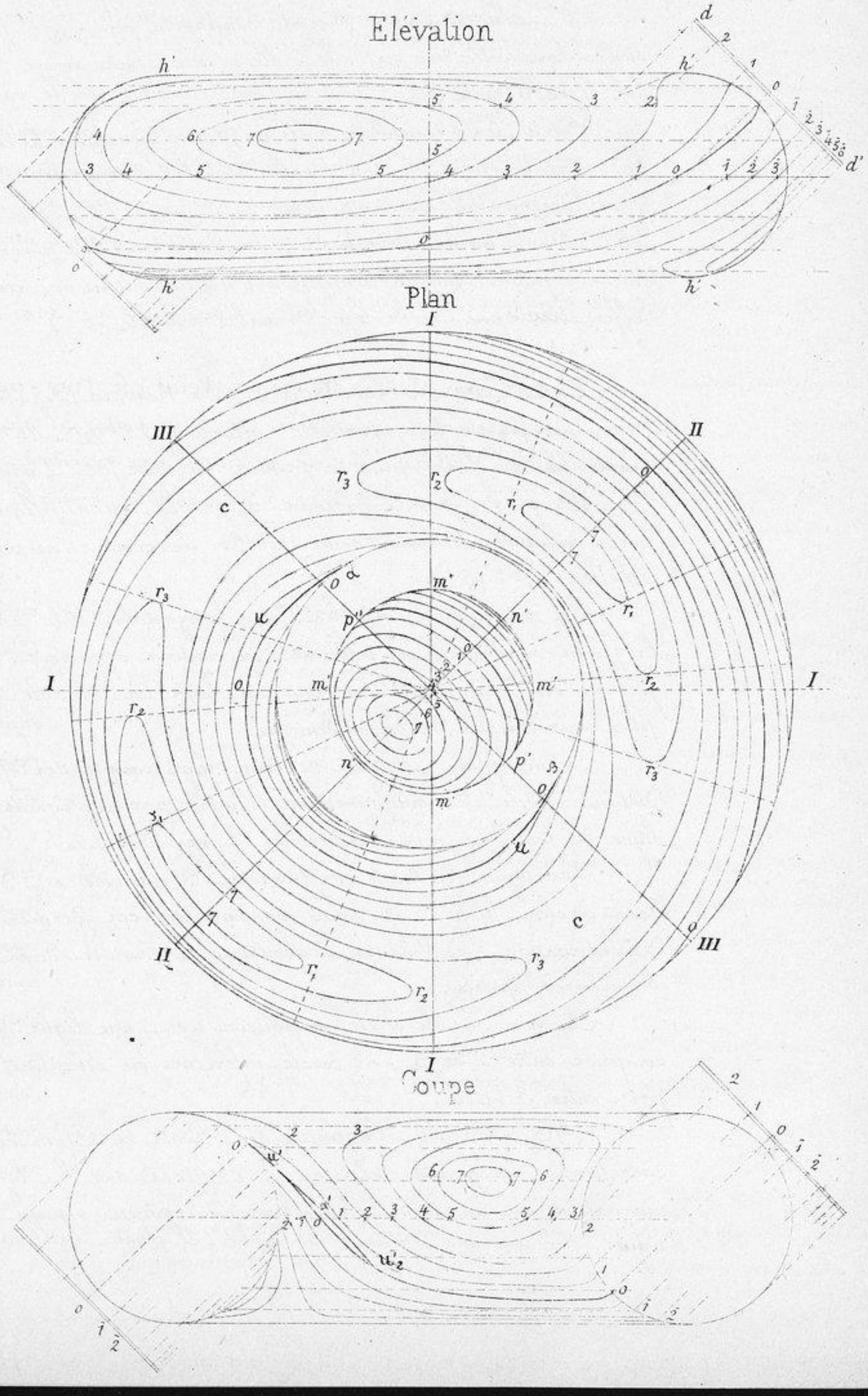
Or un plan, si l'on ne tient pas compte des effets de la distance, doit être uniformément teinté; par conséquent, aucune ligne de teinte ne doit couper les lignes $h'h'$ – $h'h'$.

Les lignes de teinte se tiennent d'un côté et de l'autre des cercles $h'h'$. Nous nommerons ces derniers des Lignes de démarcation. Nous en rencontrerons souvent dans les surfaces à courbures opposées.

On voit que le cercle supérieur est une ligne de démarcation comprise entre 2 et 3. Le cercle inférieur en est une autre comprise entre $\bar{3}$ et $\bar{4}$.

M.r Breton, Ingénieur des Ponts et Chaussées, nomme carrefours les points tels que c, c situés sur les lignes de démarcation et auxquels aboutissent des zônes venant de différents côtés.

Elévation



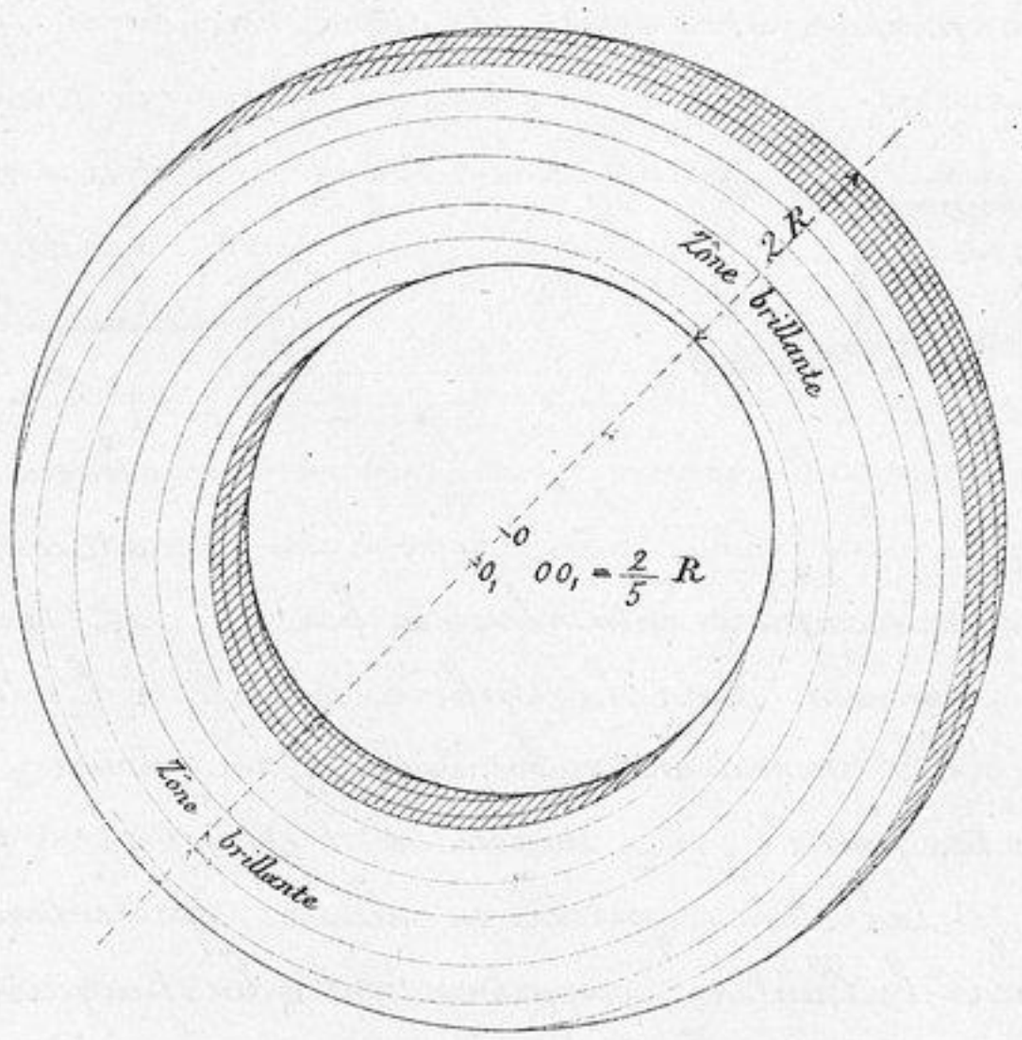
3°. Le Tore en coupe. — On tracera les lignes de teinte comme ci-dessus.

La ligne ⊂ N°. 0 donnera l'ombre propre réelle ou virtuelle. On lui mènera les tangentes à 45° pour avoir les points de passage u'. On déterminera l'ombre autoportée u' a', de sentiment, sachant d'ailleurs qu'elle se raccorde au point de passage, avec l'ombre propre, et qu'au point de perte U_2 la tangente est à 45°.

Lavis. — Le lavis se fera comme pour une sphère.

Tores dont le cercle générateur est très-petit.

Lorsque le cercle générateur est très-petit, il serait presque impossible et d'ailleurs inutile de tracer avec précision les lignes d'ombre et de teinte. On substituera aux veritables courbes des arcs de cercle tracés comme il suit.



Soit R, le rayon du cercle générateur. On prend un point O_1 situé sur la ligne à 45° du point O et tel que $\overline{OO_1} = \frac{2}{5}R$.

Du point O_1, on décrit comme centre deux demi-cercles ayant pour rayons ceux du petit et du grand équateur, ce qui donnera très-sensiblement les deux courbes d'ombre propre.

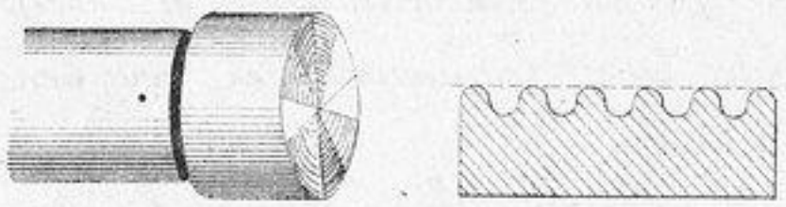
On peut remarquer que sur une sphère mi-polie, le point brillant se trouve à

une distance du centre à peu près égale aux $\frac{2}{5}$ du rayon, tandis que le point d'ombre propre est à cette même distance du contour apparent. On tracera du point O_1 comme centre deux ou trois cercles concentriques qui pourront servir de lignes de teintes.

Au lieu d'avoir deux points brillants sur ce tore, nous aurons une couronne brillante ; au lieu de laver avec sept teintes, nous n'en emploierons que trois ou quatre.

Remarque. — Cette construction justifie le tracé connu du trait de force ou du filet de lumière sur les cercles de base de cylindres. On assimile l'arête vive à une portion de tore, présentant d'un côté sa zône brillante et de l'autre son ombre propre.

Surfaces planes travaillées au tour. — Certaines surfaces planes travaillées au tour (telles sont les extrémités des tourillons, les obturateurs de lunettes, etc.) présentent, au lieu d'un plan parfait, une série de stries circulaires formant comme autant de tores à cercles générateurs très-petits, placés les uns à côté des autres et ayant tous le même centre.



Or ces tores présentent chacun deux zônes brillantes, situées de part et d'autre du centre compris entre les courbes 7.7. et limitées aux deux tangentes τ, τ_1. menées dans la sphère centrale à l'Ellipse N°. 7.

Ils présentent aussi deux zônes moins brillantes, limitées aux tangentes $\tau_2 . \tau_2$ menées à l'ellipse N°. 6 et ainsi de suite.

Les stries, prises en masse, présenteront donc une série de lignes brillantes, comprises entre les tangentes τ, τ_1. ; une autre série moins brillante comprise entre les tangentes $\tau_2 \tau_2$.

L'aspect général sera celui de la figure de la page suivante.

" Tores creux,

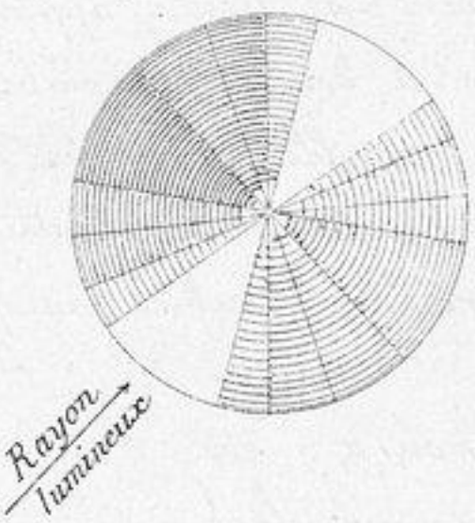
Tores creux.

1°. Demi-tore creux en projection horizontale. —

Le tore est supposé coupé par le plan de son équateur et l'on veut représenter un creux pouvant pour ainsi dire servir de demi moule au tore en relief qui vient d'être étudié.

(a) Lignes d'ombre propre et lignes de teinte (fig. 1)

On se servira des échelles comme ci-dessus, mais on les renversera et l'on remarquera, à priori que le tracé que l'on obtiendra sera rigoureusement le même que celui du tore en relief, mais renversé. On fera le report des lignes à l'aide d'un décalque pris sur l'épure précédente.



Les courbes N°. 0 seront les lignes d'ombre propre. Pour la grande courbe, la partie qui était réelle dans le tore en relief sera virtuelle dans le cas présent. Quant à l'ombre intérieure, les parties qui étaient réelles deviendront virtuelles et réciproquement. En tous cas, sur toute leur longueur, ces courbes seront des lignes d'égale teinte.

(b) Ombres portées par le petit et le grand équateur (fig. 4).

Si nous commençons par l'ombre du grand équateur, nous aurons les points de départ (ou d'origine) en f et g, points de tangence à 45°..... (La tangente à l'ombre portée est le rayon à 45°)

Le point K situé dans le plan de symétrie à 45° s'obtiendra par changement de plan ou en remarquant comme on l'a fait pour l'ombre de l'écuelle sphérique, qu'il se trouve à une distance du centre sensiblement égale au tiers du rayon (La tangente en K est perpendiculaire au rayon lumineux).

Enfin on cherchera comme point intermédiaire le point situé sur le parallèle inférieur du tore. On prendra l'ombre portée du cercle d'équateur sur le plan de ce parallèle, ce qui

donnera le cercle $o_1\ n_1\ m_1$ et les deux pointes de l'ombre, n_1 et m_1. (En ces pointes, la courbe est tangente au cercle $o_1\ n_1\ m_1$)

L'ombre portée par le petit équateur s'obtiendra de même. Le point l, situé sur le méridien de symétrie à 45° sera placé à une distance du centre égale à $\frac{1}{3}R$.

Les pointes $p_1\ q_1$ sur le parallèle inférieur s'obtiendront en traçant le cercle d'ombre portée auxiliaire $o_1\ p_1\ q_1$.

Aux pointes p_1 et q_1, ce cercle est tangent à la courbure d'ombre.

Les pointes d'origine ne sont plus aux pointes 5 et 5 où la ligne à 45° est tangente au petit équateur. Ces lignes appartiennent à l'ombre propre. La ligne de teinte n°. 0 donne cette ombre propre, avec un léger renflement auquel il est possible de mener en U et V deux tangentes à 45°. Les pointes U et V sont les points de passage. En ces points commencent les courbes d'ombres autoportées, tangentes aussi à 45°. en U et V.

Ces dernières se rencontrent en g, g avec l'ombre portée du petit équateur. Les deux points g, g en seront les points d'origine.

En g, la courbe d'ombre autoportée est tangente à 45°. Il en est de même pour l'ombre du petit équateur. Comme cette dernière se confond presque avec le cercle $o_1\ p_1\ q_1$ il arésulte que dans la pratique et dans un tracé rapide, on tracera la courbe Ug facilement en construisant une ligne de raccordement entre la courbe d'ombre propre N°. 0 et l'ombre portée du petit équateur. Cette ligne de raccordement étant deux fois tangente à 45° à son point de départ et à son point d'arrivée, est par cela même, assez bien déterminée.

D'ailleurs, une section faite tangentiellement au tore, par un plan vertical parallèle au rayon lumineux, nous eût permis de trouver directement en g" g, le point d'origine.

Demi-tore creux en coupe (Le noyau enlevé).

(a) Courbes de teintes (fig. 2). — Ce demi-tore est représenté sur la figure supérieure. Pour bien se le figurer, il faut imaginer que l'on a coupé par le milieu un trou annulaire.

Les courbes de teintes seront les mêmes que celles du tore—

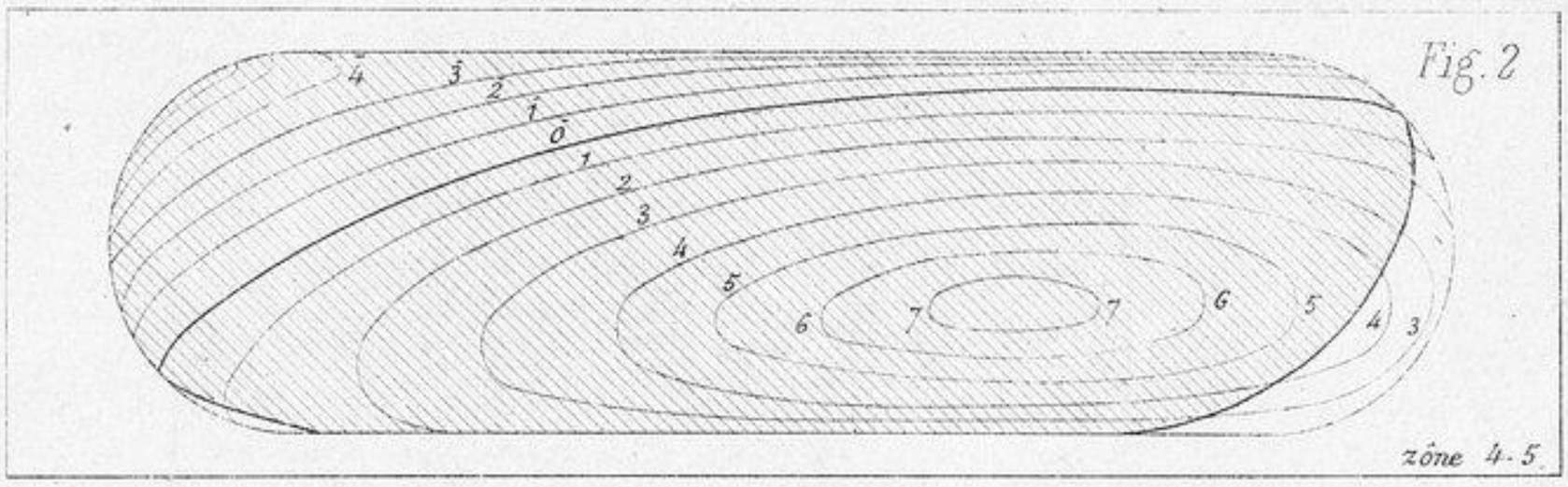


Fig. 2

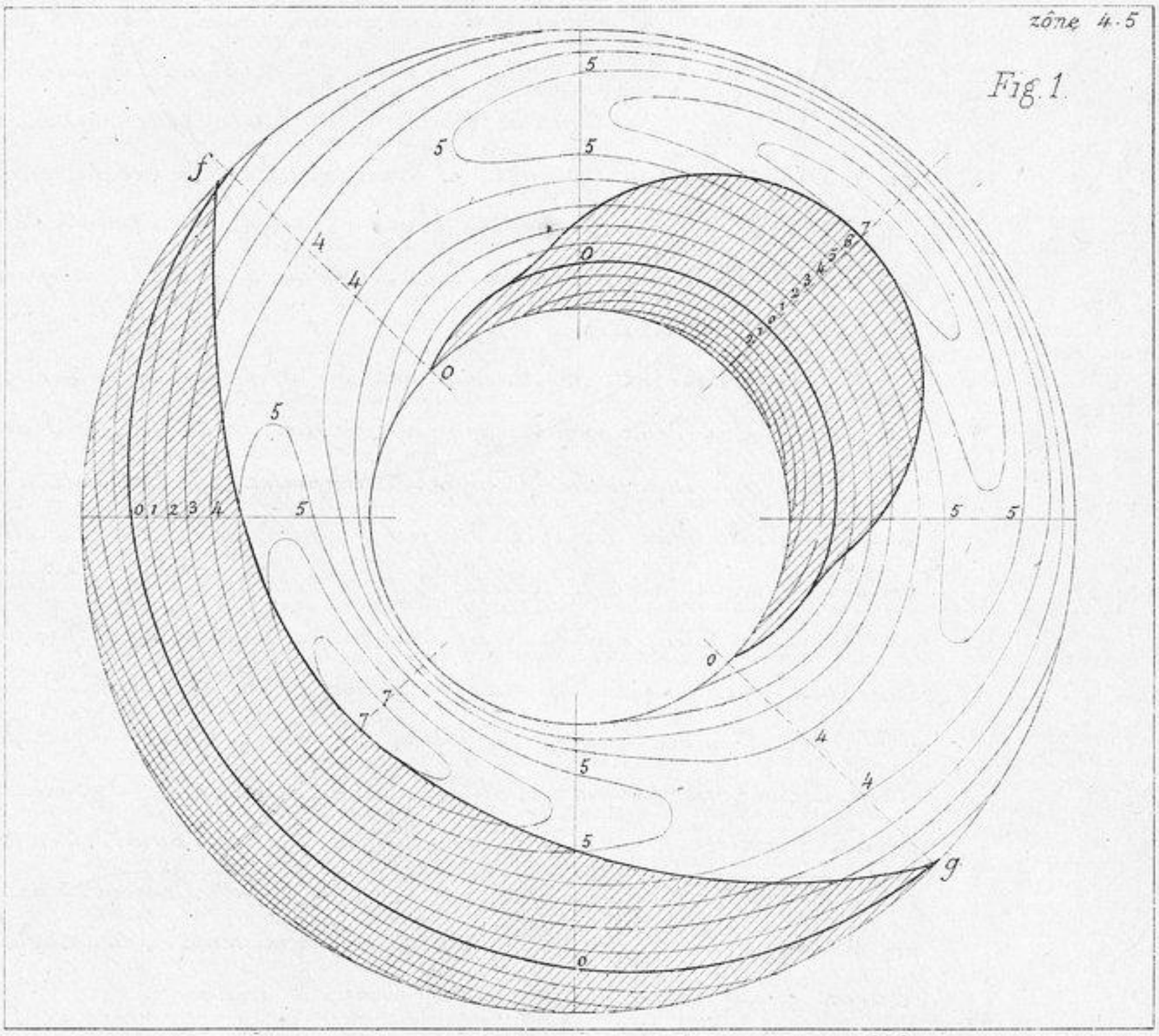


Fig. 1

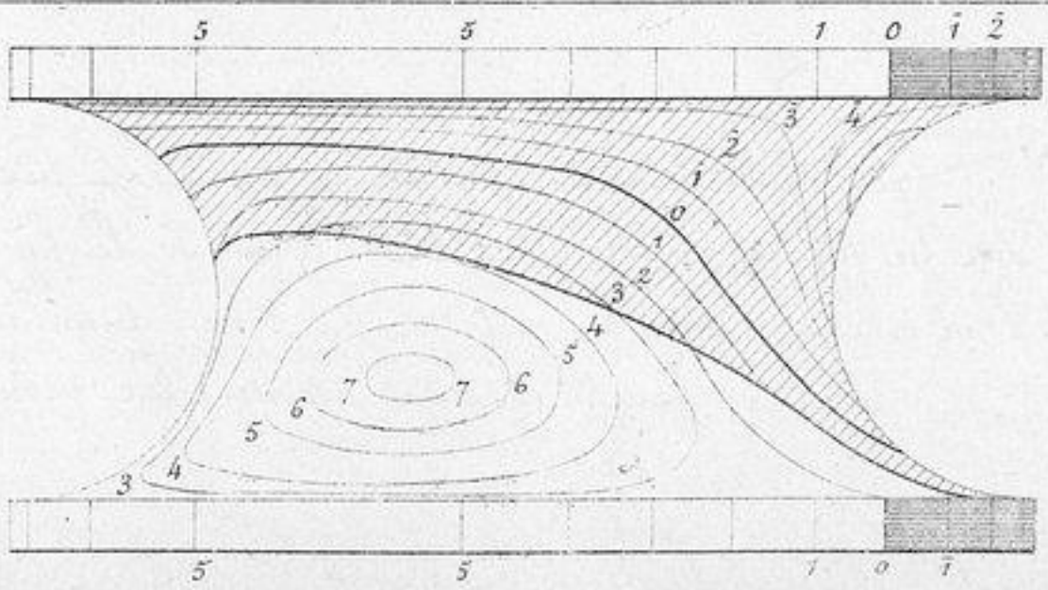
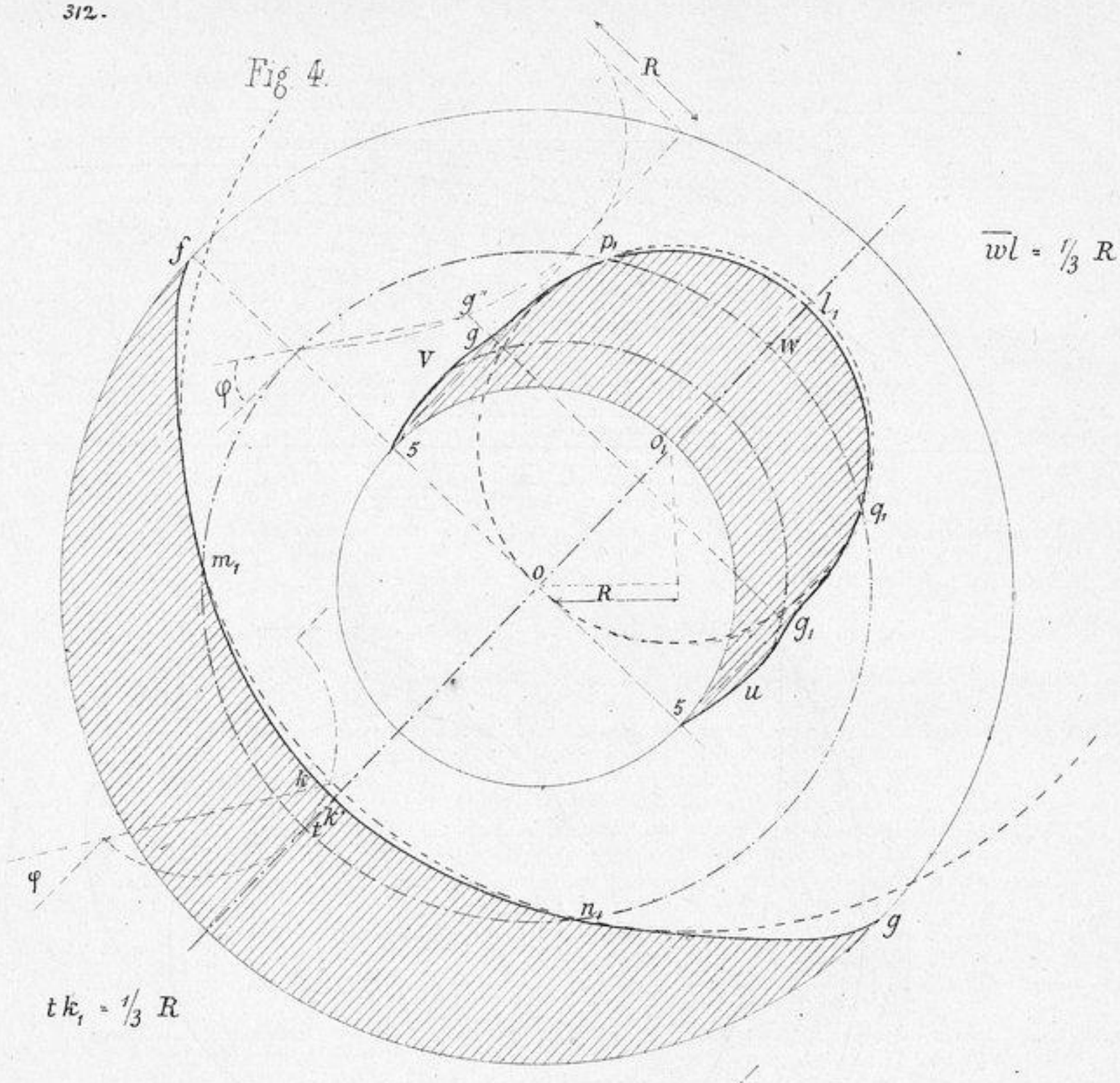


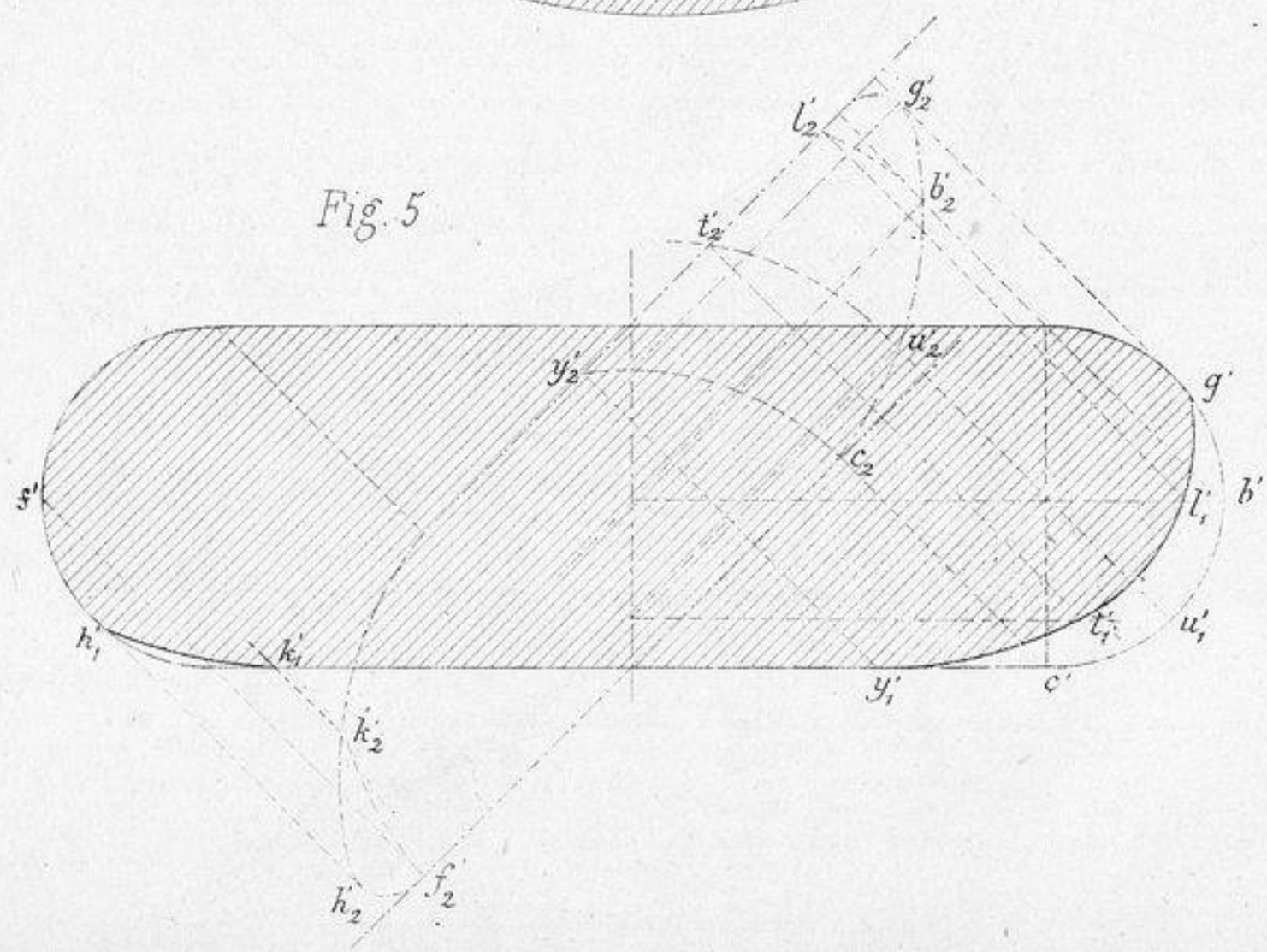
Fig. 3

Fig 4.



$\overline{wl} = 1/3\ R$

Fig. 5



en relief et en élévation, mais renversées. On les décalquera sur l'épure précédente du tore en relief.

La ligne N° 0 sera une courbe d'ombre propre virtuelle.

(b) Ombre portée dans l'intérieur par la ligne de coupe. (fig. 5).

Afin de pouvoir se passer du plan, on se servira du plan auxiliaire fuyant à 45°. On prendra : 1° l'ombre portée sur lui par la ligne de coupe. 2° les ombres portées par autant de parallèles du tore que l'on voudra. On déterminera les points d'intersections de ces dernières avec la première et par des rayons à 45° inverses, on remontera aux points de l'ombre portée situés sur les parallèles choisis. (L'épure se comprend facilement.)

3°. Demi-tore creux en coupe. (Le noyau conservé et non coupé).

(a) Courbes de teinte (fig. 3). — Ce demi-tore est figuré sur la figure inférieure. Le noyau, c'est-à-dire la portion du tore qui est à double courbure a été conservé et n'a pas été coupé. De plus, il est accompagné en dessus et en dessous de deux petits cylindres formant listels.

Ce noyau se rencontre en mécanique et en architecture. C'est avec lui que sont formées les gorges des poulies et les scotie des bases de colonnes.

Sur la portion de tore annulaire qui se voit à gauche et à droite, on décalquera les courbes de teinte trouvées ci-dessus. Quant au noyau, les lignes de teinte seront celles du tore en relief et en coupe, mais renversées.

(b) Ombres portées (fig. 6) :

Ombre portée par le listel supérieur sur le noyau.

On emploiera le plan auxiliaire fuyant à 45°. L'ombre auxiliaire du cercle $a'c'$ est le cercle $h'b'$ obtenu comme on sait.

Soit $p'p''$ un parallèle quelconque. Le cercle passant par p'' est son ombre auxiliaire. Il coupe le cercle $h'b'$ en q'_2 qui ramené en q'_1 donne un point de l'ombre cherchée.

On a cherché de même le point S'_1 situé sur le parallèle inférieur

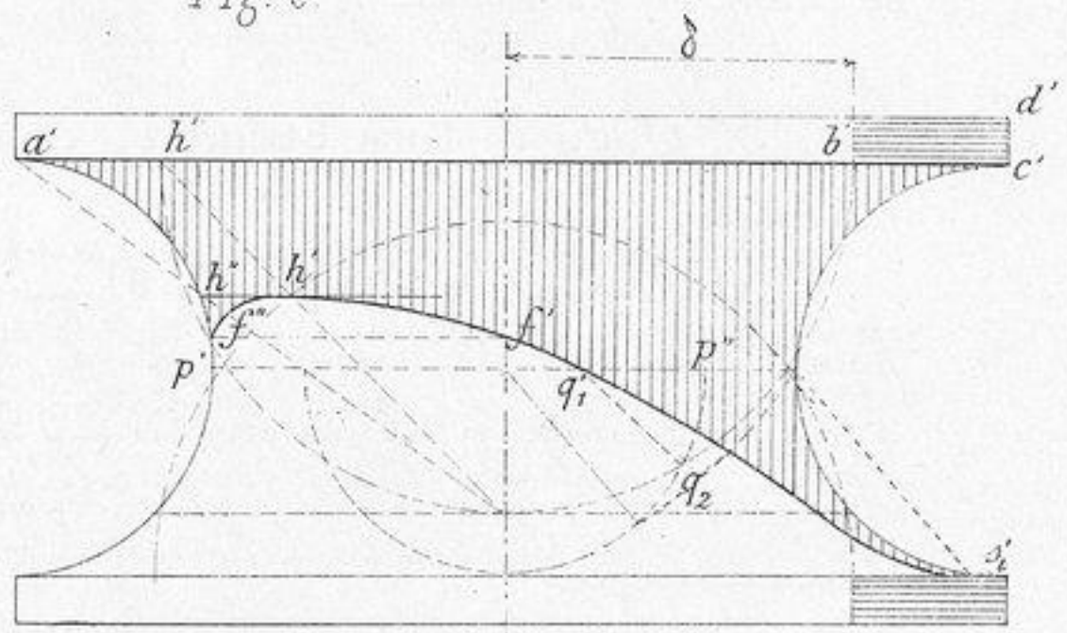
et le point le plus haut h', à l'aide du rayon φ.

Lavis. — 1° On passe la teinte d'ébauche sur tout ce qui est ombre propre ou ombre portée.

2° On passe les teintes d'ombre propre, savoir: N°1 entre 1 et $\overline{1}$, N°2 entre 2 et $\overline{2}$, etc. . . . . N°4 entre 4 et $\overline{4}$.

3° les teintes de couleur, savoir: N°5 entre 5 et $\overline{5}$. . . . . N°7 entre 7 et $\overline{7}$ et N°8 sur le tout, si l'on ne veut pas laisser de blanc absolu.

Fig. 6



4° Les teintes d'ombres portées.

Ces dernières sont destinées dans les ombres portées, à rendre les zônes d'autant plus noires qu'elles eussent été plus claires sans l'existence de l'ombre portée.

Ces teintes devront être doublement intenses, puisqu'elles devront d'une part, détruire la dégradation produite par les précédentes et d'autre part en produire une en sens inverse.

Ces teintes seront: N°9 entre +7 et +7, — N°10 entre +6 et +6, etc. . . . . .

Quelquefois on économise le nombre de ces teintes en on le réduit à 3. . . . On les passe alors en gagnant chaque fois de 2 zônes.

3e Exercice de Lavis théorique.

Tores composés.

Définitions. — On nomme tores composés ceux dont les profils sont ceux des moulures composées.

Ces tores composés sont des combinaisons de tores simples, raccordés entre eux et les lignes de teinte s'obtiennent en traçant séparément sur chaque tore simple les lignes qui conviennent.

Nous ne reviendrons pas sur ce tracé. Nous indiquerons seulement la manière d'obtenir les lignes d'ombre portée.

Les tores et leurs lignes de teinte sont dessinés sur les figures 1. 2. 3 — 7. 8 et 9.

Doucine annulaire en saillie, en élévation et renversée. Tracé de l'ombre portée par son Listel. (Fig. 2bis)

Soient a'b', les cercles du listel. Employons le plan auxiliaire à 45°. Le cercle f'g' passant par le point g' de l'ombre propre est l'ombre portée auxiliaire du cercle a'b'.

Cherchons le point de l'ombre situé sur un parallèle donné, c'd', par exemple. Le cercle K g'_2 c'_2 en est l'ombre auxiliaire. Il recoupe le premier au point g'_2, qui, relevé en g'_1, sur le parallèle c'd' donne le point demandé.

Point le plus haut (Fig. 2bis).

Comme toujours, par a', menons le rayon φ ; il coupe en f'' le profil de la doucine et en f''_2 l'axe. Je ramène f'' en f' situé sur l'horizontale f''f' d'une part et d'autre part sur la ligne à 45°, menée par f'_2 ou par le point f'_1.

Au point f'_1 la tangente est horizontale.

Point de perte m'.

Nous avons obtenu, comme à l'ordinaire, l'ombre propre du tore inférieur, h' est le point situé sur l'axe, et K' celui situé sur l'équateur.

Fig. 1.

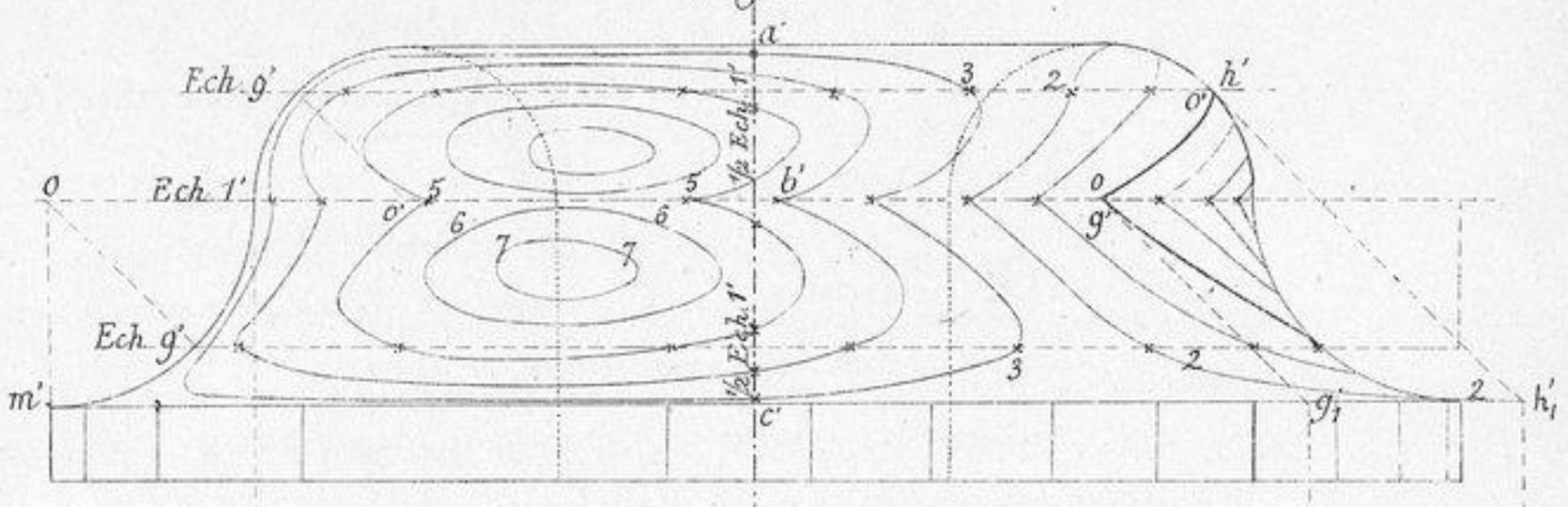


Fig. 3

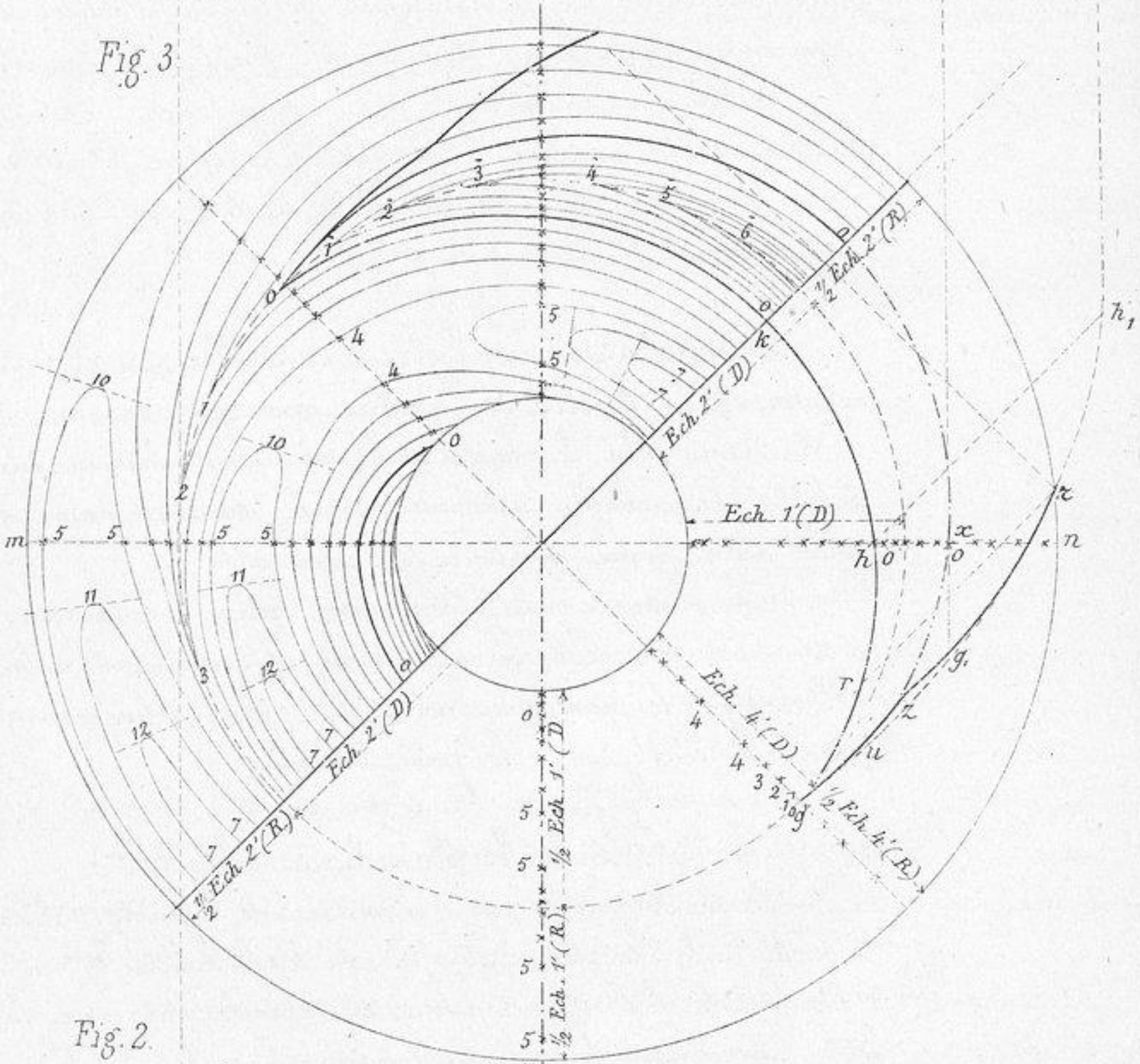


Fig. 2.

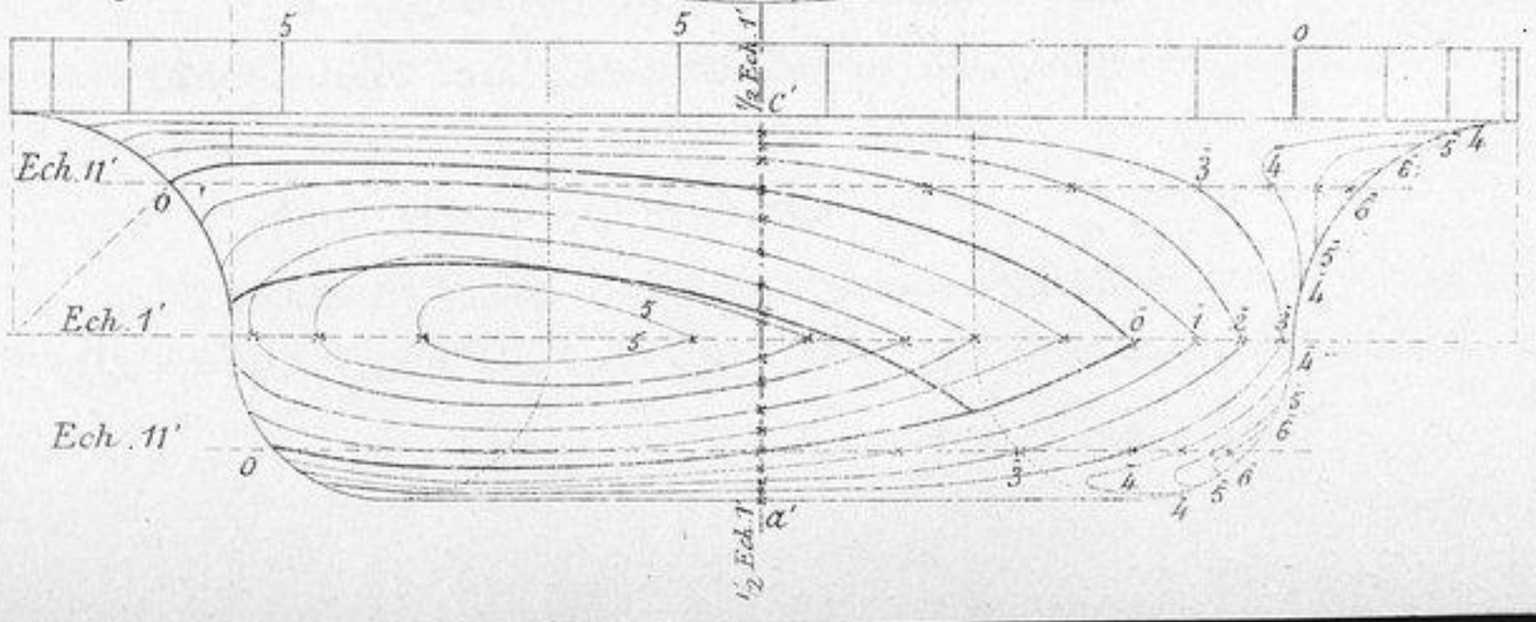
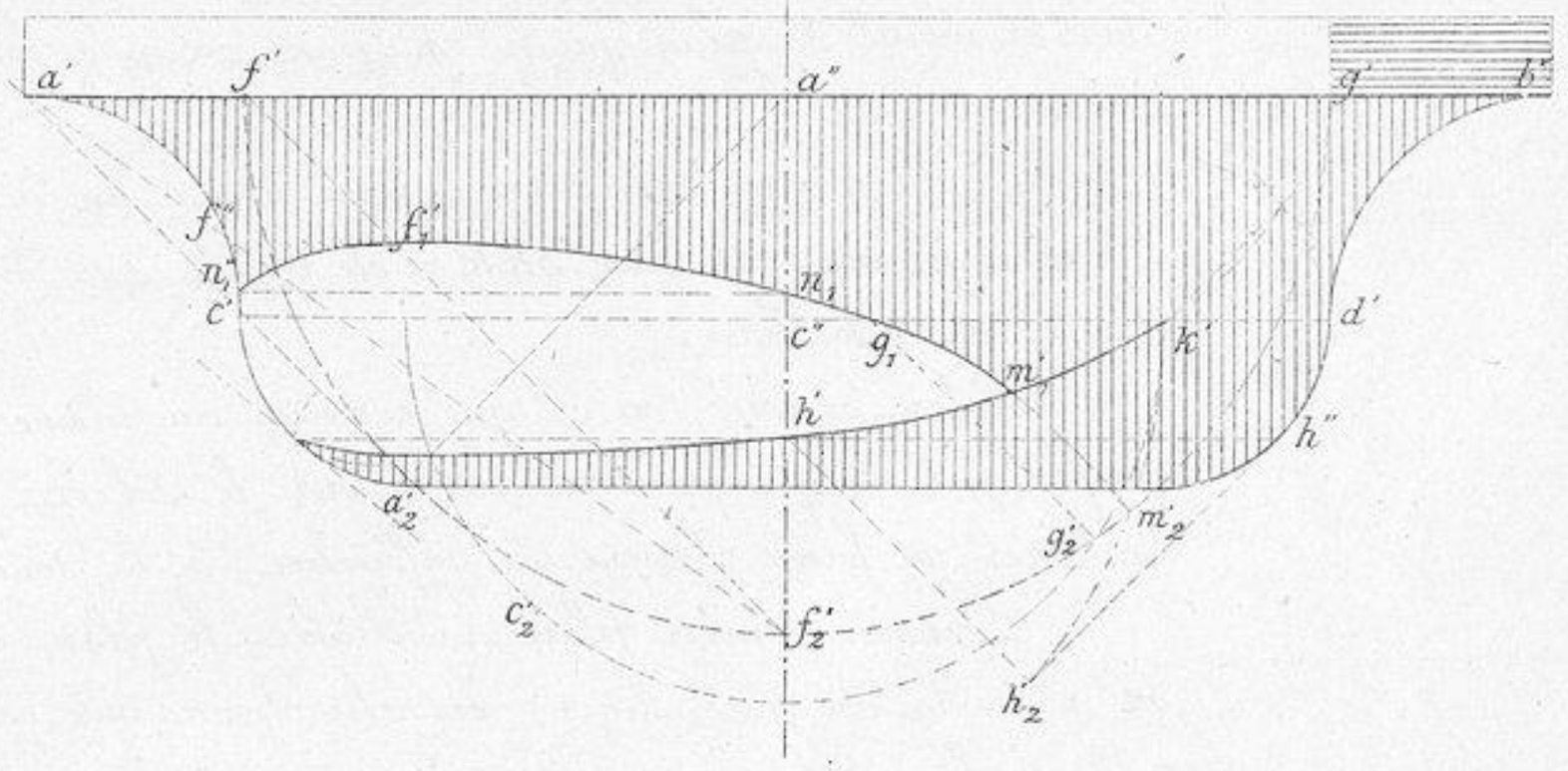


Fig. 2 bis



Cherchons comme nous l'avons vu dernièrement, l'ombre auxiliaire de la ligne h'k', ombre propre du demi-tore inférieur.

K' étant dans le plan à 45° est à lui-même par ombre auxiliaire ; h' porte ombre auxiliaire en h_2' obtenu comme nous savons, par les deux lignes à 45°, $h'h_2'$ et $h''h_2'$.

Nous n'avons pas besoin de l'ombre auxiliaire de la ligne h'k' tout entière. Nous ne tracerons que la portion h_2' k' avec assez d'exactitude puisque en k' la tangente est verticale et en h_2' elle est à 45°.

Cette branche de courbe coupe en m_2' le cercle $f'f_2'g_2'g'$, ombre auxiliaire de la base du listel.

Le point m_2' relevé en m_1' sur l'ombre propre donne le point de perte cherché. En m_2', d'après le théorème connu, le rayon lumineux à 45°. est tangent à la courbe.

Points sur l'axe et sur le contour apparent. — On tracera la courbe passant par f_1' g_1' m_1', et l'on aura en n_1' par continuité, le point sur l'axe. En menant l'horizontale n_1' n_1'' on aura en n_1'' le point sur le contour apparent.

On retracera sur la fig. 2 la courbe que nous venons d'obtenir sur la ligne 2 bis.

Doucine annulaire en saillie.

Ombre portée en plan (fig. 3). — Nous en donnerons l'épure sur la moitié du plan qui n'est pas occupée par les lignes de teinte.

A la partie supérieure, nous avons un demi-tore complet dont l'ombre propre extérieure g h k a été tracée soit directement, soit à l'aide des échelles.

C'est ce tore, ou ce qui revient au même, sa ligne d'ombre propre g h k qui portera ombre sur le sol et sur le cavet annulaire qui forme la partie inférieure de la doucine.

Prenons comme plan auxiliaire le plan horizontal de base m' n' de la doucine (fig. 1) et cherchons sur ce plan l'ombre portée par la ligne d'ombre propre g h k.

Le point g g' porte ombre auxiliaire en g_1, g'_1 ; le point h h' en h_1 h'_1 ; menons l'arc de courbe $h_1 g_1$ tangent en g_1 à 45° et nous aurons une portion de l'ombre auxiliaire cherchée.

Elle recoupe en r le cercle de base m n de la doucine, laquelle est dans le plan horizontal auxiliaire ; le point r est donc le point de l'ombre portée sur le cercle m n.

D'un autre côté, nous avons en g u x l'ombre propre (réelle de g en u et virtuelle de u en x) du cavet annulaire inférieur.

Au point de passage u, raccordons-nous, comme nous l'avons vu pour le tore simple, avec la ligne u z d'ombre autoportée.

Le point z est le point d'origine de l'ombre cherchée ; c'est l'ombre portée du point g.

z et g sont sur la même ligne à 45°.

Enfin joignons z et r par un arc de courbe, tangent en z à la ligne à 45°, tangent en r, à l'ombre portée auxiliaire $g_1 h_1$ et nous aurons l'ombre demandée.

Talon annulaire en saillie (fig. 7.8.9).

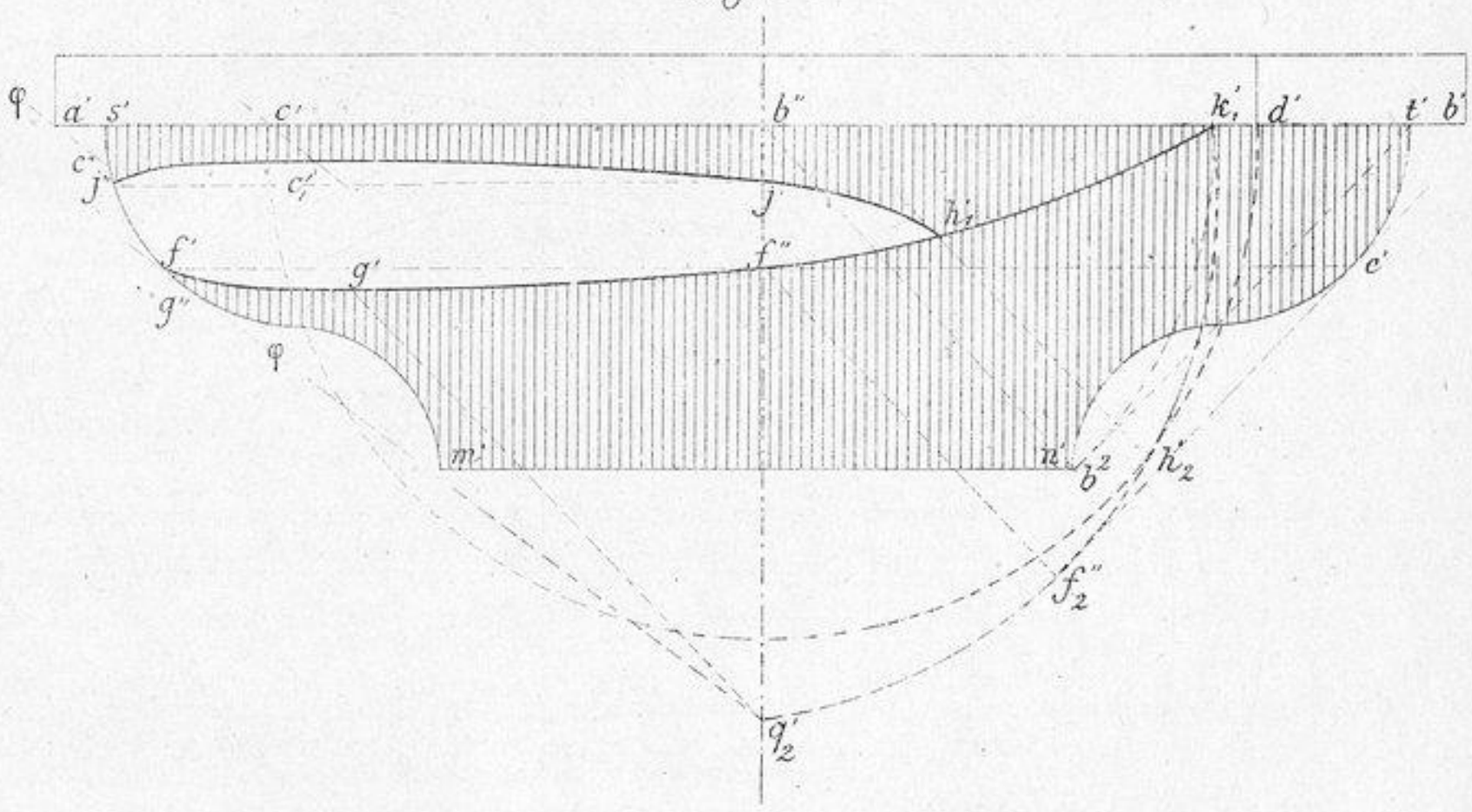
Sur le talon droit (fig. 7) et en élévation, il n'y a que les

ombres propres.

Sur le talon renversé il y a l'ombre portée par le listel de couronnement ; nous allons l'étudier (fig. 8bis).

Soit a'b' le cercle de base du listel. Nous prenons le plan auxiliaire à 45° et nous avons en c'd' le cercle auxiliaire d'ombre de ce listel.

Fig. 8 bis



Nous nous contenterons de trouver le point de perte h'_1 et le point le plus haut C'_1.

Le point le plus haut est donné par le rayon φ mené en a', ce rayon coupe le profil en C'' que nous ramenons en C'_1 sur l'horizontale $C''C'_1$ d'une part et sur la ligne à 45° de l'autre.

Pour avoir le point de perte, nous cherchons l'ombre auxiliaire sur le plan à 45° de la ligne d'ombre propre $ff''k'_1$.

Le point k'_1 est à lui-même son ombre auxiliaire ; f'' porte ombre en f''_2 et nous pouvons tracer l'arc de courbe passant par k'_1 (avec tangente verticale) et par f''_2 (avec tangente à 45°).

Fig. 7.

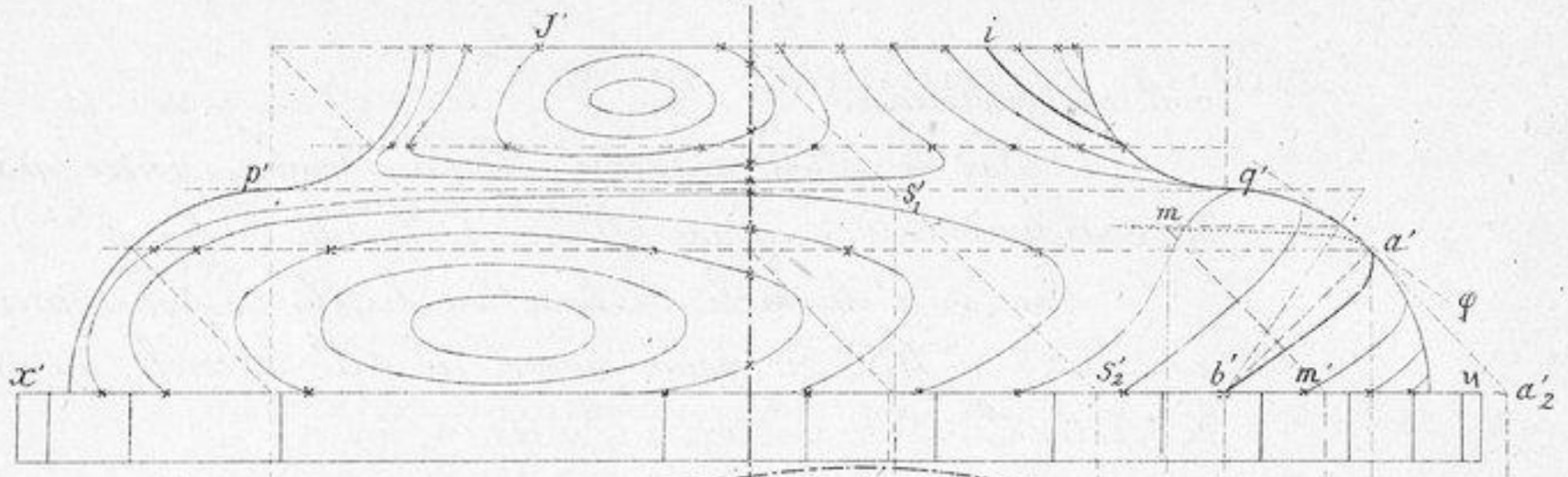


Fig. 9.

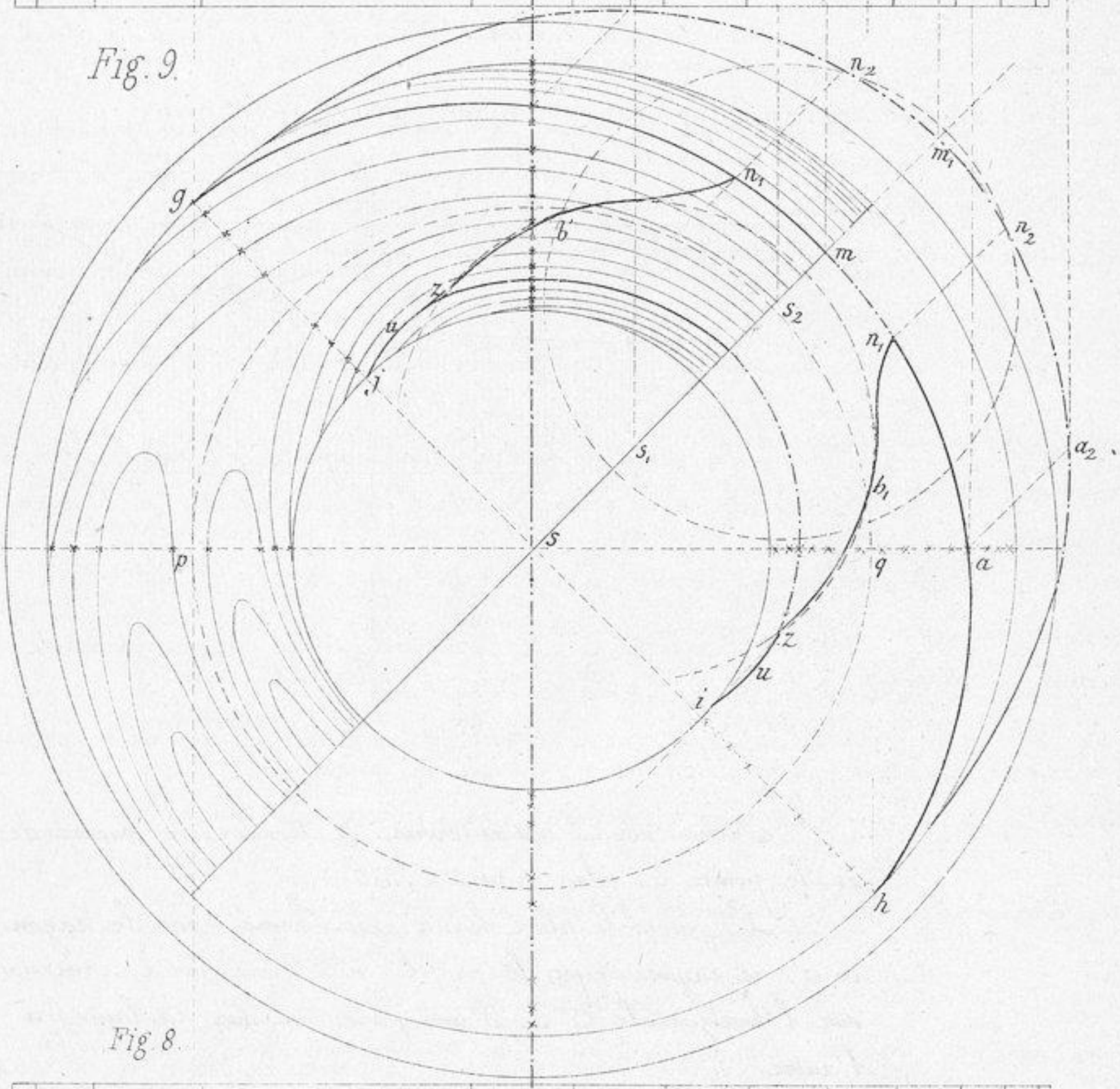
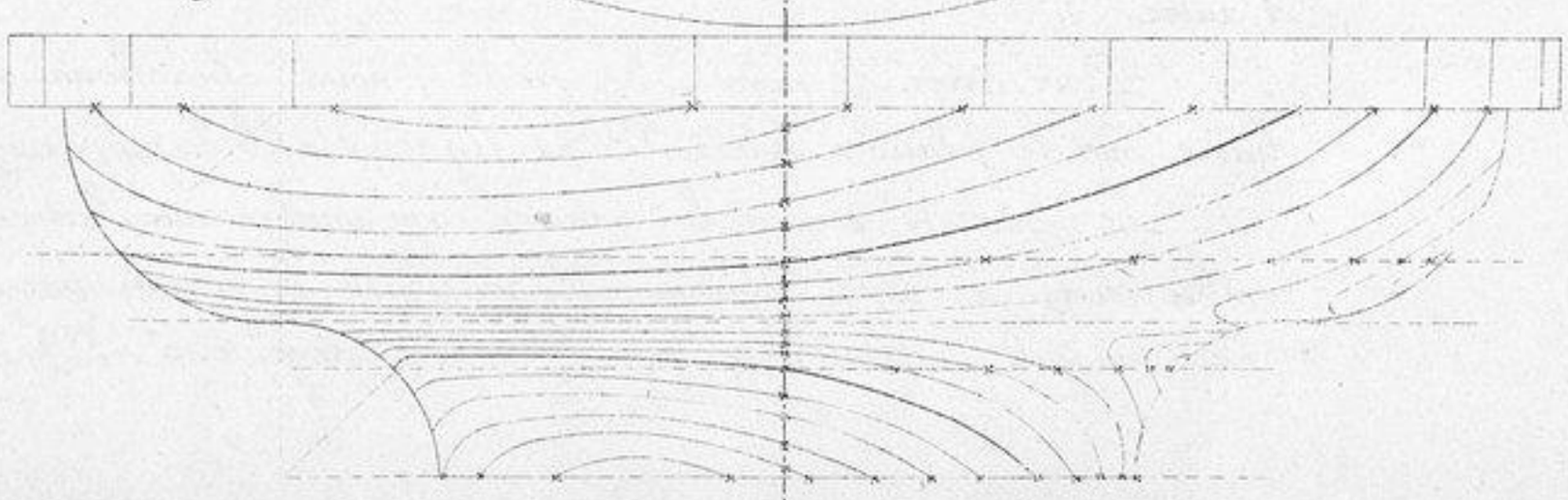


Fig. 8.



Cet arc de courbe coupe le cercle c'd' au point h'_2 qui, relevé en h'_1 sur l'ombre propre du tore, donne le point de perte avec tangente à 45°.

La courbe s'achèvera comme nous l'avons déjà montré.

Ombre portée en plan (fig. 9).

Ce sera le cercle de base supérieure I, i'j' qui portera ombre sur le tore.

Cherchons le point de l'ombre situé sur un parallèle donné p q, p' q' (parallèle de raccordement des deux parties du tore).

Prenons le plan de ce parallèle, comme plan auxiliaire; cherchons en S_1 S'_1 l'ombre du centre S du cercle i j. — Traçons de S comme centre, un cercle S_1 b_1 égal au cercle i j, et nous aurons l'ombre auxiliaire de ce dernier. Elle recoupe en b, le parallèle p q; le point b'_1 est le point cherché.

En b_1 la courbe d'ombre sera tangente au cercle S_1 b_1 et le traversera, c'est-à-dire passera en b_1 d'un côté à l'autre de ce cercle.

Point de perte n'. — Prenons comme plan auxiliaire, le plan de base x'y' du listel, et cherchons:

1°. En S_2 n_2 n_2, l'ombre auxiliaire portée sur ce plan par le cercle i j;

2°. En g m_1 a_2 h l'ombre auxiliaire portée par la ligne d'ombre propre h a m — h'a'm' du tore inférieur.

On voit facilement sur l'épure comment cette ombre auxiliaire m_1 a_2 h a été trouvée.

Ces deux ombres auxiliaires se coupent en n_2 qui, relevé en n_1 sur l'ombre propre donne le point de perte. — La tangente y est à 45°.

La courbe d'ombre portée se tracera donc facilement en i, u, z, b, n,

On reconnaît en u le point de passage, (La tangente y est à 45°) et en z le point d'origine, ombre portée par le point i

(la tangente y est encore à 45°).

Nota. — Sur le plan (fig. 9), on pourra supposer que la surface plane qui forme le dessus du talon annulaire a été travaillée au tour.

On en rendra l'effet comme cela a été dit plus haut. On remarquera que les rayons qui limitent les secteurs sont tangents aux courbes de teinte du tore.

Lavis. On passera : 1° La teinte d'ébauche sur tout ce qui est ombre propre ou ombre portée ;

2° Les teintes d'ombre propre entre les lignes 1 à $\overline{1}$, 2 à $\overline{2}$ etc. . . . .

3° Les teintes de couleur entre les lignes 4 et $\overline{4}$, 5 et $\overline{5}$, etc....

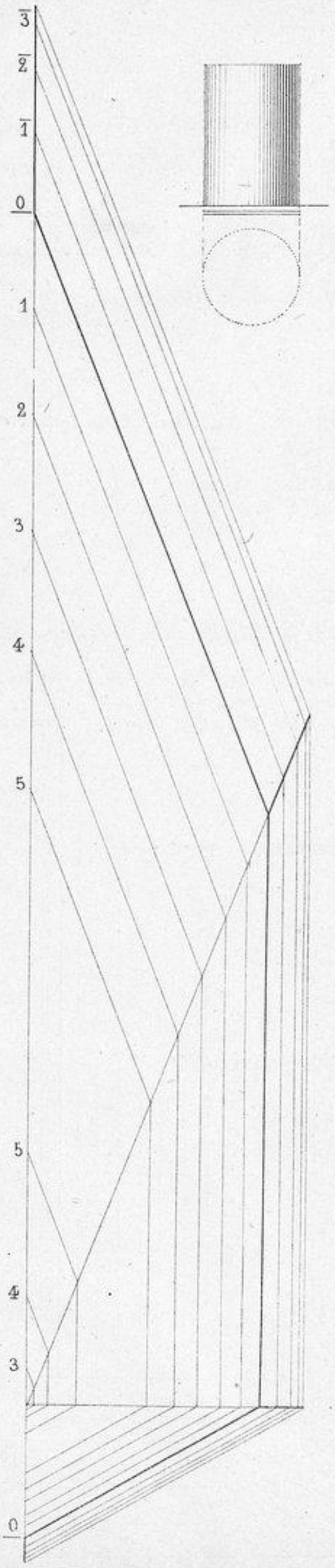
4° Les teintes d'ombres portées, sur toutes les zones positives situées dans l'ombre portée et en ayant soin que les zones les plus sombres soient celles qui eussent été les plus claires sans l'existence des ombres.

Fin du Cours de Géométrie descriptive.

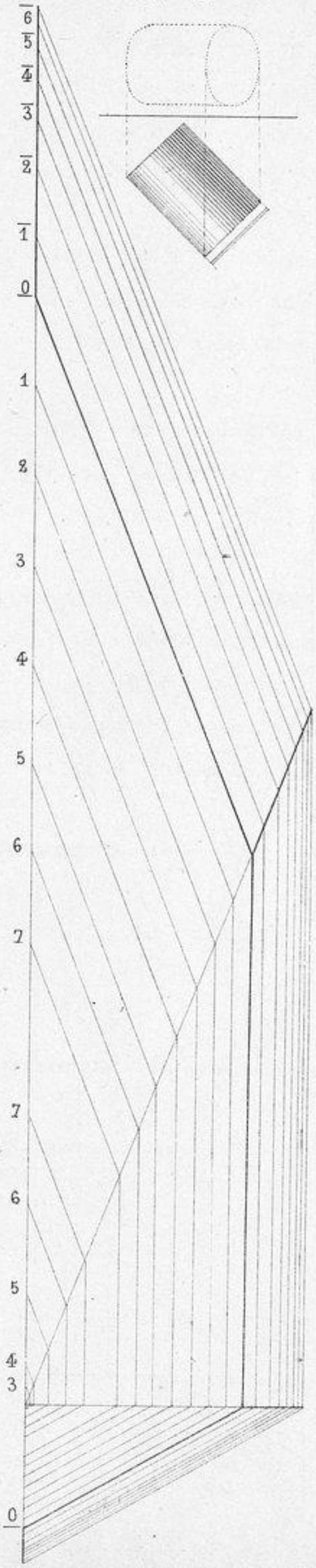
Echelles de teintes ___ Corps mi-polis.

Pl. I.

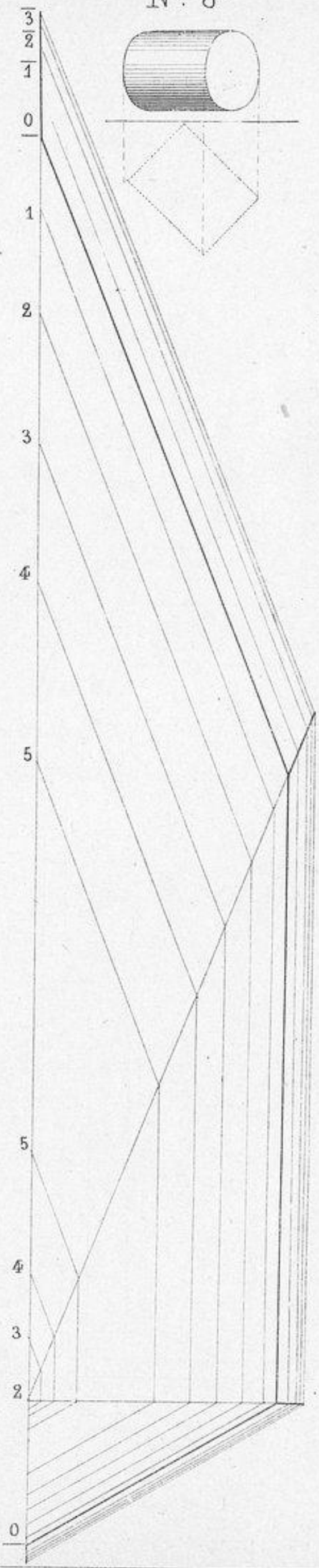
N° 1'



N° 2'



N° 3'



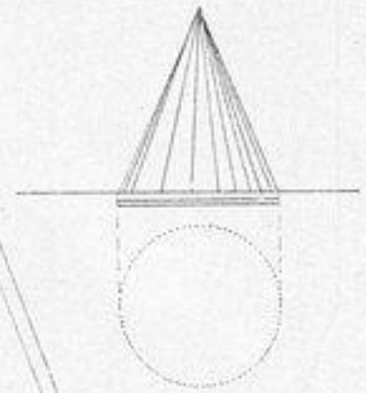
Pl. II

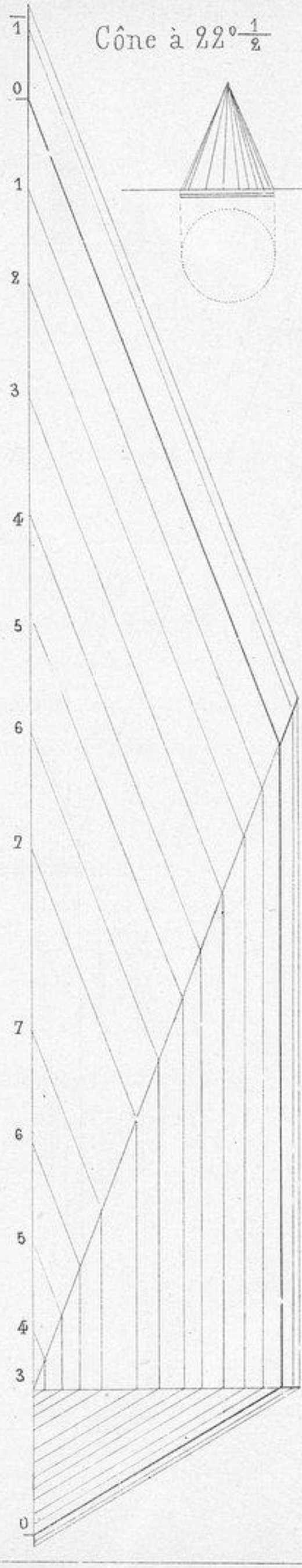
N° 4'

N° 5'

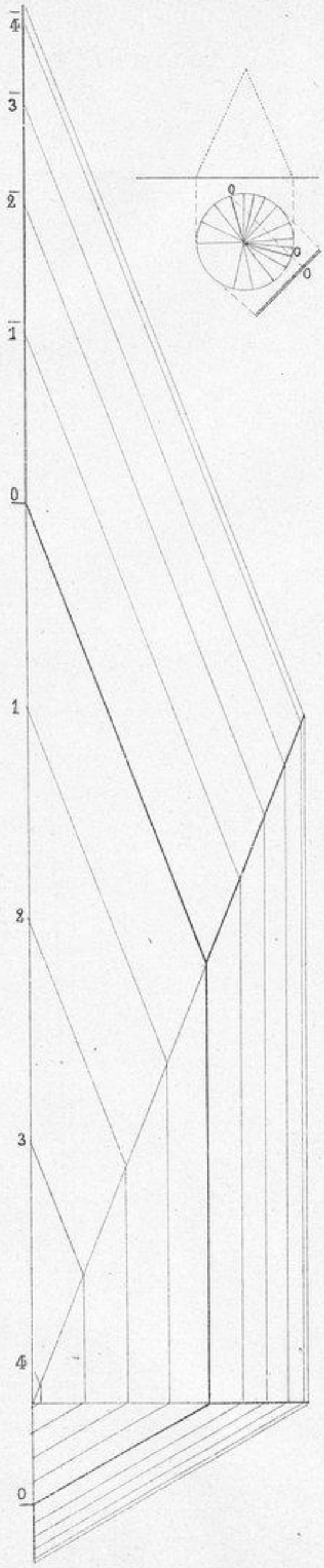
N° 6'

Cône à 22°$\frac{1}{2}$

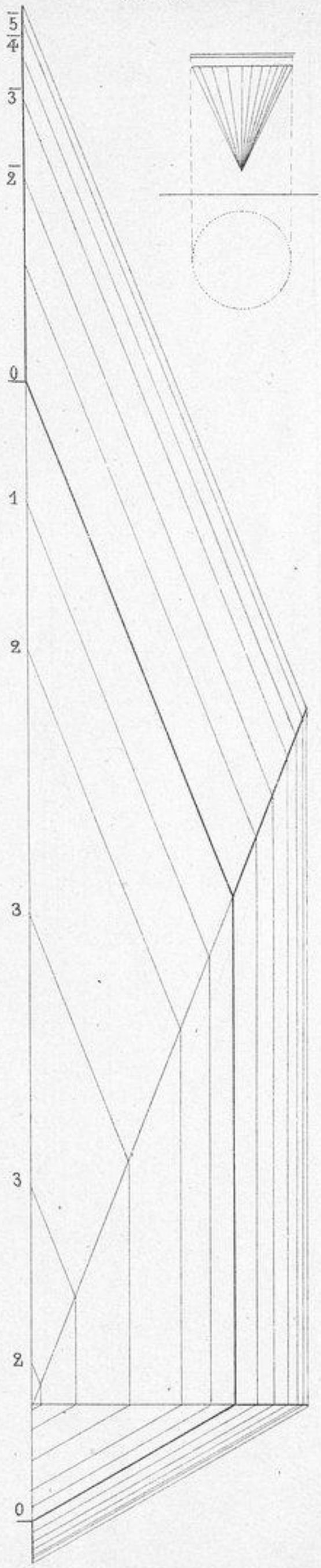




N° 7'

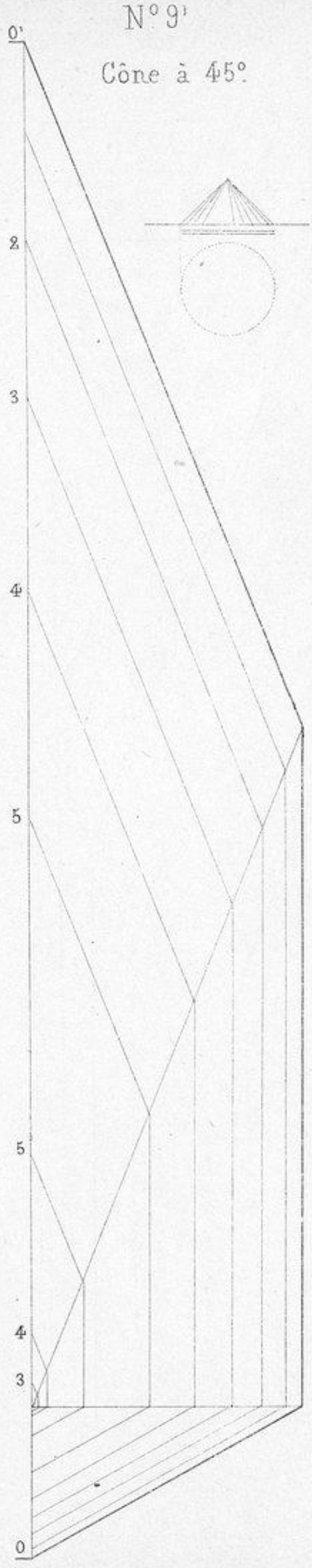


N° 8'



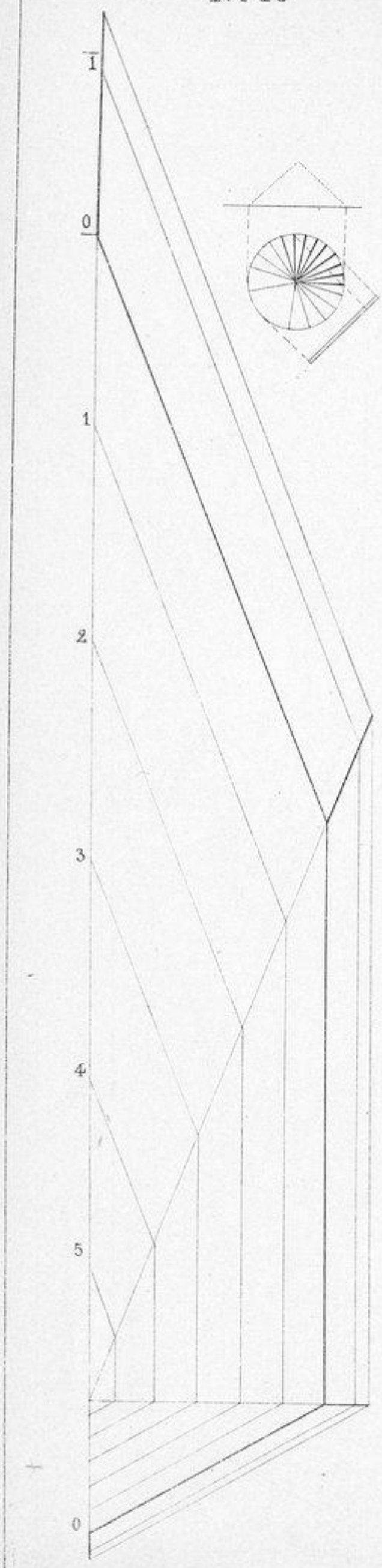
N° 9'

Cône à 45°

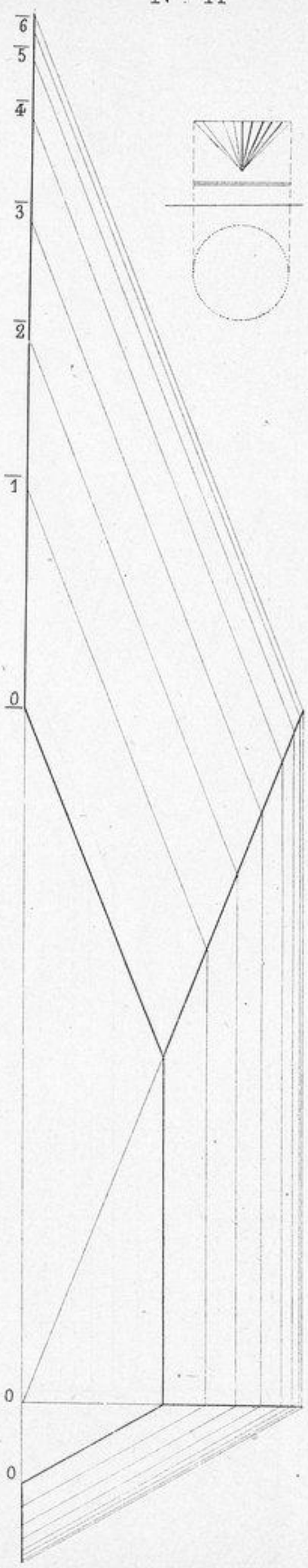


Pl. IV

N°. 10'

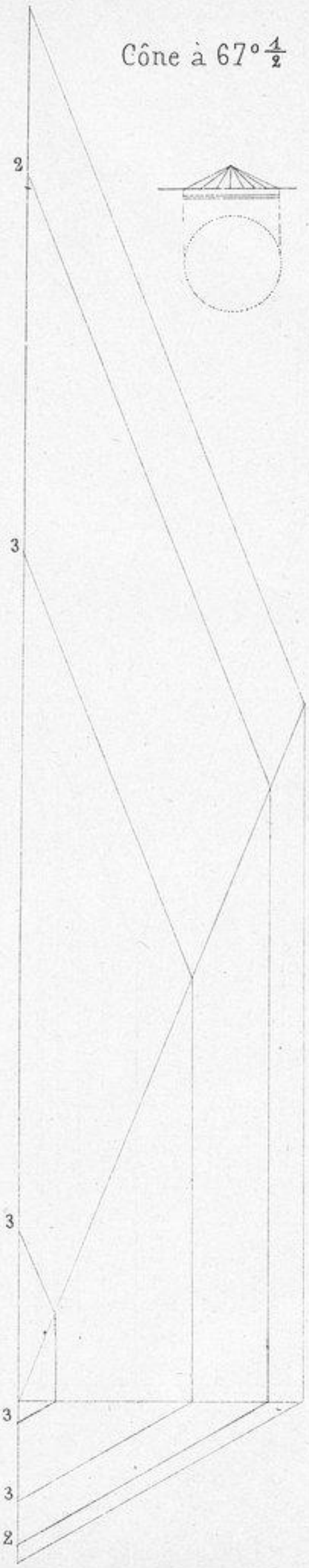


N°. 11'

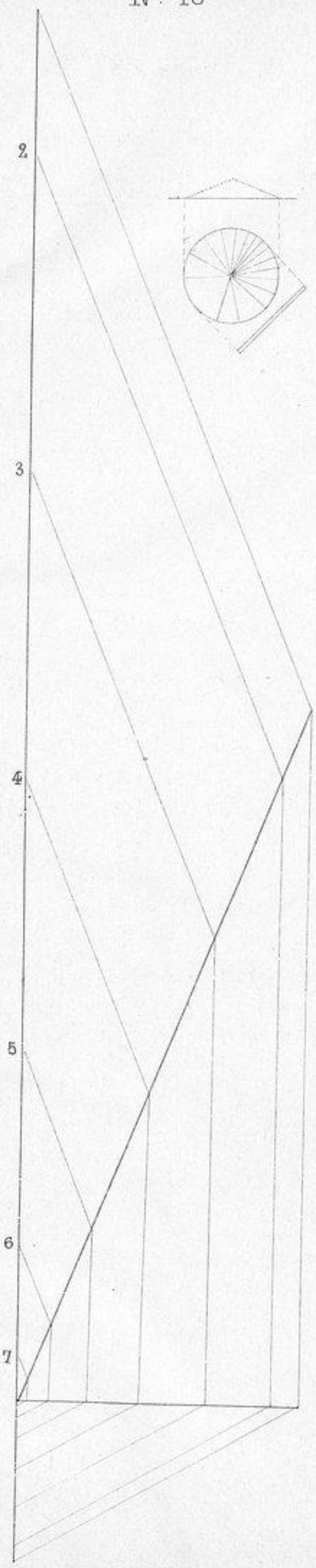


N°. 12'

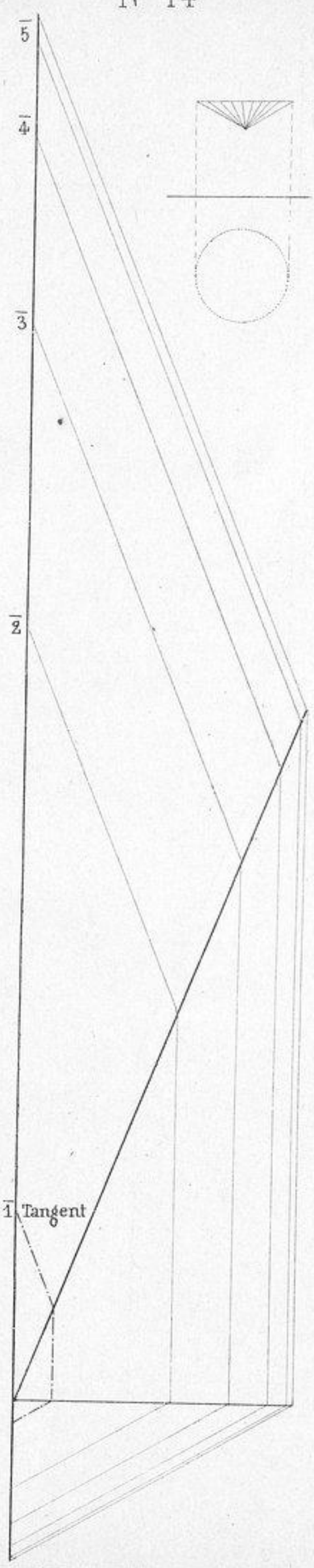
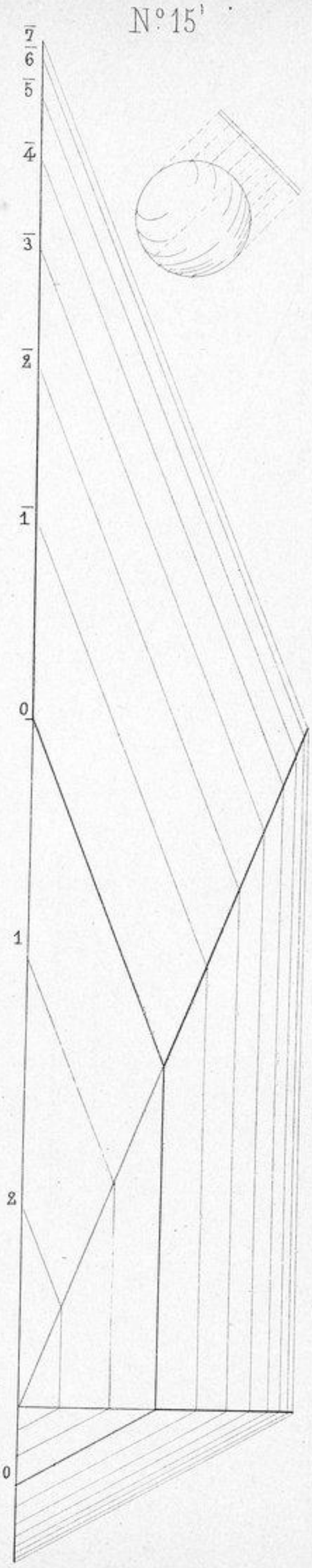
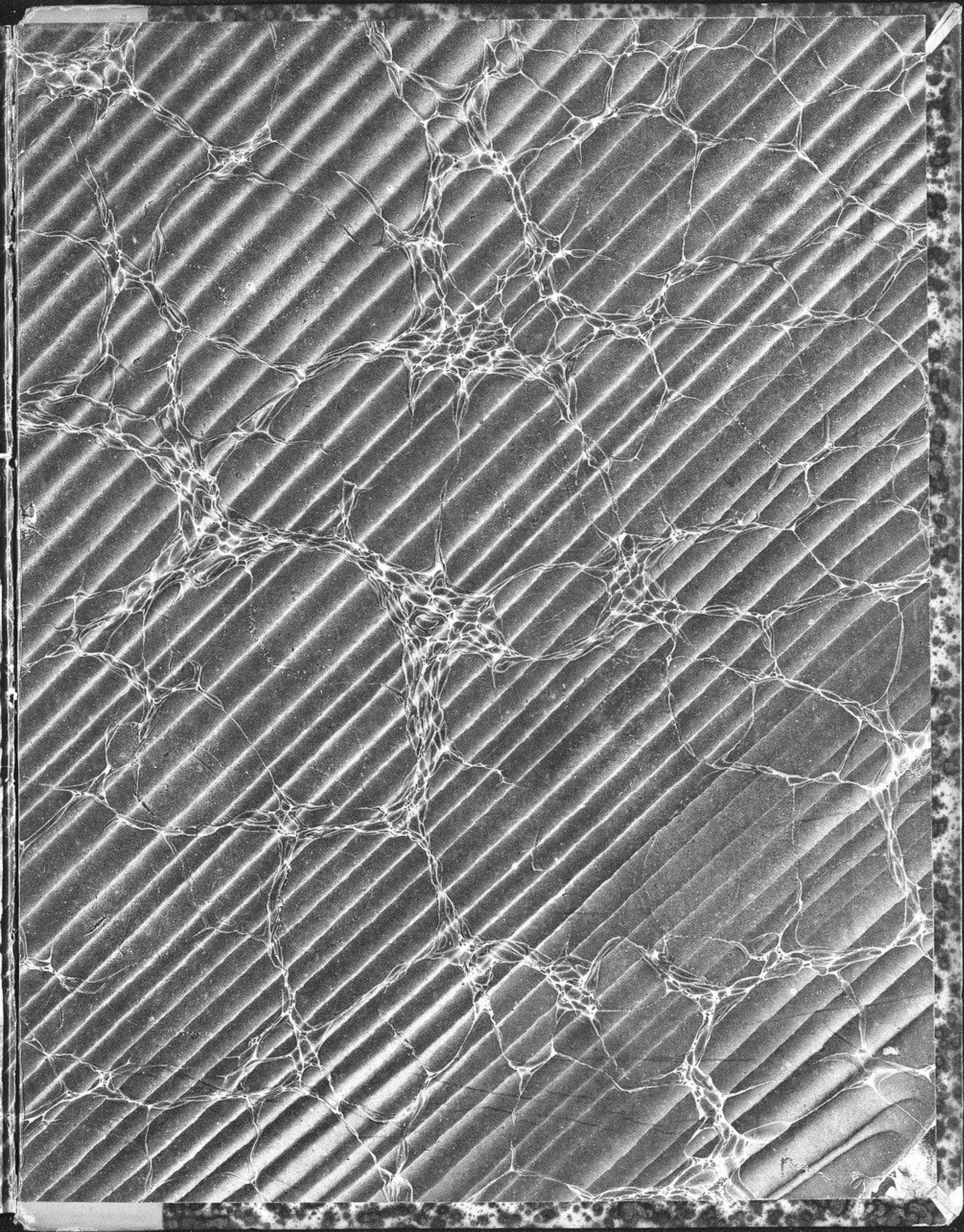
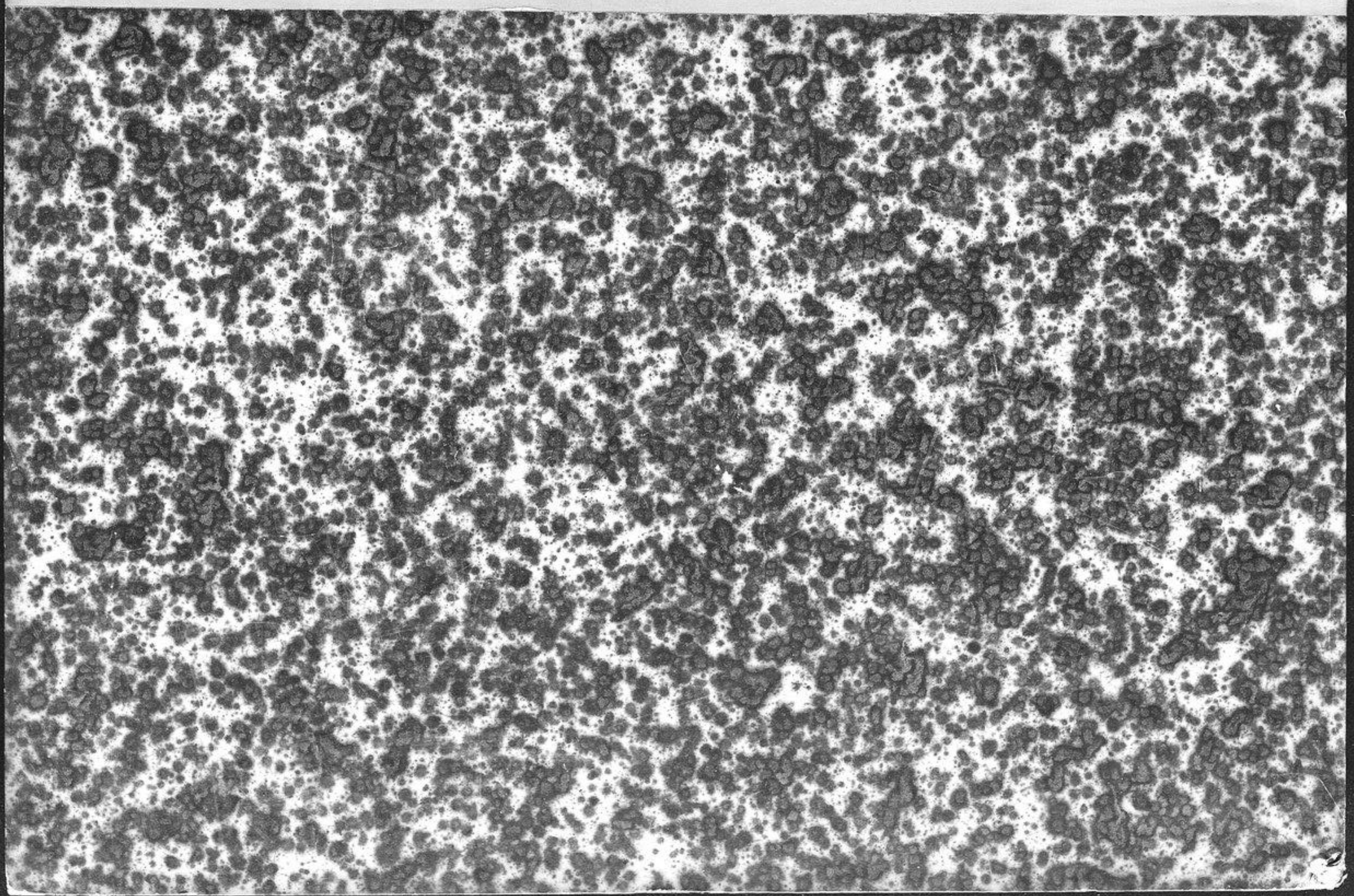
Cône à 67° $\frac{1}{2}$



N° 13'



N° 14'



N° 15'